Моделирование

§ 9. Модели и моделирование
§ 10. Математическое моделирование
§ 11. Множества
§ 12. Табличные модели. Диаграммы
§ 13. Списки и деревья
§ 14. Графы
§ 15. Игровые стратегии

© К.Ю. Поляков, Е.А. Ерёмин, 2017 http://kpolyakov.spb.ru

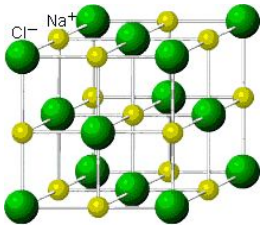
Моделирование

§ 9. Модели и моделирование

© К.Ю. Поляков, Е.А. Ерёмин, 2017

Что такое модель?

модели чего?



автомобиль | Земля | кристаллическая решётка | корабль | дом

! Моделей без оригинала не существует!

оригиналы

Оригиналы:

- **объекты** (самолет, дом, ядро атома, галактика)
- **процессы** (изменение климата, развитие экономики)
- **явления** природы (землетрясения, цунами)

Что такое модель?

Зачем нужны модели?

Нужно решить **задачу**, связанную с оригиналом, но:

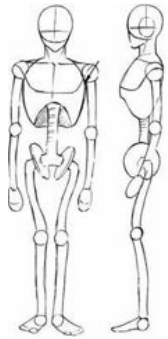
- оригинал **не существует**
  - древний Египет
  - последствия ядерной войны (Н.Н. Моисеев, 1966)
- исследование оригинала **дорого** или **опасно**
  - управление ядерным реактором (Чернобыль, 1986)
  - испытание нового скафандра для космонавтов
  - разработка нового самолета или корабля
- оригинал **сложно** исследовать
  - Солнечная система, галактика (большие размеры)
  - атом, нейтрон (маленькие размеры)
  - процессы в двигателе внутреннего сгорания (очень быстрые)
  - геологические явления (очень медленные)
- интересуют только **отдельные свойства**
  - проверка краски для фюзеляжа самолета

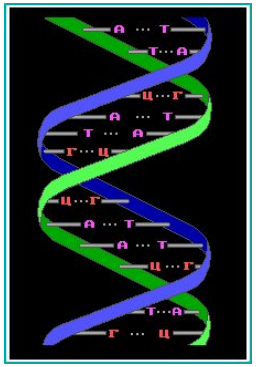
Модели и оригиналы

оригинал

задача

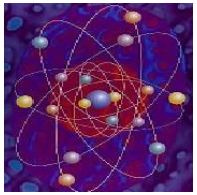
→ модель





модели человека

материальная точка



Модели и моделирование

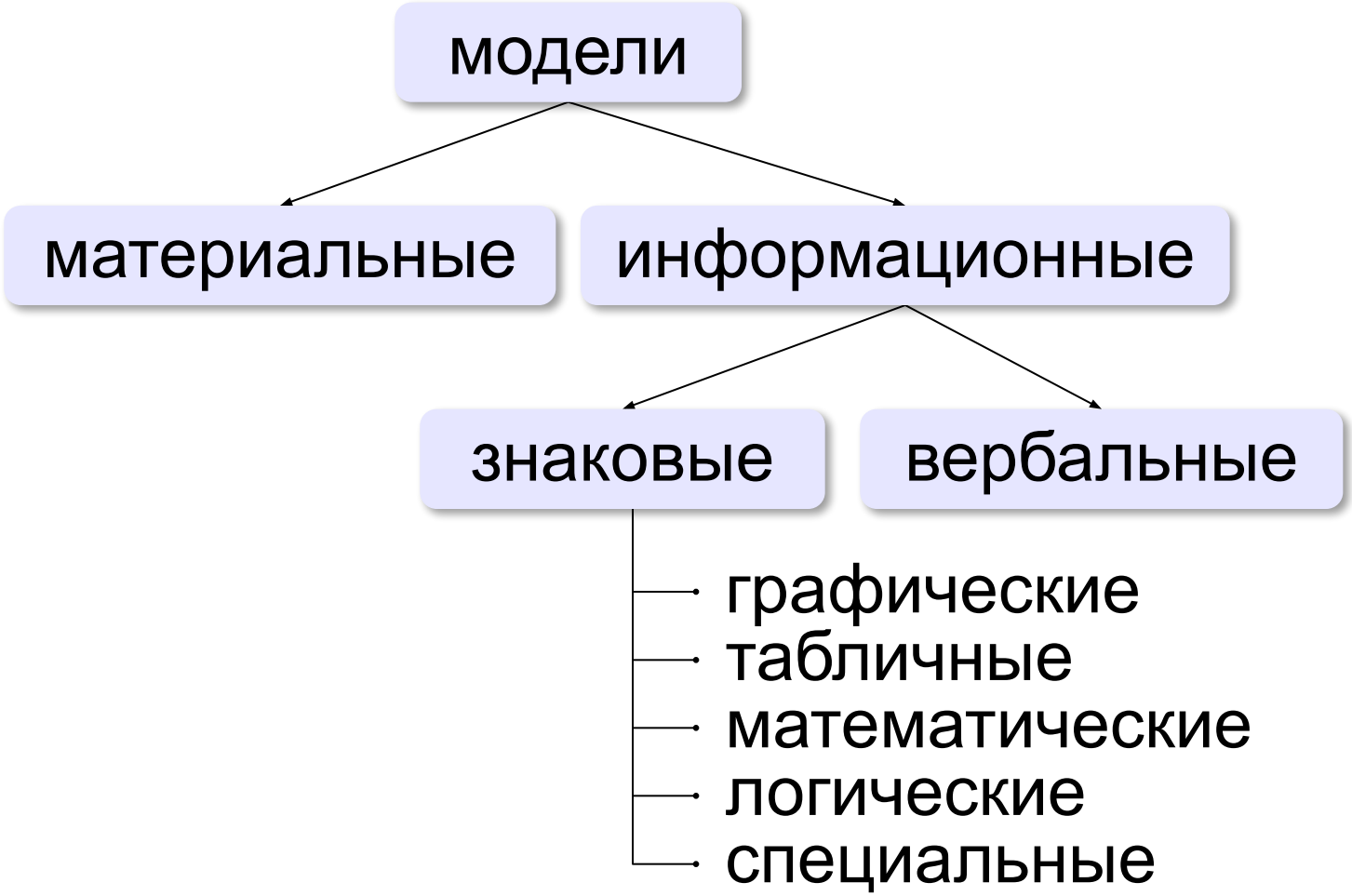
Модель – это объект, который обладает существенными свойствами другого объекта, процесса или явления (*оригинала*) и используется вместо него.

