Потоки в сетях

Теорема о максимальном потоке и минимальном разрезе

Лекция 6

Сеть

- Ориентированный граф G с пропускными способностями дуг u: $E(G) \to \mathbf{R}_+$ и две выделенные вершины s (**источник**) и t (**сток**).
- Четверка (G, u, s, t) называется **сетью**.
- Главная задача — транспортировать так много единиц продукта, как возможно, одновременно из s в t. Решение этой задачи назовем максимальным потоком.

Поток

- Определение 6.1. Дан орграф G с пропускными способностями (вместимостями) u: $E(G) \to \mathbf{R}_+$, **потоком** называется функция $f: E(G) \to \mathbf{R}_+$ с $f(e) \le u(e)$ для всех $e \in E(G)$. Будем говорить, что f удовлетворяет **закону сохранения** в вершине v, если
$$\sum_{e\in\delta^-(v)} f(e) = \sum_{e\in\delta^+(v)} f(e).$$
Поток, удовлетворяющий закону сохранения в каждой вершине называется **циркуляцией**.

s-t-Поток

- Дана сеть (G, u, s, t), ***s-t*-потоком** называется поток, удовлетворяющий закону сохранения во всех вершинах кроме s и t. Определим **величину *s-t*-потока** функцией

$$\mathrm{value}(f) := \sum_{e \in \delta^+(s)} f(e) - \sum_{e \in \delta^-(s)} f(e).$$

Задача «Максимальный Поток»

- *Дано*: Сеть (G, u, s, t).
- *Найти* s-t-поток максимальной величины.

s-t-Разрез

- ***s-t*-разрез** в графе — разрез $\delta(X)$ для некоторого $X \subset V(G)$ с $s \in X$ и $t \in V(G)\setminus X$.
- **пропускной способностью** s-t-разреза называется сумма вместимостей его дуг (ребер). Под минимальным s-t-разрезом в (G,u,s,t) мы понимаем s-t-разрез с минимальной пропускной способностью (относительно u) в G.

s-*t*-*Поток* и *s*-*t*-*разрез*

- **Лемма 6.2**

Для всех $A \subseteq V(G)$ таких, что $s \in A$, $t \notin A$, и любого s-t-потока f.

a) $$\text{value}(f) = \sum_{e \in \delta^+(A)} f(e) - \sum_{e \in \delta^-(A)} f(e).$$

b) $$\text{value}(f) \leq \sum_{e \in \delta^+(A)} u(e).$$

Величина максимального потока не превосходит пропускной способности минимального разреза.

Доказательство (а)

$$\begin{aligned}
\mathrm{value}(f) &= \sum_{e\in\delta^+(s)} f(e) - \sum_{e\in\delta^-(s)} f(e) \\
&= \sum_{v\in A}\left(\sum_{e\in\delta^+(v)} f(e) - \sum_{e\in\delta^-(v)} f(e)\right) \\
&= \sum_{e\in\delta^+(A)} f(e) - \sum_{e\in\delta^-(A)} f(e).
\end{aligned}$$

s-*t*-*Поток* и *s*-*t*-*разрез*

- **Лемма 6.2**

  Для всех $A \subseteq V(G)$ таких, что $s \in A$, $t \notin A$, и любого s-t-потока f.

a) $$\mathrm{value}(f) = \sum_{e \in \delta^+(A)} f(e) - \sum_{e \in \delta^-(A)} f(e).$$

