

## Элементы мат.статистики и теории вероятности

Упражнение 0.1

Упражнение 0.9

Упражнение 0.17

Упражнение 0.2

Упражнение 0.10

Упражнение 0.18

Упражнение 0.3

Упражнение 0.11

Упражнение 0.19

Упражнение 0.4

Упражнение 0.12

Упражнение 0.20

Упражнение 0.5

Упражнение 0.13

Упражнение 0.21

Упражнение 0.6

Упражнение 0.14

Упражнение 0.22

Упражнение 0.7

Упражнение 0.15

1 3 6 9 5 8

Упражнение 0.8

Упражнение 0.16

14 15 16 17 18 20 21

По материалам курса С. Dougherty “Introduction to Econometrics” (London School of Economics)

См. учебник К. Доугерти «Введение в эконометрику», 2009.

## УПРАЖНЕНИЕ 0.1

Случайная переменная  $X$  определяется как разность между большим и меньшим числами, выпавшими при бросании двух костей. Если они равны между собой, то  $X$  считается равной нулю. Найти распределение вероятностей для  $X$ .

## УПРАЖНЕНИЕ 0.2

Случайная переменная  $X$  определяется как наибольшее из двух чисел, выпавшими при бросании двух костей, или любому из выпавших чисел, если они одинаковы. Найти распределение вероятностей для  $X$ .

## УПРАЖНЕНИЕ 0.3

Найти математическое ожидание случайной величины  $X$  из упр. 0.1.

red green	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

$X$	$f$	$p$
0	6	6/36
1	10	10/36
2	8	8/36
3	6	6/36
4	4	4/36
5	2	2/36

## УПРАЖНЕНИЕ 0.4

Найти математическое ожидание случайной величины  $X$  из упр. 0.2.

red green	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	2	3	4	5	6
3	3	3	3	4	5	6
4	4	4	4	4	5	6
5	5	5	5	5	5	6
6	6	6	6	6	6	6

$X$	$f$	$p$
1	1	1/36
2	3	3/36
3	5	5/36
4	7	7/36
5	9	9/36
6	11	11/36

## УПРАЖНЕНИЕ 0.5

Если  $X$  – случайная величина с математическим ожиданием  $\mu_X$ , и  $\lambda$  – константа, докажите, что математическое ожидание  $\lambda X$  равно  $\lambda\mu_X$ .

## УПРАЖНЕНИЕ 0.6

Рассчитайте  $E(X^2)$  для  $X$ , определенной в упр. 0.1.

<b>red green</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>
<b>1</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>1</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>2</b>	<b>1</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>
<b>4</b>	<b>3</b>	<b>2</b>	<b>1</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>
<b>5</b>	<b>4</b>	<b>3</b>	<b>2</b>	<b>1</b>	<b>0</b>	<b>1</b>
<b>6</b>	<b>5</b>	<b>4</b>	<b>3</b>	<b>2</b>	<b>1</b>	<b>0</b>

$X$	$f$	$p$
<b>0</b>	<b>6</b>	<b>6/36</b>
<b>1</b>	<b>10</b>	<b>10/36</b>
<b>2</b>	<b>8</b>	<b>8/36</b>
<b>3</b>	<b>6</b>	<b>6/36</b>
<b>4</b>	<b>4</b>	<b>4/36</b>
<b>5</b>	<b>2</b>	<b>2/36</b>

## УПРАЖНЕНИЕ 0.7

Рассчитайте  $E(X^2)$  для  $X$ , определенной в упр. 0.2.

red green	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	2	3	4	5	6
3	3	3	3	4	5	6
4	4	4	4	4	5	6
5	5	5	5	5	5	6
6	6	6	6	6	6	6

$X$	$f$	$p$
1	1	1/36
2	3	3/36
3	5	5/36
4	7	7/36
5	9	9/36
6	11	11/36



## УПРАЖНЕНИЕ 0.8

Пусть  $X$  – сумма очков, выпадающих при бросании двух игральных костей. Рассчитайте возможные значения величины  $Y$ , определенной как

$$Y = 2X + 3$$

и ее математическое ожидание  $E(Y)$ . Покажите, что оно равно  $2E(X) + 3$ .