Моделирование – это создание и исследование моделей с целью изучения оригиналов.

Задачи моделирования:

- **исследование** оригинала
- **анализ** («что будет, если …»)
- **синтез** («как сделать, чтобы …»)
- **оптимизация** («как сделать лучше всего …»)

Виды моделей (по природе)



Виды моделей (по фактору времени)

- **статические** – описывают оригинал в заданный момент времени
  - силы, действующие на тело в состоянии покоя
  - результаты осмотра врача
  - фотография
  - …
- **динамические**
  - модель движения тела
  - явления природы (молния, землетрясение, цунами)
  - история болезни
  - видеозапись события
  - …

Виды моделей (по характеру связей)

- **детерминированные** – при одинаковых исходных данных всегда получается тот же результат
  - расчёт по формулам
  - движение корабля на спокойной воде
  - …
- **вероятностные** – учитывают случайность событий
  - броуновское движение частиц
  - полета самолёта с учетом ветра
  - движения корабля на волнении
  - поведение человека
  - …

Имитационные модели

- нельзя заранее вычислить или предсказать поведение системы, но можно имитировать её реакцию на внешние воздействия
- максимальный учет всех факторов
- только численные результаты

Задача – найти лучшее решение **методом проб и ошибок** (многократные эксперименты)!

Примеры:

- испытания лекарств на мышах, обезьянах, …
- математическое моделирование биологических систем
- модели систем массового обслуживания
- модели процесса обучения
- кросс-программирование
- …

Игровые модели

Игровые модели учитывают действия **противников**.

- экономические ситуации
- военные действия
- спортивные игры
- тренинги персонала

Задача – найти **лучший вариант действий в самом худшем случае**!

Адекватность

Адекватность – это совпадение существенных свойств модели и оригинала в данной задаче.

- результаты моделирования согласуются с выводами **теории** (законы сохранения и т.п.)
- подтверждаются **экспериментом**

X – моделирование
X^* - эксперимент

относительная ошибка $\delta X = \frac{|X - X_*|}{X_*} \cdot 100\% < 10\%$

! Адекватность модели можно доказать только экспериментом!

Модель всегда отличается от оригинала

↓

! Любая модель адекватна только при определенных условиях!

Пересчёт «модель-оригинал»

? Сколько на местности?

$$7{,}6 \text{ см} \cdot \frac{500000}{100} = 38 \text{ км}$$

$$\frac{500000}{1000}$$

В более сложных случаях используют **теорию подобия**.

Моделирование

§ 10. Математическое моделирование

I. Постановка задачи

Хорошо поставленная задача:

- описаны все связи между исходными данными и результатом
- известны все исходные данные
- решение существует
- задача имеет единственное решение

Примеры плохо поставленных задач:

- Уроки в школе начинаются в 8^{30}. В 10^{00} к школе подъехал красный автомобиль. Определите, когда Шурик выйдет играть в футбол?
- Мальчик Вася в синей кепке бросает белый мяч со скоростью 12 м/с. Когда мяч впервые ударится о землю?
- Решить уравнение $\sin x = 4$ (нет решений).
- Найти функцию, которая проходит через точки (0,1) и (1,0) (бесконечно много решений).

