

Решение систем обыкновенных дифференциальных уравнений

Рассмотрим систему из двух дифференциальных уравнений 1-го порядка:

$$\begin{cases} F_1(x, y, z, y', z') = 0 \\ F_2(x, y, z, y', z') = 0 \end{cases}$$

Оба уравнения необходимо разрешить относительно старшей производной:

$$\begin{cases} y' = f_1(x, y, z) \\ z' = f_2(x, y, z) \end{cases}$$

Пусть заданы начальные условия: x_0, y_0, z_0 .

Данную систему можно решить любым методом, применимым для решения единичных ОДУ.

Метод Эйлера:

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f_1(x_i, y_i, z_i)$$

$$z_{i+1} = z_i + h \cdot f_2(x_i, y_i, z_i)$$

$$x_{i+1} = x_i + h$$

Метод Эйлера-Коши:

$$\tilde{y}_{i+1} = y_i + h \cdot f_1(x_i, y_i, z_i)$$

$$\tilde{z}_{i+1} = z_i + h \cdot f_2(x_i, y_i, z_i)$$

$$x_{i+1} = x_i + h$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} \cdot (f_1(x_i, y_i, z_i) + f_1(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1}, \tilde{z}_{i+1}))$$

$$z_{i+1} = z_i + \frac{h}{2} \cdot (f_2(x_i, y_i, z_i) + f_2(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1}, \tilde{z}_{i+1}))$$

Метод Рунге-Кутта 4-го порядка:

$$k_1 = h \cdot f_1(x_i, y_i, z_i)$$

$$l_1 = h \cdot f_2(x_i, y_i, z_i)$$

$$k_2 = h \cdot f_1\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}, z_i + \frac{l_1}{2}\right)$$

$$l_2 = h \cdot f_2\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}, z_i + \frac{l_1}{2}\right)$$

$$k_3 = h \cdot f_1\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}, z_i + \frac{l_2}{2}\right)$$

$$l_3 = h \cdot f_2\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}, z_i + \frac{l_2}{2}\right)$$

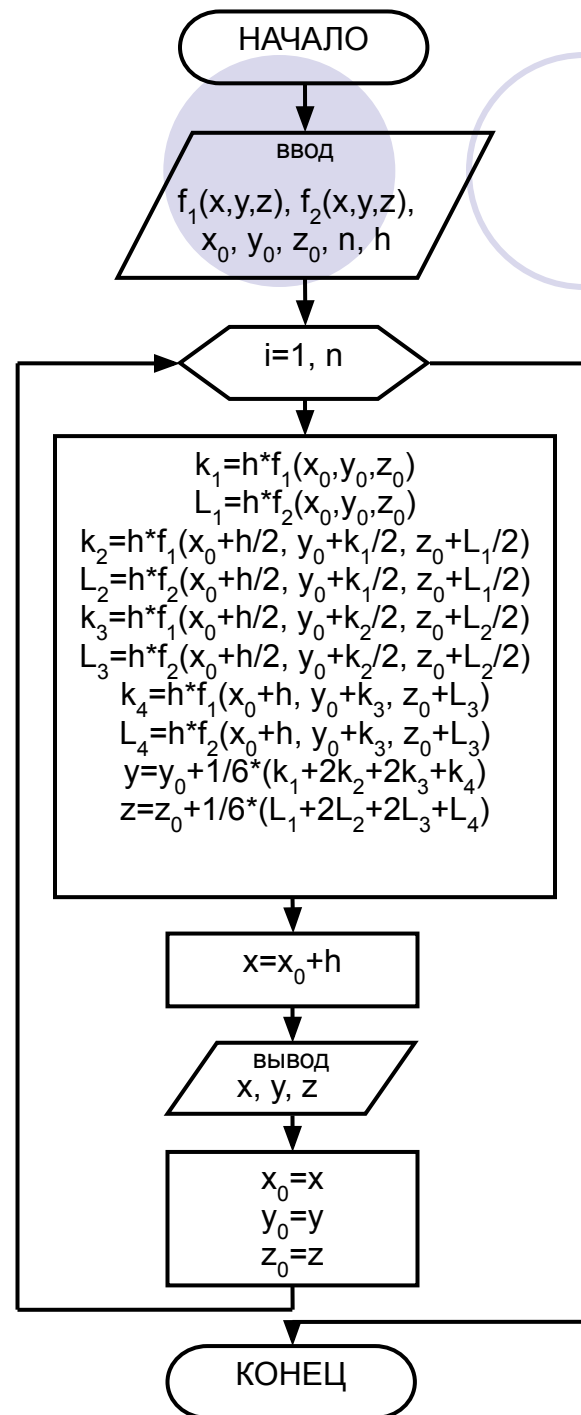
$$k_4 = h \cdot f_1(x_i + h, y_i + k_3, z_i + l_3)$$

$$l_4 = h \cdot f_2(x_i + h, y_i + k_3, z_i + l_3)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6} \cdot (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$z_{i+1} = z_i + \frac{1}{6} \cdot (l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4)$$

Блок-схема метода Рунге-Кутта 4 порядка для системы двух ОДУ



Решение обыкновенных дифференциальных уравнений высших порядков

Любое дифференциальное уравнение высшего порядка можно привести к системе дифференциальных уравнений 1-го порядка путем замены переменных.

Рассмотрим дифференциальное уравнение 2-го порядка:

$$F(x, y, y', y'') = 0$$

Заданы начальные условия: x_0, y_0, y'_0

Разрешим уравнение относительно старшей производной:

$$y'' = f(x, y, y')$$

Заменяем первую производную y' функцией z . Тогда $y'' = z'$, а $y'_0 = z_0$

Получим систему:

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = f(x, y, z) \end{cases}$$

Решаем полученную систему известными методами.

Пример решения ОДУ 2-го порядка:

$$2x^4 y'' - 3,5 y' x + y = 0, \quad y(2) = 4.5, \quad y'(2) = 3.2$$

Разрешим уравнение относительно старшей производной :

$$y'' = 1,75 \frac{y'}{x^3} - \frac{y}{2x^4}. \quad \text{Произведем замену} \quad y' = z$$

Получим систему:

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = 1,75 \frac{z}{x^3} - \frac{y}{2x^4} \end{cases} \quad x_0 = 2, \quad y_0 = 4.5, \quad z_0 = 3.2$$