## УПРАЖНЕНИЕ 0.9

Рассчитайте теоретическую дисперсию и стандартное отклонение величины  $X$ , определенной в упр.1, используя общее определение.

red green	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

$X$	$f$	$p$
0	6	6/36
1	10	10/36
2	8	8/36
3	6	6/36
4	4	4/36
5	2	2/36

## УПРАЖНЕНИЕ 0.10

Рассчитайте теоретическую дисперсию и стандартное отклонение величины  $X$ , определенной в упр.2, используя общее определение.

$$\sigma_X^2 = E[(X - \mu)^2] = (x_1 - \mu)^2 p_1 + \dots + (x_n - \mu)^2 p_n = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 p_i$$

red green	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	2	3	4	5	6
3	3	3	3	4	5	6
4	4	4	4	4	5	6
5	5	5	5	5	5	6
6	6	6	6	6	6	6

$X$	$f$	$p$
1	1	1/36
2	3	3/36
3	5	5/36
4	7	7/36
5	9	9/36
6	11	11/36

## УПРАЖНЕНИЕ 0.11

Покажите, что дисперсия случайной величины  $X$ , определенной в упр.1, найденная по формуле

$$\sigma_X^2 = E(X^2) - \mu_X^2$$

совпадает с результатом, полученным в упр. 9 (используйте результаты упражнений 3 и 6).

## УПРАЖНЕНИЕ 0.12

Покажите, что дисперсия случайной величины  $X$ , определенной в упр.2, найденная по формуле

$$\sigma_X^2 = E(X^2) - \mu_X^2$$

совпадает с результатом, полученным в упр. 10 (используйте результаты упражнений 4 и 7).

## УПРАЖНЕНИЕ 0.13

Пусть  $\rho_{HT}$  – коэффициент корреляции между влажностью,  $H$ , и температурой, измеренной по Фаренгейту,  $F$ . Покажите, что значение коэффициента корреляции не изменится, если температуру измерять в шкале Цельсия,  $C$ .

*Замечание:*  $C = 5/9 (F - 32)$ .

## УПРАЖНЕНИЕ 0.14

Пусть переменная  $Y$  является точной линейной функцией переменной  $X$ :

$$Y = \lambda + \mu X$$

где  $\lambda$  и  $\mu$  - константы. Покажите, что коэффициент корреляции между  $X$  и  $Y$  равен 1 или  $-1$ , в зависимости от знака  $\mu$ .

## УПРАЖНЕНИЕ 0.15

Пусть  $X$  – случайная величина, для которой имеется выборка из  $n$  значений. Покажите, что выборочное среднее

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j$$

является несмещенной оценкой теоретического среднего



## УПРАЖНЕНИЕ 0.16

Пусть  $X$  – случайная величина, для которой имеется выборка из  $n$  значений. Покажите, что взвешенное среднее этих значений

$$Z = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n = \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j$$

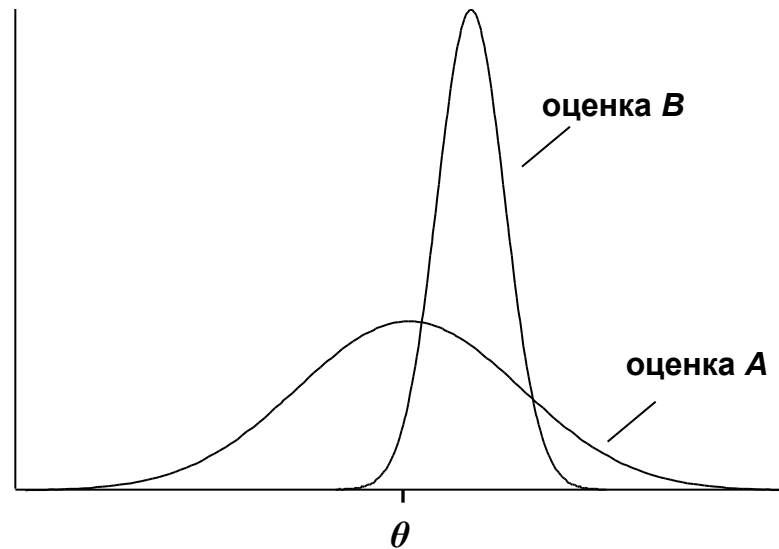
будет несмещенной оценкой теоретического среднего, если сумма весов равна 1