b) $$\mathrm{value}(f) \le \sum_{e \in \delta^+(A)} u(e).$$

Обратные дуги и остаточные пропускные способности

- Определение 6.3

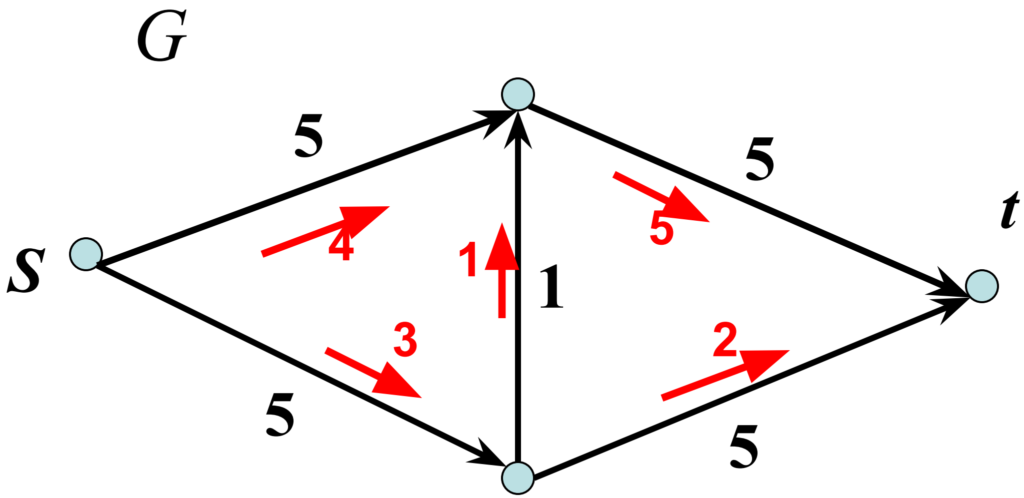
Для орграфа G определим $\breve{G}:=(V(G), E(G) \cup \{\breve{e}: e \in E(G)\})$, где для каждого $e = (v,w) \in E(G)$ определим ě как новое ребро из w в v. Назовем ě **обратной дугой** к e и, наоборот. Заметим, что если $e = (v,w)$, $e' = (w,v)$, то ě и e' два параллельных ребра в $\breve{G}$.

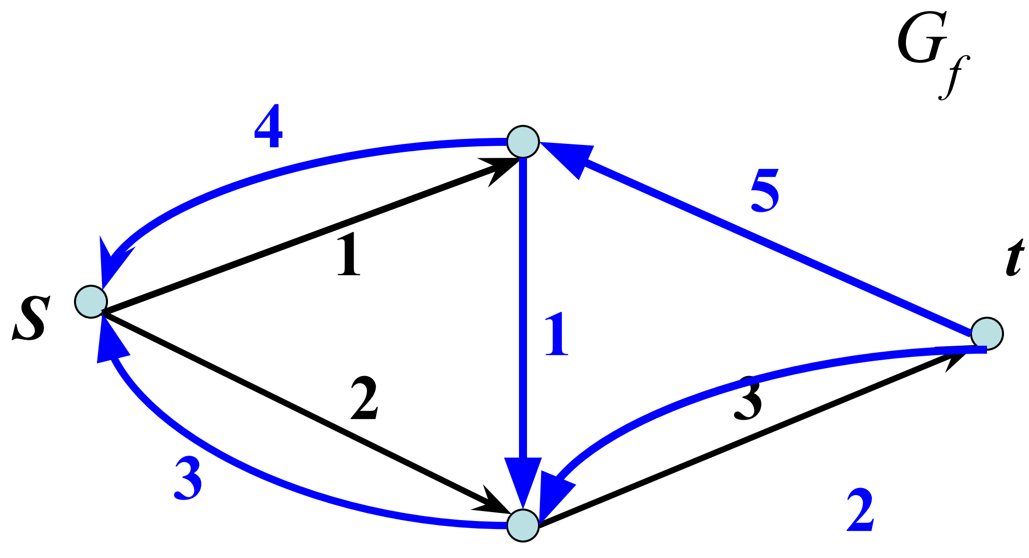
Дан орграф G с вместимостями u: $E(G) \to \mathbf{R}_+$ и поток f, определим **остаточные пропускные способности** $u_f : E(\breve{G}) \to \mathbf{R}_+$ как $u_f(e) := u(e) - f(e)$ и $u_f(\breve{e}) := f(e)$ для всех $e \in E(G)$.

