

7 класс  
алгебра

Системы двух линейных уравнений  
с двумя переменными



# Цели:

- Сформировать представление о математической модели система уравнений.
- Познакомиться с понятием системы двух линейных уравнений и ее решении.
- Изучить графический способ решения систем двух уравнений.
- Решить вопрос о количестве решений системы двух линейных уравнений с двумя переменными.
- Решение более сложных систем двух уравнений с двумя неизвестными.



## *Вспомним!*

- 1. Что называется линейным уравнением с двумя неизвестными?**
- 2. Что значит решить уравнение с двумя неизвестными?**
- 3. Сколько может быть решений у линейного уравнения?**
- 4. Что называется графиком линейного уравнения с двумя переменными?**
- 5. Сколько точек определяет прямую?**
- 6. Когда две прямые на плоскости пересекаются?**
- 7. Когда две прямые на плоскости параллельны?**
- 8. Когда две прямые на плоскости совпадают?**



***Вспомним!***

*Линейное уравнение с двумя переменными*

***Уравнение вида:***

$$ax + by + c = 0$$

*называется линейным уравнением с двумя переменными (где  $x$ ,  $y$  - переменные,  $a$ ,  $b$  и  $c$  - некоторые числа).*

***( $x$ ;  $y$ )***

***Решением уравнения с двумя неизвестными*** называется пара переменных, при подстановке которых уравнение становится верным числовым равенством.

*Решить линейное уравнение –  
это значит найти те значения  
переменной, при каждом из которых  
уравнение обращается в верное  
числовое равенство.*

*Таких решений бесконечно много.*

Уравнение вида:  $kx + t = 0$

*называется линейным уравнением  
с одной переменной (где  $x$  – переменная,  
 $k$  и  $t$  некоторые числа).*

# Внимание!

***$x$  – переменная входит в уравнение  
обязательно в первой степени.***

**$5x - 8 = 0$**  *линейное уравнением с одной переменной*

$$2x^2 + 3x + 7 = 0$$

*не линейное уравнением  
с одной переменной*



# Вспомним!

$$x + y - 8 = 0$$

Реальная ситуация (словесная модель)	Алгебраическая модель	Геометрическая модель
Сумма двух чисел равна 8.	$x + y = 8$ (линейное уравнение с двумя переменными)	прямая (график линейного уравнения с двумя переменными)

*Графиком любого линейного уравнения  $ax + by + c = 0$  есть **прямая**.*

*Для построения графика достаточно найти координаты **двух точек**.*



# *Вспомним!*

## *Алгоритм построения графика*

### *уравнения $ax + by + c = 0$*

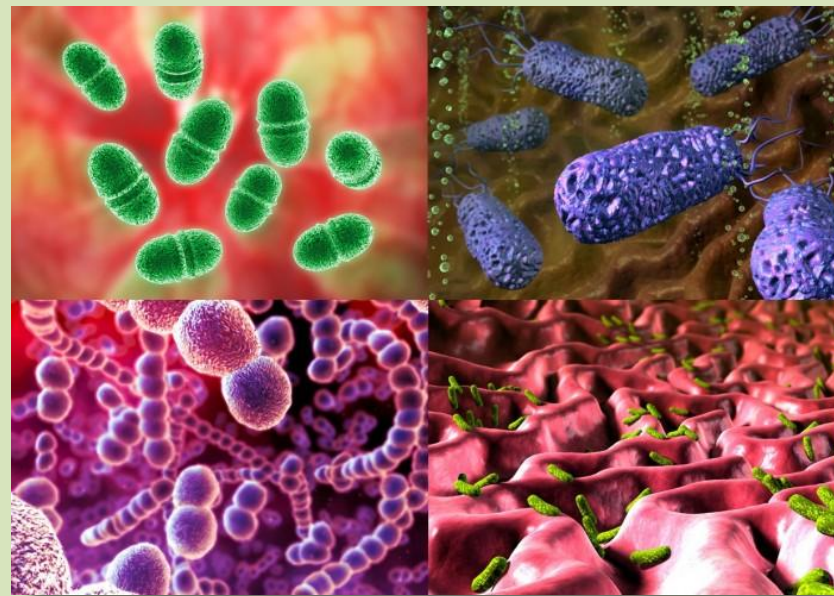
*1. Придать переменной  $x$  конкретное значение  $x_1$ ; найти из уравнения  $ax + by + c = 0$  соответствующее значение  $y_1$ .  
Получим  $(x_1; y_1)$ .*