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$$

## УПРАЖНЕНИЕ 0.17

Приведите примеры смещенных и несмещенных оценок, эффективных и неэффективных. В каком случае вы предпочтете смещенную, но эффективную оценку несмещенной, но неэффективной?

Плотность  
вероятности



## УПРАЖНЕНИЕ 0.18

Пусть  $X$  – случайная величина с теоретическим средним  $\mu_X$  и дисперсией  $\sigma_X$ . Пусть в выборке имеются всего два наблюдения  $x_1$  и  $x_2$ . Покажите, что оценка среднего

$$Z = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$$

будет наиболее эффективной среди всех несмещенных оценок, если  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/2$

## УПРАЖНЕНИЕ 0.19

**В общем случае, дисперсия оценки уменьшается с увеличением размера выборки. Верно ли утверждать, что оценка становится более эффективной?**

## УПРАЖНЕНИЕ 0.19

**В общем, дисперсия оценки уменьшается с увеличением размера выборки. Верно ли, что оценка становится более эффективной?**

Нет, не верно.

Когда размер выборки увеличивается, дисперсия оценки уменьшается, и как следствие, скорее всего получится более точный результат оценки теоретических значений. Поскольку наша оценка улучшается в этом смысле, ее хочется назвать более эффективной, но это неверное использование термина «эффективность».

«Эффективность» - это понятие, которое используется для сравнения двух или более альтернативных оценок (способов оценивания), определяемых по одной и той же выборке из одних и тех же данных. Та оценка, которая имеет наименьшую дисперсию, называется более эффективной.

Утверждать, что с увеличением выборки оценка становится более эффективной, нельзя, потому что в этом случае сравниваются дисперсии одной и той же оценки при разных размерах выборки.

## УПРАЖНЕНИЕ 0.20

**Если имеется две оценки (два способа оценивания) одного и того же теоретического параметра, можно ли утверждать, что оценка с меньшей дисперсией будет более эффективной?**

## УПРАЖНЕНИЕ 0.20

**Если имеется две оценки (два способа оценивания) одного и того же теоретического параметра, можно ли утверждать, что оценка с меньшей дисперсией будет более эффективной?**

**Если обе оценки несмещенные, то так утверждать можно, считая, что обе оценки рассматриваются на одной и той же выборке.**

**Если оценки (или хотя бы одна из них) смещенные, то необязательно.**

**Понятие эффективности используется для сравнения несмещенных оценок. Для сравнения смещенных и несмещенных оценок используется обобщение этого понятия на основе функции потерь. Та оценка считается более эффективной, для которой функция потерь имеет наименьшее математическое ожидание.**

## УПРАЖНЕНИЕ 0.21

Пусть  $X$  – случайная величина с теоретическим средним  $\mu_X$  и теоретической дисперсией  $\sigma_X^2$ . Имеется выборка из  $n$  наблюдений  $\{X_1, \dots, X_n\}$ . Является ли выборочное среднее

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j$$

состоятельной оценкой теоретического среднего?



## УПРАЖНЕНИЕ 0.22

Пусть  $X$  – случайная величина с теоретическим средним  $\mu_X$  и теоретической дисперсией  $\sigma^2_X$ . Имеется выборка из  $n$  наблюдений  $\{X_1, \dots, X_n\}$ . Является ли оценка  $Z$

$$Z = \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^n x_j$$

состоятельной оценкой теоретического среднего?