Остаточным графом G_f называется граф

$$(V(G), \{e \in E(\breve{G}): u_f(e) > 0\}).$$

Остаточный граф





Увеличивающий Путь

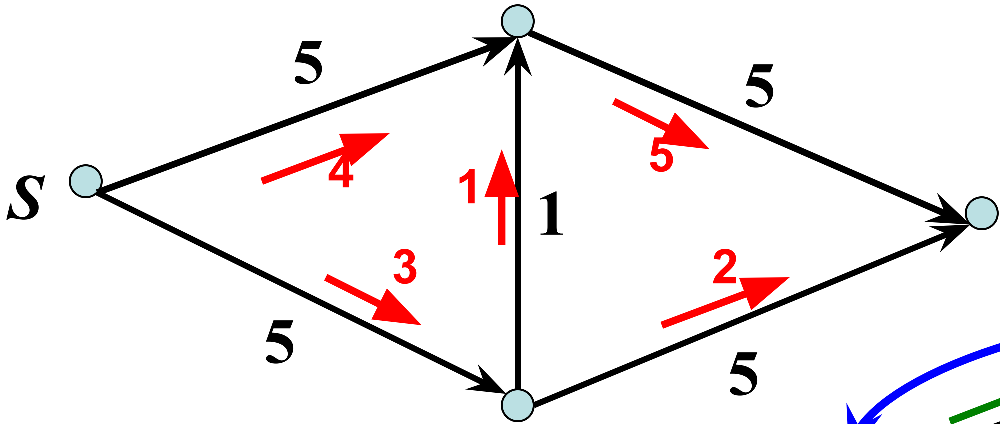
Даны поток f и путь (или цикл) P в G_f, **увеличение** f вдоль P на γ означает следующее для каждой $e \in E(P)$:

- если $e \in E(G)$, то увеличим $f(e)$ на γ ,
- если $e = \breve{e}_0$, $e_0 \in E(G)$, то уменьшим $f(e_0)$ на γ.

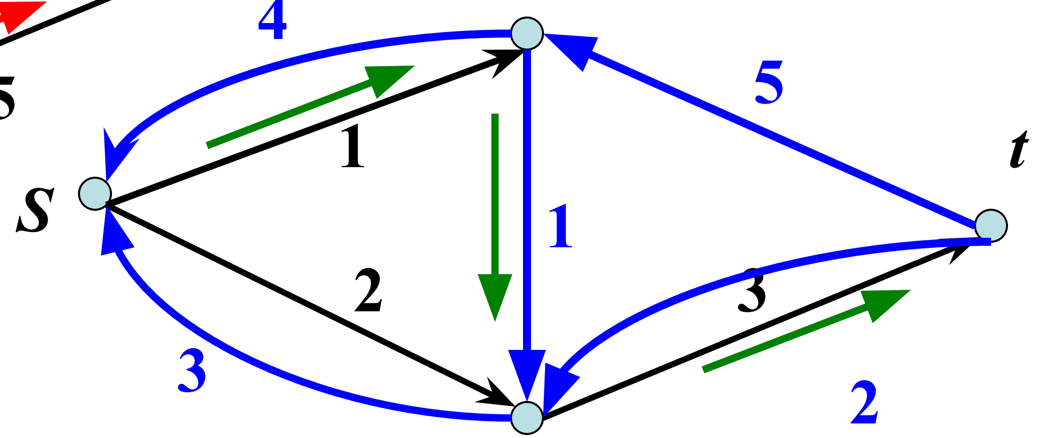
Дана сеть (G, u, s, t) и s-t-поток f, ***f*–увеличивающим путем** называется s-t-путь в остаточном графе G_f.