*2. Придать переменной  $x$  конкретное значение  $x_2$ ; найти из уравнения  $ax + by + c = 0$  соответствующее значение  $y_2$ .  
Получим  $(x_2; y_2)$ .*

*3. Построим на координатной плоскости точки  $(x_1; y_1)$ ,  $(x_2; y_2)$  и соединим прямой.*

*4. Прямая – есть график уравнения.*

**Количество болезнетворных микробов в организме описывается по формуле  $y-50000=5000t$ . Человек начинает принимать лекарство. Количество микробов, уничтожаемых лекарством,  $y=15000t$  ( $t$  – время в сутках). Какое время человек должен**



Часто приходится рассматривать математическую модель состоящую из **двух линейных уравнений с двумя переменными**.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

***(x; y)***

**Решение системы уравнений с двумя неизвестными** называется **пара переменных**, при подстановке которых уравнения становятся верными числовыми равенствами.

**Решить систему** - это значит найти все ее решения или доказать, что их нет.

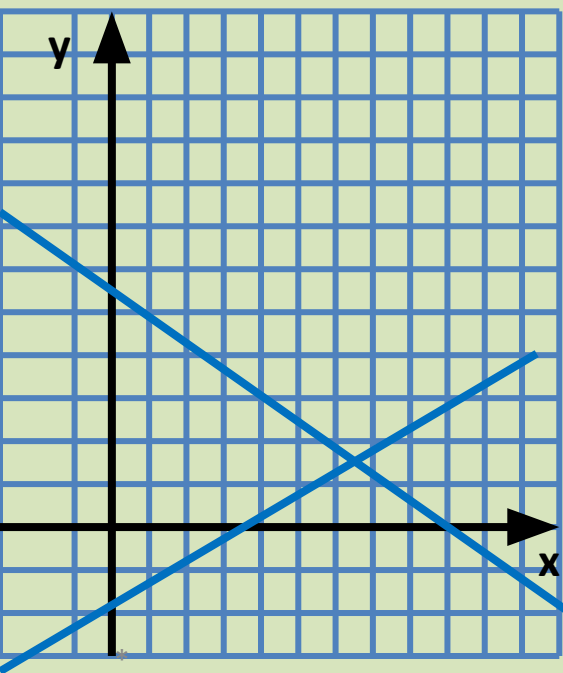
# Как определить сколько решений имеет система уравнений

без построения графиков?

$$\begin{cases} y = \underline{x} - 2 \\ y = \underline{-2x} + 3 \end{cases}$$

$k_1 \neq k_2$ , значит прямые пересекаются.

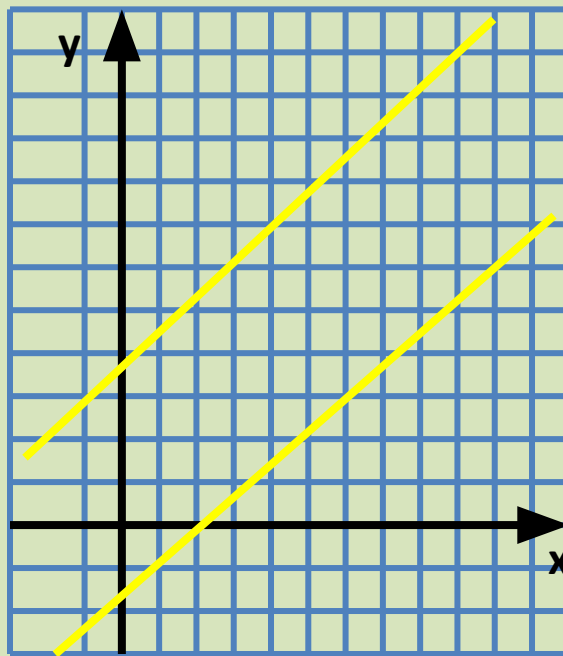
**Система имеет одно решение!**



$$\begin{cases} y = \underline{5x} - 2 \\ y = \underline{5x} + 3 \end{cases}$$

$k_1 = k_2$ , значит прямые параллельны.