I. Постановка задачи

Мальчик Вася в синей кепке бросает белый мяч со скоростью 12 м/с. Когда мяч впервые ударится о землю?

Хорошо поставлена?

Допущения:

- Вася бросает мяч вертикально вверх.
- В момент броска мяч находится на высоте 1,5 м.

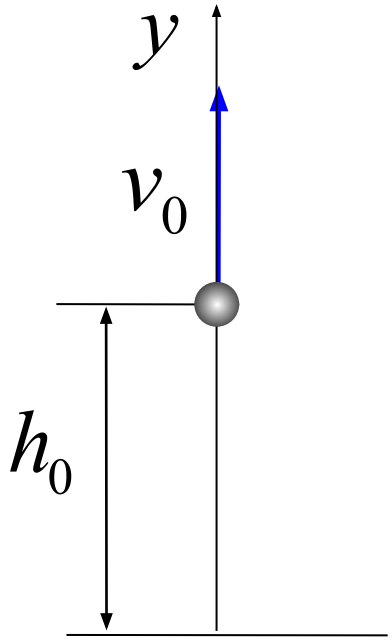
Всегда ли есть решение?

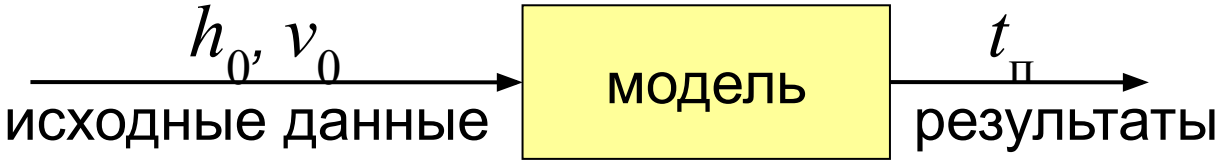
Решение единственно?

II. Разработка математической модели

1) выделить **существенные** исходные данные:
   - начальная скорость 12 м/с
   - бросок вертикально вверх
   - ускорение свободного падения 9,81 м/с^2
2) построить математическую модель

Графическая модель:





? Такой модели достаточно?

II. Разработка математической модели

Ещё **допущения**:

- мяч – материальная точка
- нет сопротивления воздуха

Формализация:

$$y = h_0 + v_0 \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2}$$

где h_0 – начальная высота
v_0 – начальная скорость
t – время

Мяч упал:

$$0 = h_0 + v_0 \cdot t_n - \frac{g \cdot t_n^2}{2}$$

Связали исходные данные и результат!

III. Тестирование модели

Тестирование – это проверка модели на простых исходных данных с известным результатом.

$$y = h_0 + v_0 \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2}$$

- при $t = 0 \Rightarrow y = h_0$ (в начальной точке)
- при $v_0 = 0 \Rightarrow$ падение вниз

? Доказывает ли успешное тестирование правильность модели?

IV. Построение компьютерной модели

$$0 = h_0 + v_0 \cdot t_n - \frac{g \cdot t_n^2}{2}$$

? Что такое a, b, c, D?

```
алг Полёт
нач
  вещ h0=1.5, v0=12, g=9.81
  вещ a, b, c, D, t1, t2
  a:= -g/2
  b:= v0
  c:= h0
  D:= b*b - 4*a*c
  t1:= (-b+sqrt(D))/(2*a)
  t2:= (-b-sqrt(D))/(2*a)
  вывод t1, нс, t2
кон
```

IV. Построение компьютерной модели

$$0 = h_0 + v_0 \cdot t_n - \frac{g \cdot t_n^2}{2}$$

? Что такое a, b, c, D?

```
program Polet;
var h0, v0, g: real;
    a, b, c, D, t1, t2: real;
begin
  h0:= 1.5; v0:= 12; g:= 9.81;
  a:= -g/2; b:= v0; c:= h0;
  D:= b*b - 4*a*c;
  t1:= (-b+sqrt(D))/(2*a);
  t2:= (-b-sqrt(D))/(2*a);
  writeln(t1);
  writeln(t2);
end.
```