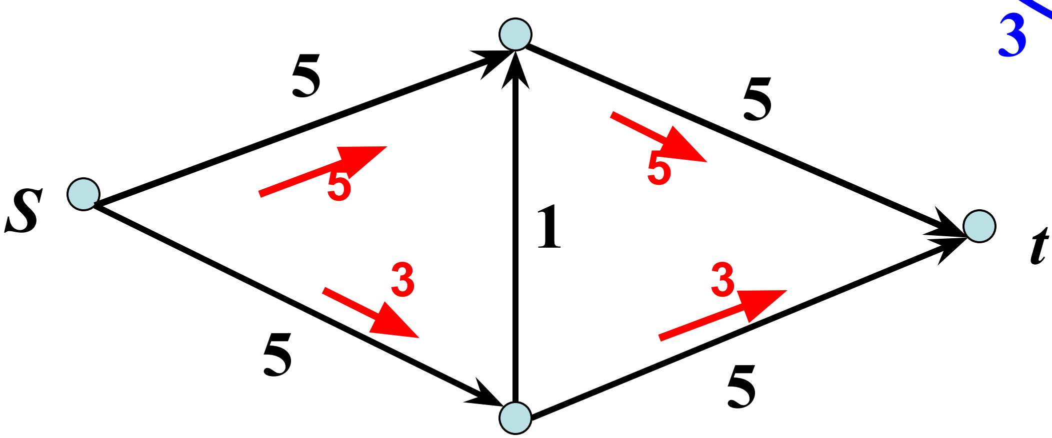
Увеличивающий Путь

G



G_f





Алгоритм Форда-Фалкерсона

Input: Сеть (G, u, s, t).
Output: s-t-поток f максимальной величины.

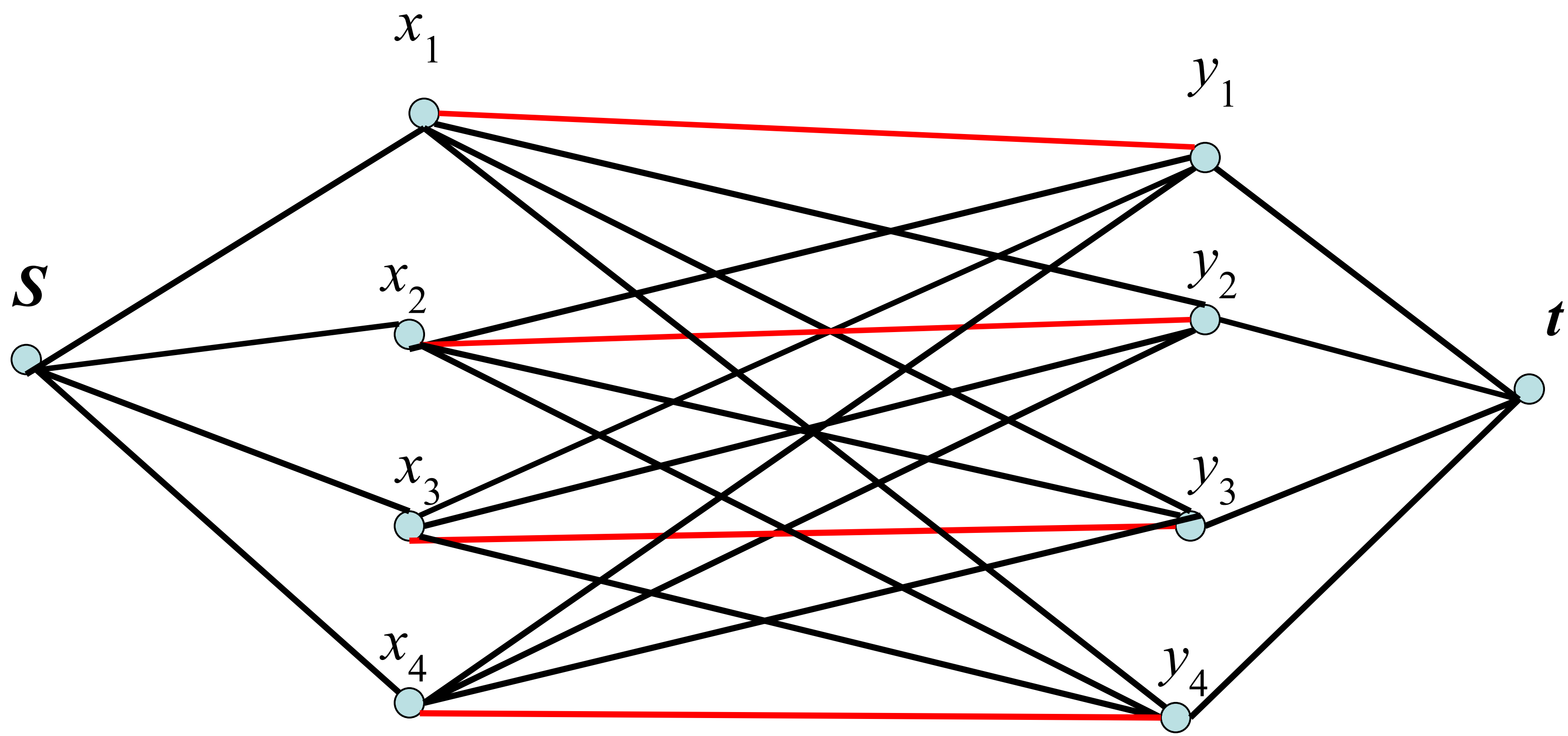
1. Положим $f(e) = 0$ для всех $e \in E(G)$.
2. Найти f-увеличивающий путь P. **If** такого пути нет **then stop**.
3. Вычислить $\gamma := \min_{e \in E(P)} u_f(e)$.
   Увеличить f вдоль P на γ и **go to** 2.