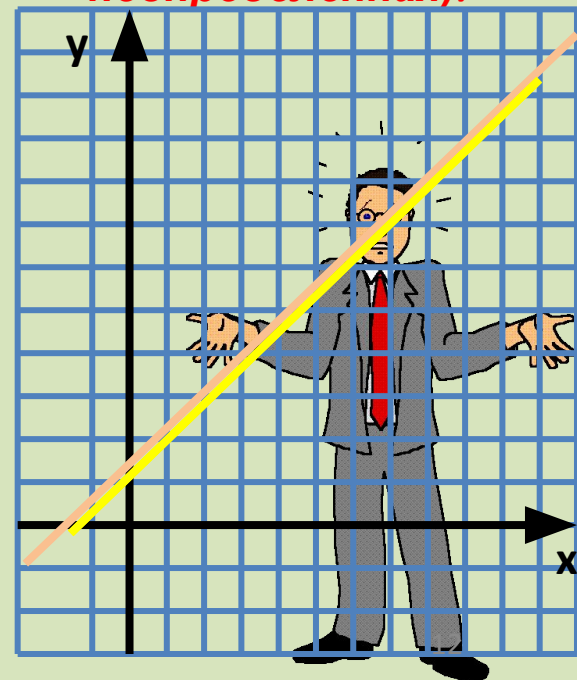
**Система не имеет решения (она несовместима)!**



$$\begin{cases} y = 3x + 1 \\ 3x - y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3x + 1 \\ y = 3x + 1 \end{cases}$$

прямые совпадают.

**Система имеет бесконечно много решений (она неопределённая)!**



Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x - y - 3 = 0, \\ x + 2y - 4 = 0. \end{cases}$$

1. Построим график уравнения  
 $2x - y - 3 = 0$ ,  $y = 2x - 3$ .

$x$	1	2
$y$	-1	1

Получим точки:  
 $(1; -1)$ ,  $(2; 1)$

2. Построим график уравнения  
 $x + 2y - 4 = 0$ ,  $2y = -x + 4$ ,  
 $y = (-x + 4) : 2$ .