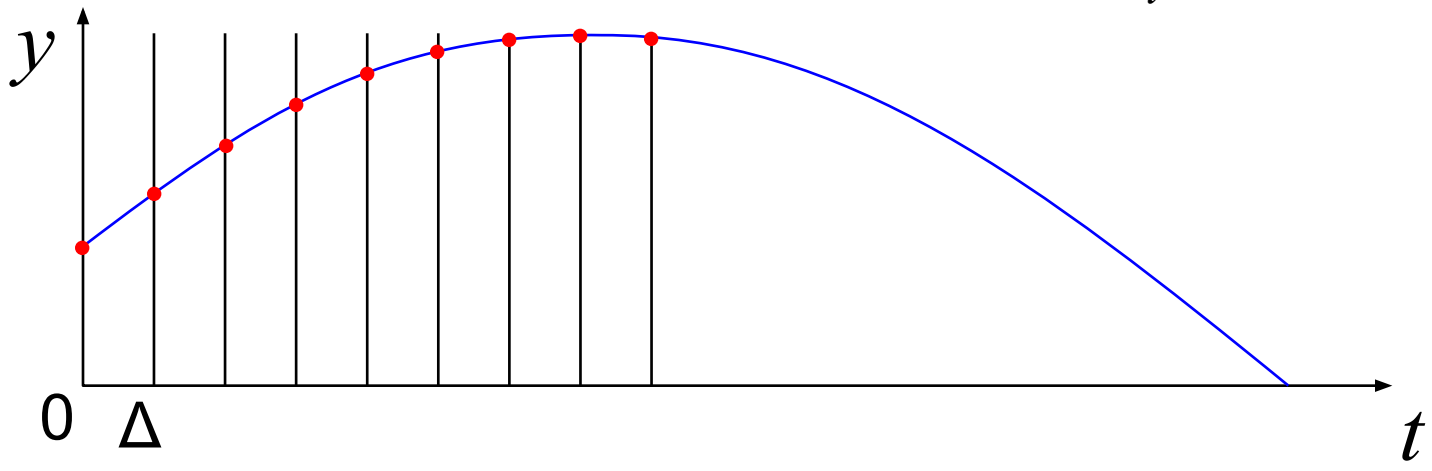
Компьютерная имитационная модель

если нельзя просто решить уравнение…

интервал дискретизации

Дискретизация задачи:

моменты времени: 0, Δt, $2\Delta t$, $3\Delta t$, …, $t_i = i \cdot \Delta t$



Рассматриваем $[t_i, t_{i+1}]$

Знаем y_i и v_i при $t = t_i$ ⇒ получить y_{i+1} и v_{i+1} при $t = t_{i+1}$

! Считаем, что скорость меняется скачком!

$$y_{i+1} = y_i + v_i \cdot \Delta t$$
$$v_{i+1} = v_i - g \cdot \Delta t$$

Компьютерная имитационная модель

```
алг Полёт-2
нач
  вещ h0=1.5, v0=12, g=9.81
  вещ y, v, t, dt=0.01
  y:= h0; v:= v0; t:= 0
  нц пока y >= 0
    y:= y + v*dt
    v:= v - g*dt
    t:= t + dt
  кц
  вывод t
кон
```

? Что такое y, v, t, dt?

Компьютерная имитационная модель

```
program Polet_2;
var h0, v0, g: real;
    y, v, t, dt: real;
begin
  h0:= 1.5; v0:= 12; g:= 9.81;
  dt:= 0.01;
  y:= h0; v:= v0; t:= 0;
  while y>=0 do begin
    y:= y + v*dt;
    v:= v - g*dt;
    t:= t + dt;
  end;
  writeln(t);
end.
```

? Что такое y, v, t, dt?

V. Эксперимент с моделью

Эксперимент – это исследование модели при тех исходных данных, которые нас интересуют (результат заранее неизвестен).

Можно ли верить результатам?

VI. Анализ результатов

Необходима проверка на оригинале!

Возможные выводы:

- задача решена, модель адекватна
- необходимо изменить алгоритм или условия моделирования
- необходимо изменить модель (учесть дополнительные свойства)
- необходимо изменить постановку задачи

Моделирование

§ 11. Множества

© К.Ю. Поляков, Е.А. Ерёмин, 2017 http://kpolyakov.spb.ru

Что такое множество?

Множество – некоторый набор элементов, каждый из которых отличается от остальных.

пустое множество: $\varnothing$

конечное число элементов: буквы русского алфавита

бесконечное число элементов: натуральные числа

Как задать множество?