Замечание

- Найти увеличивающий путь легко (любой *s*-*t*-путь в G_f).
- Если выбирать произвольный увеличивающий путь в G_f, то
  – Существует пример с иррациональными вместимостями дуг, когда алгоритм никогда не остановится.
  – Существует пример с целыми вместимостями дуг, на котором алгоритм производит экспоненциальное от размера входа число увеличений.

Пример с бесконечным числом итераций

(все линии представляют ребра, то есть поток может идти в оба направления)



$u(x_1, y_1)=1, u(x_2, y_2)=\sigma, u(x_3, y_3)= u(x_4, y_4)= \sigma^2$

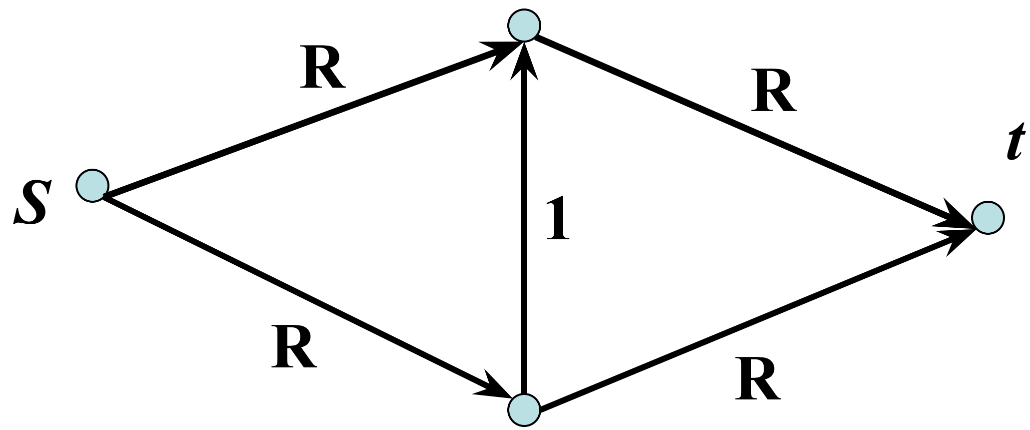
$$\sigma = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Пропускная способность остальных ребер $1/(1-\sigma)$.

Упражнение 6.1

- Показать, что для сети из предыдущего примера алгоритм Форда-Фалкерсона может работать бесконечно долго.

Целочисленный пример с экспоненциальным числом итераций



2**R** итераций.

Длина входа — O(log **R**).

Характеризация максимального потока

Теорема 6.4

s-*t*-Поток f является максимальным тогда и только тогда, когда в G_f не существует f-увеличивающего пути.

Доказательство

- Пусть в G_f не существует f-увеличивающего пути.
- $\Rightarrow$ t не достижимо в G_f из s.
- Пусть R множество вершин, достижимых из s в G_f.
- По определению G_f имеем $f(e) = u(e)$ для всех $e \in \delta^+(R)$, и $f(e) = 0$ для всех $e \in \delta^-(R)$.
- Лемма 6.2 a) $\Rightarrow$ $\text{value}(f) = \sum_{e \in \delta^+(R)} u(e)$.
- Лемма 6.2 b) $\Rightarrow$ f — максимальный поток.