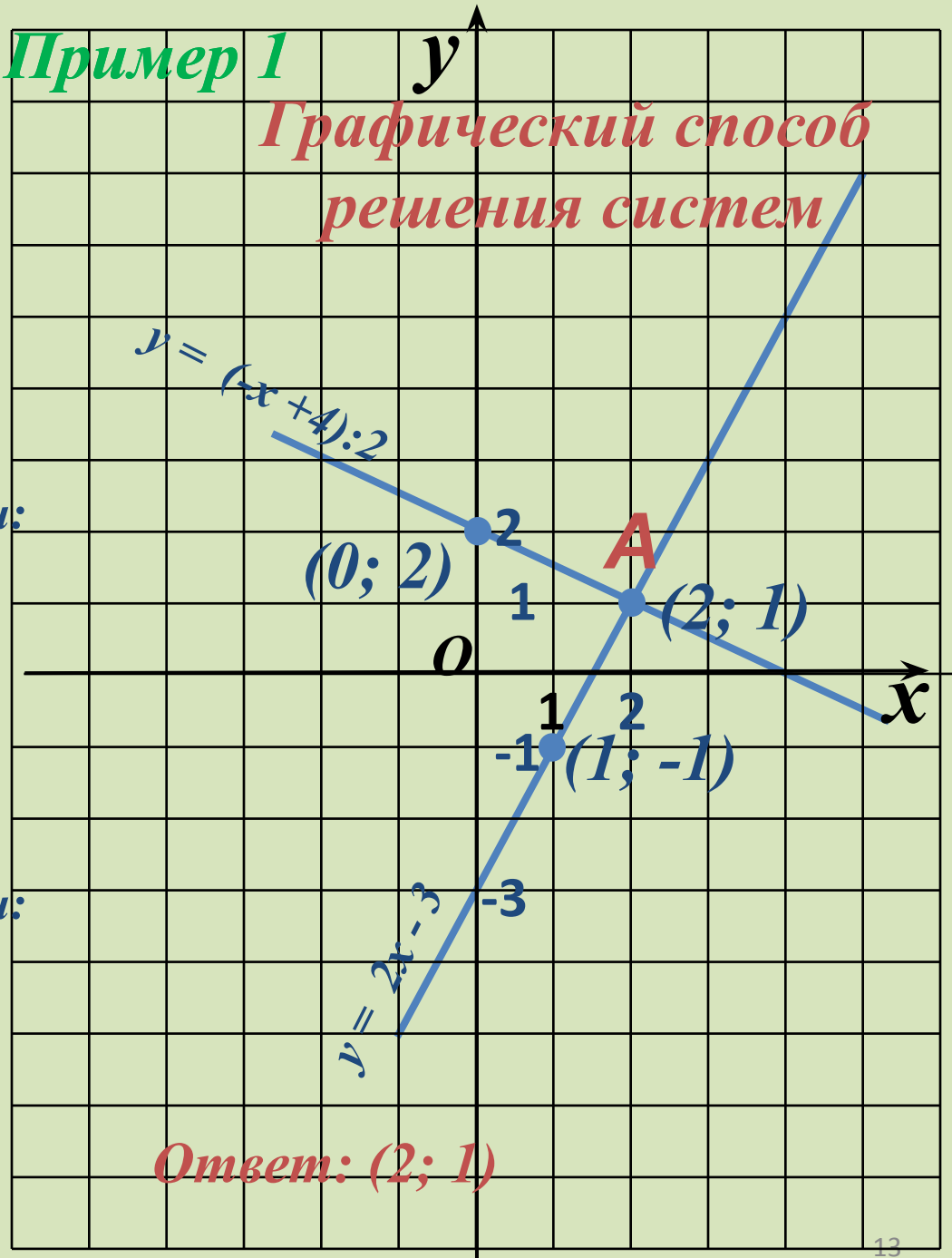
$x$	0	2
$y$	2	1

Получим точки:  
 $(0; 2)$ ,  $(2; 1)$

3. Прямые пересекаются в  
единственной точке  $A(2;1)$

Пример 1

Графический способ  
решения систем

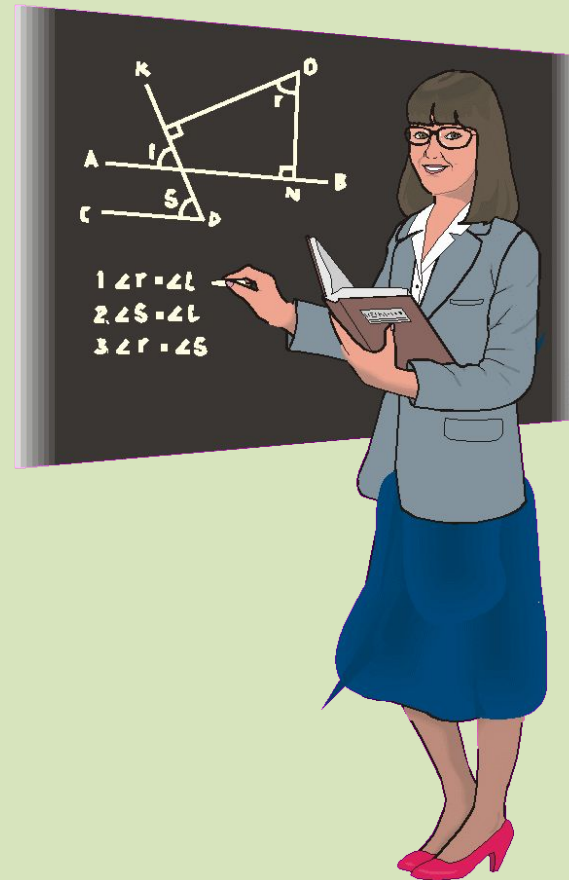


Ответ:  $(2; 1)$

# **Алгоритм решения системы уравнений графическим способом**

- 1. Приводим оба уравнения к виду линейной функции  $y = kx + m$ .**
- 2. Составляем расчётные таблицы для каждой функции.**
- 3. Строим графики функций в одной координатной плоскости.**
- 4. Определяем число решений:**
  - Если прямые пересекаются, то одно решение пара чисел  $(x ; y)$  – координаты точки пересечения;**
  - Если прямые параллельны, то нет решений;**
  - Если прямые совпадают, то бесконечно много решений.**
- 5. Записываем ответ.**

# Решить в тетради: 1. № 1057 , 1061





**Количество решений двух линейных уравнений с двумя переменными.**

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

1) Если  $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ , то прямые пересекаются и система имеет единственное решение.

2) Если  $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ , то прямые параллельны и система не имеет решений. Система называется несовместной.

3) Если  $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ , то прямые совпадают и система имеет бесконечно много решений. Система называется неопределенной.



Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x + 2y - 5 = 0, \\ 2x + 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

1. Построим график уравнения  $x + 2y - 5 = 0$ ,  $y = (5 - x) : 2$ .

x	1	3
y	2	1

Получим точки:  
(1; 2), (3; 1)

2. Построим график уравнения  $2x + 4y + 3 = 0$ ,  $4y = -2x - 3$ ,  
 $y = -(2x + 3) : 4$ .

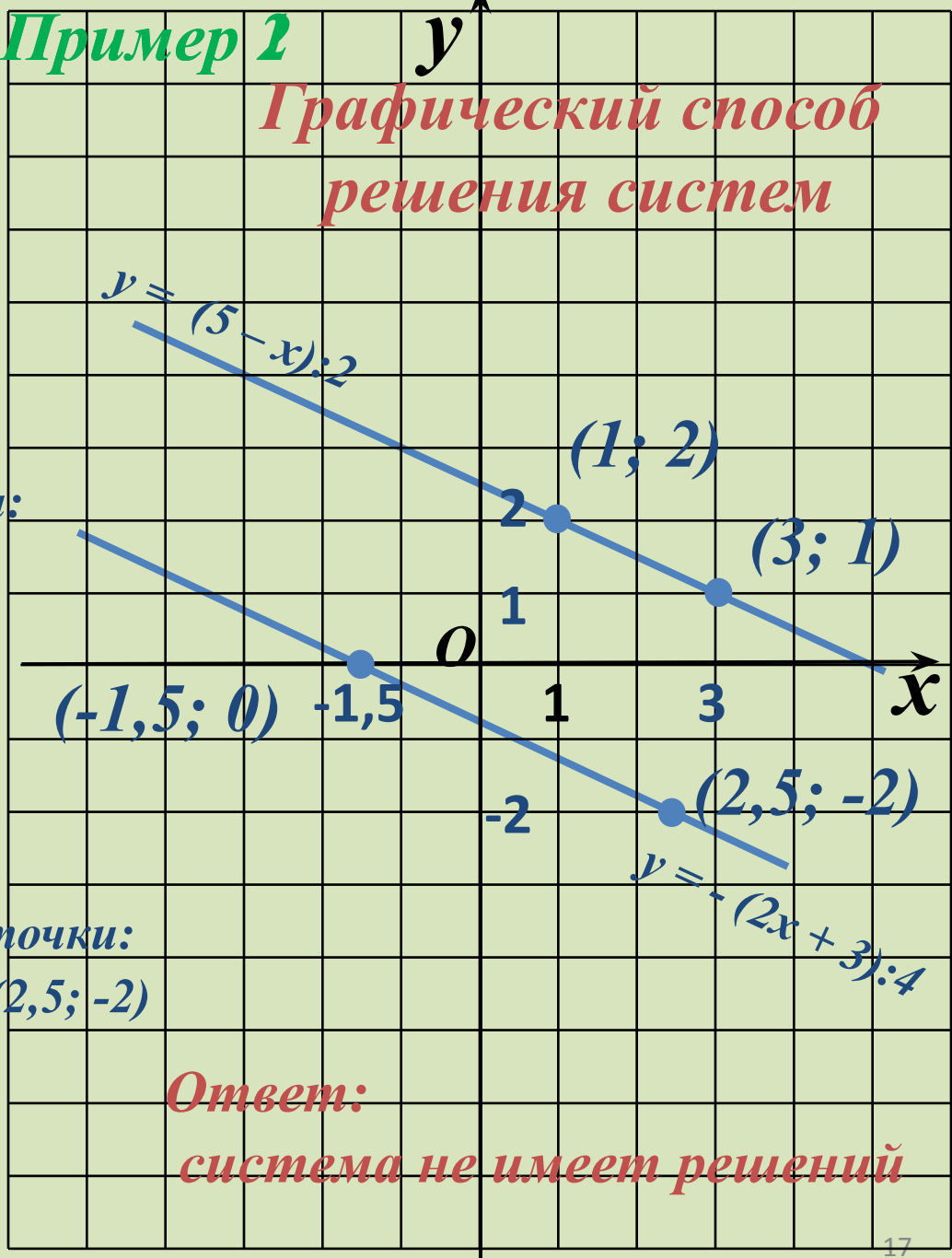
x	-1,5	2,5
y	0	-2

Получим точки:  
(-1,5; 0), (2,5; -2)

3. Прямые **параллельны**.