- перечислением элементов

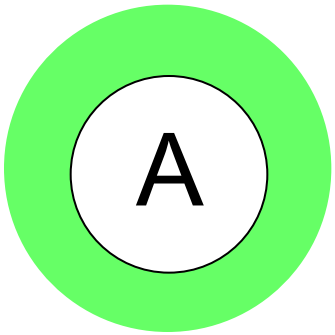
{Вася, Петя, Коля}

- логическим выражением:

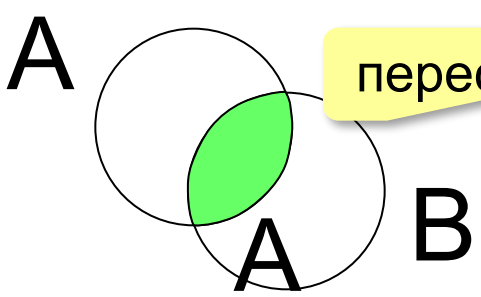
$$\{x: x > 0\}$$

Изображение множеств

Диаграммы Эйлера-Венна

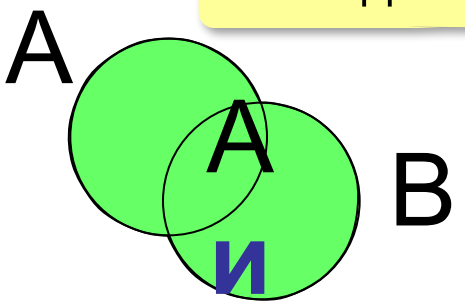


$\overline{A}$



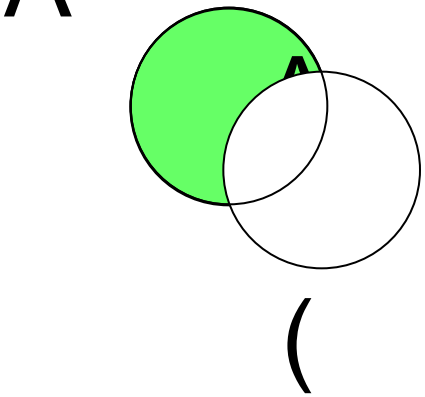
пересечение

И

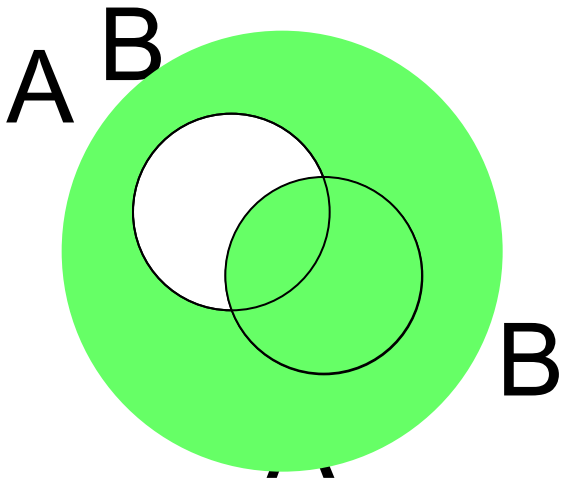


объединение

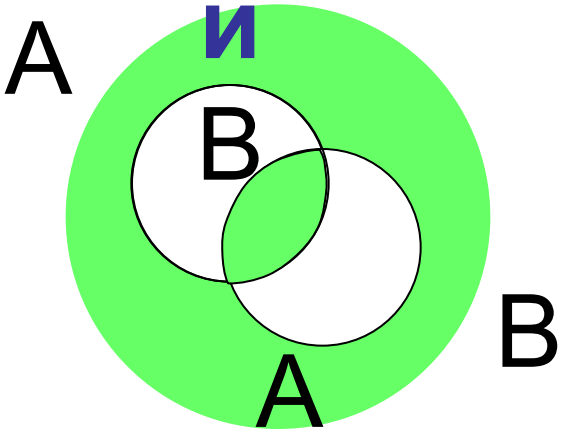
ИЛИ



(**НЕ**



И



ИЛИ

$\equiv$

B

Количество элементов множеств

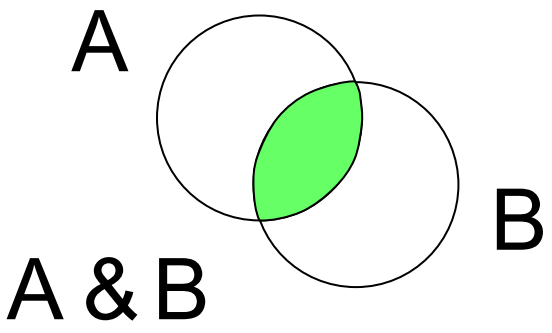
Поисковые запросы в Интернете:

& = **и** (and) | = **или** (or)

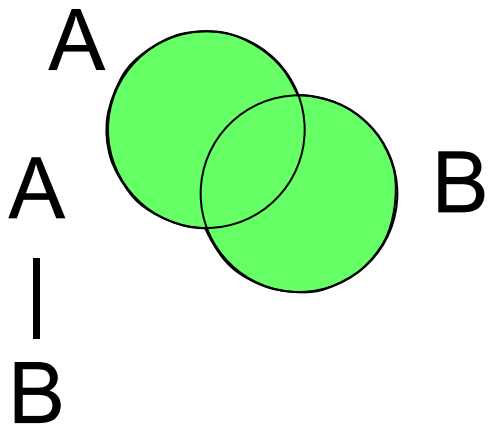
N_A – количество элементов множества A

? Что больше?