Замечание

- В частности, из доказательства следует, что каждому максимальному потоку соответствует s-t-разрез, пропускная способность которого равна величине потока.
- Вместе с леммой 6.2 b) это влечет центральный результат теории потоков в сети.

Максимальный поток и минимальный разрез

Теорема 6.5 (Форд, Фалкерсон [1956], Элиас, Файнштайн, Шэннон [1956])

Величина максимального s-t-потока равна пропускной способности минимального s-t-разреза.

Теорема о целочисленном потоке

Следствие 6.6

Если пропускные способности дуг в сети целые числа, то существует целочисленный максимальный поток.

Упражнение 6.2

- Построить пример сети, в которой вместимости дуг целые числа, и существует нецелочисленный максимальный поток.

Теорема о Декомпозиции Потока

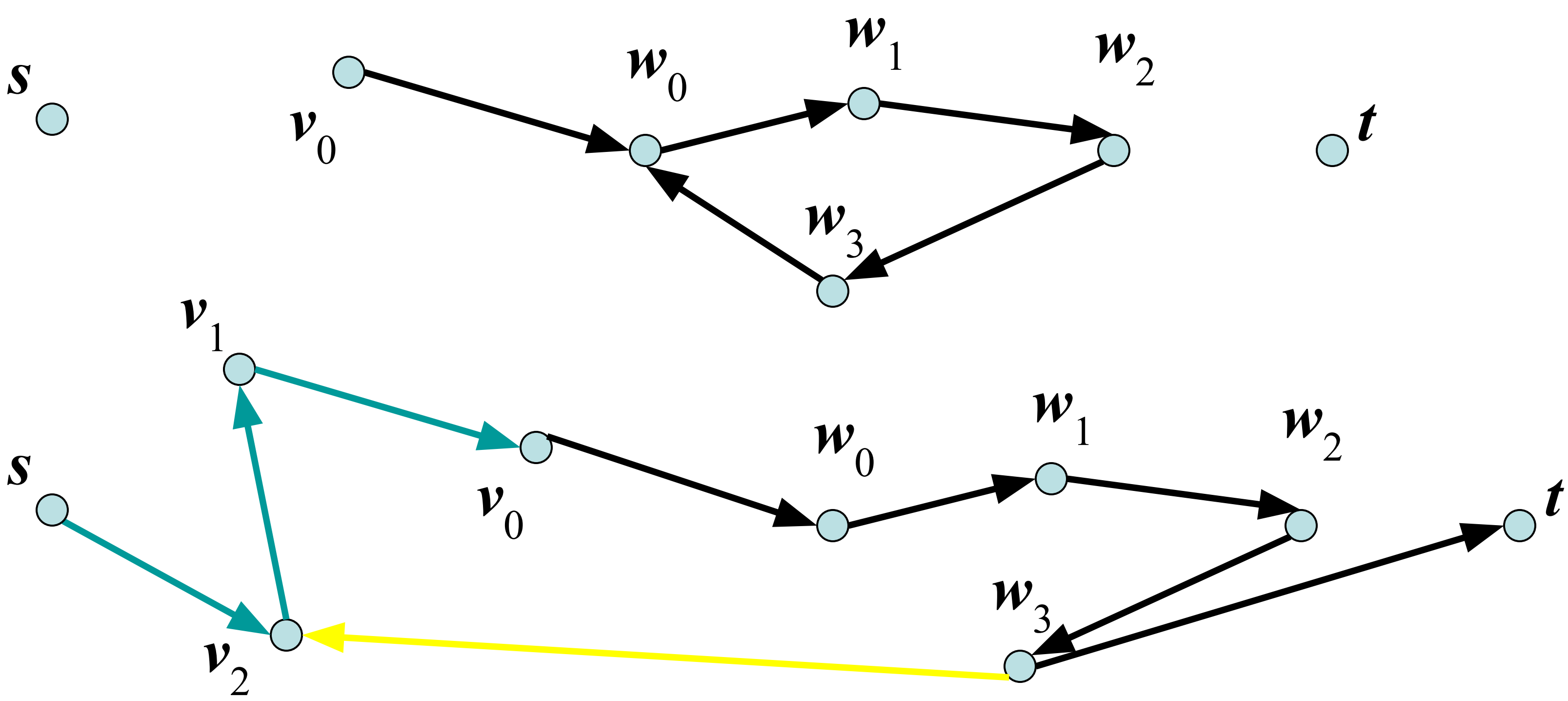
Теорема 6.7 (Фалкерсон [1962])