**Пример 2**

**Графический способ  
решения систем**



**Ответ:**  
**система не имеет решений**

## Пример 3

При каких значениях  $a$  система уравнений имеет **единственное решение**:

$$\begin{cases} (2a - 1)x + 3y = 7a + 1, \\ (a + 2)x + 2y = 5a - 3. \end{cases}$$

### Решение

Условие при которых система уравнений имеет **единственное решение**:

$$\frac{2a - 1}{a + 2} \neq \frac{3}{2},$$

Используем свойство пропорции:

$$2(2a - 1) \neq 3(a + 2),$$

$$4a - 2 \neq 3a + 6$$

$$4a - 3a \neq 2 + 6$$

$$a \neq 8$$

**Ответ:** при всех значениях  $a$ , кроме  $a = 8$ , данная система имеет **единственное решение**.

## Пример 4

При каких значениях  $a$  система уравнений **несовместна** (т.е. не имеет решений):

$$\begin{cases} (2a - 1)x + 3y = 7a + 1, \\ (2a + 1)x + 5y = 5a - 3. \end{cases}$$

### Решение

Условие при которых система уравнений **несовместна** (не имеет решений):

$$\frac{2a - 1}{2a + 1} = \frac{3}{5} \neq \frac{7a + 1}{5a - 3}$$

1) Сначала рассмотрим равенство  $\frac{2a - 1}{2a + 1} = \frac{3}{5}$

Используем свойство пропорции:  $5(2a - 1) = 3(2a + 1),$

$$10a - 5 = 6a + 3 \quad 10a - 6a = 3 + 5 \quad 4a = 8 \quad a = 2$$

2) Теперь проверим неравенство:

$$\frac{3}{5} \neq \frac{7a + 1}{5a - 3}$$

При подстановке значения  $a = 2$  имеем:

$$\frac{3}{5} \neq \frac{7 \cdot 2 + 1}{5 \cdot 2 - 3}$$

$$\frac{3}{5} \neq \frac{15}{7} \quad - \text{ верное неравенство}$$

**Ответ:** при  $a = 2$ , данная система **несовместна**.

## Пример 5

При каких значениях  $a$  система уравнений **неопределенна**:

$$\begin{cases} (2a - 1)x + 3y = 7a + 1, \\ (a + 1)x + 6y = 11a + 5. \end{cases}$$

Укажите решения системы.

### Решение

Условие при которых система уравнений **неопределенна**:

$$\frac{2a - 1}{a + 1} = \frac{3}{6} = \frac{7a + 1}{11a + 5}$$

1) Сначала рассмотрим равенство

$$\frac{2a - 1}{a + 1} = \frac{3}{6} \quad \frac{2a - 1}{a + 1} = \frac{1}{2}$$

Используем свойство пропорции:

$$2(2a - 1) = a + 1,$$

$$4a - 2 = a + 1$$

$$4a - a = 1 + 2$$

$$3a = 3$$

$$a = 1$$

2) Теперь проверим равенство:

$$\frac{3}{6} = \frac{7a+1}{11a+5}$$

При подстановке значения  $a = 1$  имеем:

$$\frac{3}{6} \neq \frac{7 \cdot 1 + 1}{11 \cdot 1 + 5}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad - \text{ верное равенство}$$

Итак при  $a = 1$ , данная система **неопределенна**.

При подстановке значения  $a = 1$  в данную систему имеем:

$$\begin{cases} (2 \cdot 1 - 1)x + 3y = 7 \cdot 1 + 1, \\ (1 + 1)x + 6y = 11 \cdot 1 + 5. \end{cases} \quad \begin{cases} x + 3y = 8, \\ 2x + 6y = 16. \end{cases}$$

Поделим второе уравнение на 2, имеем:

$$\begin{cases} x + 3y = 8, \\ x + 3y = 8. \end{cases}$$

**Ответ:** решением системы будет любая пара чисел  $x$  и  $y$ , в которой  $x = 8 - 3y$ , а  $y$  – произвольное число.

# *Ответить на вопросы*

1. **Что собой представляют графики обоих уравнений системы?**
2. **В каком случае система имеет единственное решение?**
3. **Какая система является несовместимой?**
4. **О какой системе говорят, что она неопределенна?**
5. **Что называется решением системы уравнений с двумя переменными?**
6. **Что значит решить систему уравнений?**

# *Спасибо за внимание!*

1. Учебник: прочитать § 40-42, с. 199–211;
2. Задачник:  
№ 1028, 1045