$N_A \overset{?}{\geq} N_{A\,\&\,B}$



$N_A \overset{?}{\leq} N_{A\,|\,B}$



! **&** всегда сужает область, **|** - расширяет!

Задачи

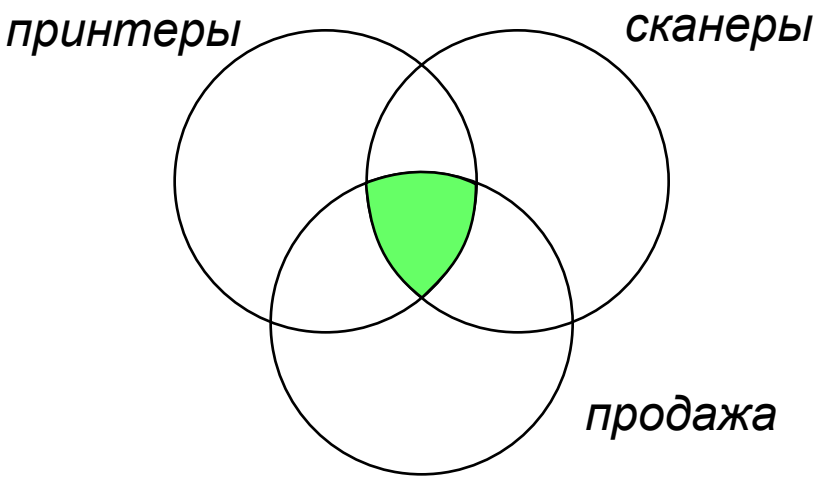
В таблице приведены запросы к поисковому серверу. Расположите номера запросов в порядке **возрастания** количества страниц, которые найдет поисковый сервер по каждому запросу.

А: **принтеры & сканеры & продажа**
Б: **принтеры | продажа**
В: **принтеры & продажа**
Г: **принтеры | сканеры | продажа**