Пусть (G, u, s, t) — сеть и f — s-t-поток в G. Тогда существует семейство $\mathcal{P}$ s-t-путей и семейство $\mathcal{C}$ циклов в G с весами $w\colon \mathcal{P} \cup \mathcal{C} \to \mathbf{R}_+$ таких, что $f(e) = \sum_{P \in \mathcal{P} \cup \mathcal{C}:\, e \in E(P)} w(P)$ для всех $e \in E(G)$, $\sum_{P \in \mathcal{P}} w(P) = \mathrm{value}(f)$, и $|\mathcal{P}| + |\mathcal{C}| \le |E(G)|$. Более того, если f — целочисленный поток, то w может быть выбрано целочисленным.

Доказательство

- Построим $\mathcal{P}$, $\mathcal{C}$ и w индукцией по числу дуг с ненулевым потоком. Пусть $e=(v_0,w_0)$ дуга с $f(e) > 0$. Если $w_0 \neq t$, то должна быть дуга (w_0,w_1) с ненулевым потоком.
- Положим $i = 1$. Если $w_0 \in \{t,v_0,w_0,\ldots, w_{i-1}\}$, то STOP. Иначе $i = i + 1$ и продолжаем.
- Если процесс завершится в t, то проделаем тоже самое в обратном направлении, стартуя с v_0.

Иллюстрация доказательства



Доказательство

- Пусть P будет цикл или путь, найденный в результате описанной процедуры.
- $w(P) = \min_{e \in E(P)} f(e)$
- Положим $f'(e) = f(e) - w(P)$ для $e \in E(P)$ и $f'(e) = f(e)$ для $e \notin E(P)$.
- По крайней мере, одна дуга обнулилась и добавился ровно один путь или цикл.
- Величина потока вдоль дуг из P уменьшилась на величину $w(P)$.
- Если P цикл, то величина s-t-потока не изменилась.
- Если P путь, то величина s-t-потока уменьшилась на $w(P)$.

Теорема о Декомпозиции Потока

Теорема 6.7 (Фалкерсон [1962])

Пусть (G, u, s, t) — сеть и f — s-t-поток в G. Тогда существует семейство $\mathcal{P}$ s-t-путей и семейство $\mathcal{C}$ циклов в G с весами $w\colon \mathcal{P} \cup \mathcal{C} \to \mathbf{R}_+$ таких, что $f(e) = \Sigma_{P \in \mathcal{P} \cup \mathcal{C}:\, e \in E(P)} w(P)$ для всех $e \in E(G)$, $\Sigma_{P \in \mathcal{P}} w(P) = \mathrm{value}(f)$, и $|\mathcal{P}| + |\mathcal{C}| \le |E(G)|$. Более того, если f — целочисленный поток, то w может быть выбрано целочисленным.

Упражнение 6.2

- Доказать следующую теорему

Теорема (Хоффман 1960)

Задан орграф G и нижние и верхние оценки на пропускные способности дуг $l, u\colon E(G) \to \mathbf{R}_+$ с $l(e) \le u(e)$ для всех $e \in E(G)$. В орграфе G существует циркуляция f с $l(e) \le f(e) \le u(e)$ для всех $e \in E(G)$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{e\in\delta^-(X)} l(e) \le \sum_{e\in\delta^+(X)} u(e), \qquad \forall X \subseteq V(G).$$