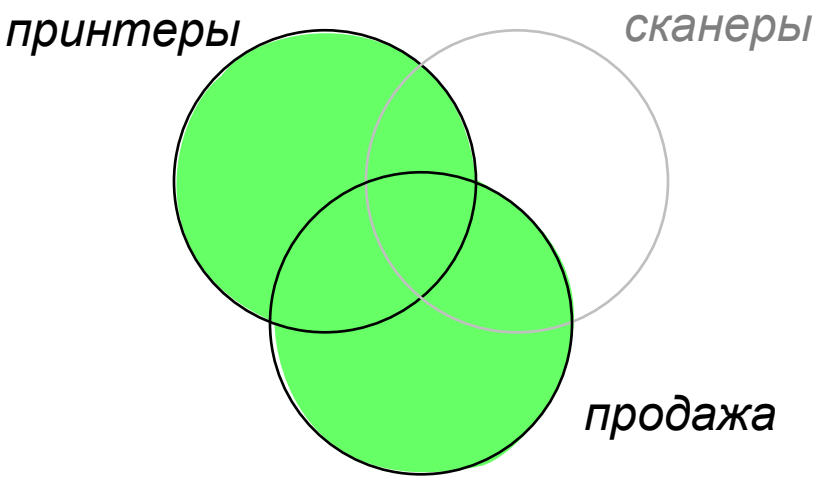
АВБГ

Использование диаграмм

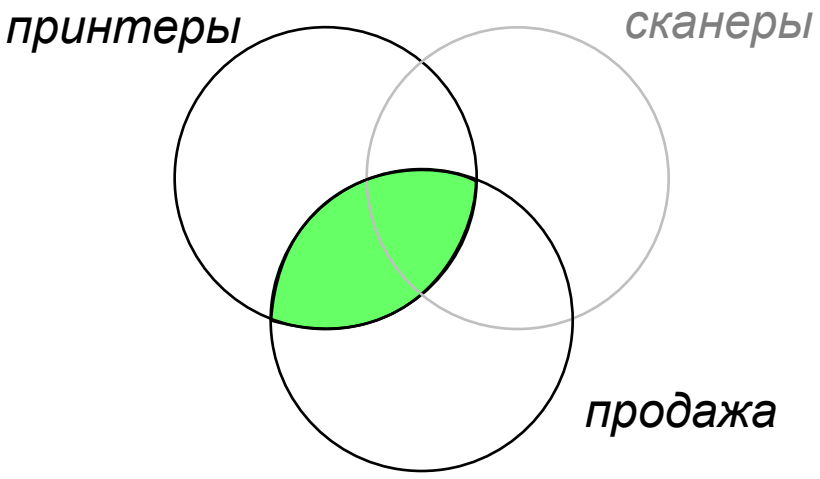
принтеры & сканеры & продажа



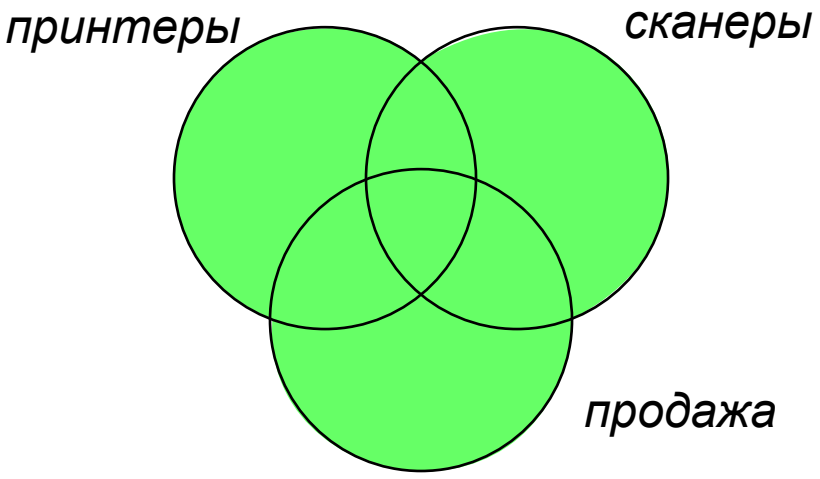
принтеры | продажа



принтеры & продажа



принтеры | сканеры | продажа



Задачи

В таблице приведены запросы к поисковому серверу. Расположите номера запросов в порядке **убывания** количества страниц, которые найдет поисковый сервер по каждому запросу.

А: **принтеры & сканеры & продажа**
Б: **(принтеры & сканеры) | продажа**
В: **(принтеры | сканеры) & продажа**
Г: **принтеры | сканеры | продажа**

ГБВА

Количество элементов множеств

Известно количество сайтов, которых находит поисковый сервер по следующим запросам :

Запрос	*Количество сай*
`огурцы`	100
`помидоры`	200
`огурцы & помидоры`	50

N_A

N_B

$N_{A\&B}$

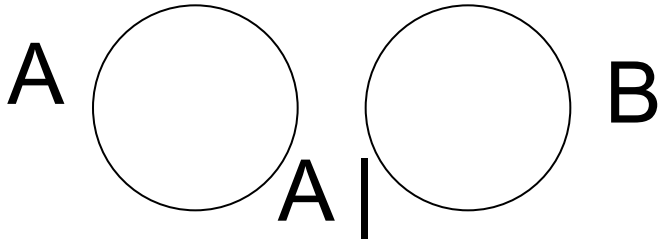
Сколько сайтов будет найдено по запросу

`огурцы | помидоры`

$N_{A|B}$

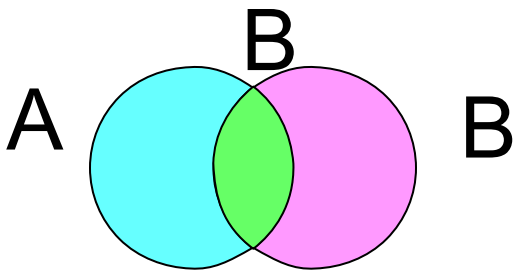
Количество элементов множеств

В общем виде:

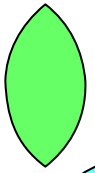


$$N_{A\&B} = 0$$

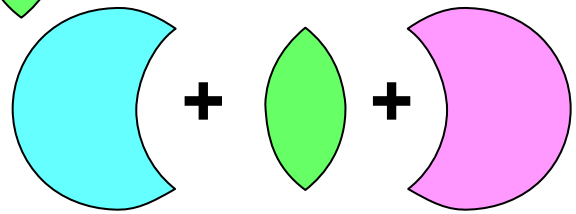
$$N_{A\,|\,B} = N_A + N_B$$



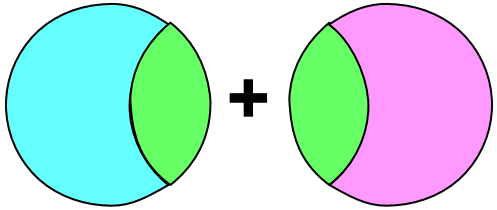
$N_{A\&B} =$



$N_{A\,|\,B} =$

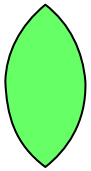


$N_A + N_B =$



$+$

$= N_{A\,|\,B} +$



$$N_{A\,|\,B} = N_A + N_B - N_{A\,\&\,B}$$

Формула включений и исключений

Задачи с тремя областями

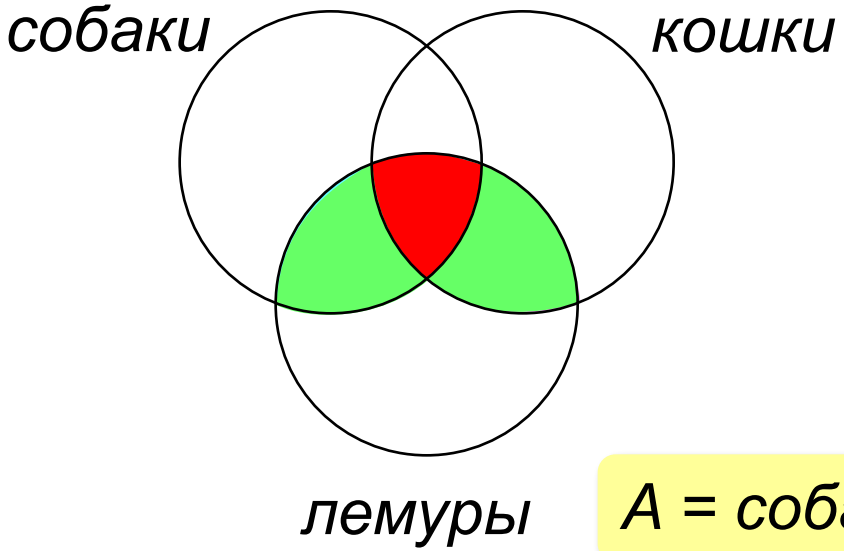
Известно количество сайтов, которых находит поисковый сервер по следующим запросам:

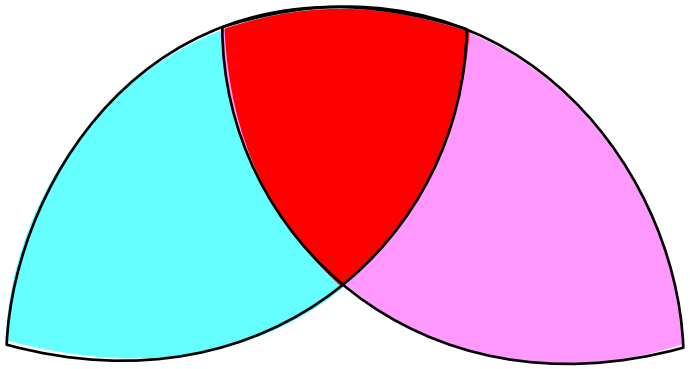
Запрос	*Количество сайтов*
`собаки & лемуры`	320
`кошки & лемуры`	280
`(кошки | собаки) & лемуры`	430

Сколько сайтов будет найдено по запросу

`собаки & кошки & лемуры`

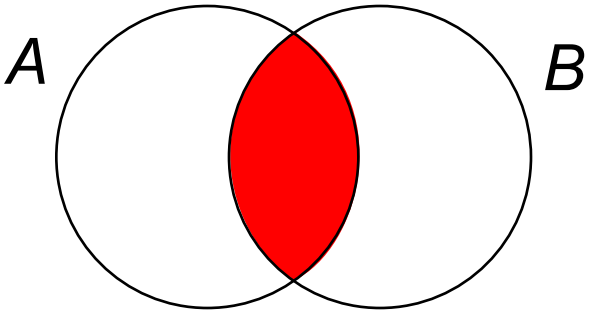
Задача с тремя областями





A = собаки & лемуры

B = кошки & лемуры



$$N_{A\&B} = N_A + N_B - N_{A|B}$$

Задачи с тремя областями

Известно количество сайтов, которых находит поисковый сервер по следующим запросам:

Запрос	*Количество сайтов*
`собаки & лемуры`	320
`кошки & лемуры`	280
`(кошки | собаки) & лемуры`	430

A

B

A | B

Сколько сайтов будет найдено по запросу A & B

`собаки & кошки & лемуры`

Общее условие с & можно отбросить !

$$N_{A|B} = N_A + N_B - N_{A\&B} = 320 + 280 - 430 = 170$$

Задачи с тремя областями

Известно количество сайтов, которых находит поисковый сервер по следующим запросам:

Запрос	*Количество сайтов*
`сканер`	200
`принтер`	250
`монитор`	450
`принтер	сканер`	450
`принтер & монитор`	40
`сканер & монитор`	50

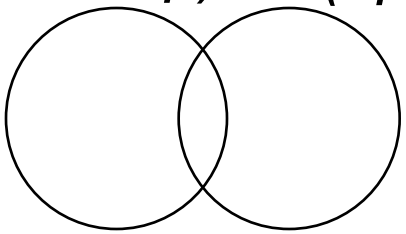
Сколько сайтов будет найдено по запросу

`(принтер | сканер) & монитор`

Обычно две области не пересекаются!

Задачи с тремя областями

A (сканер) B (принтер) **450**



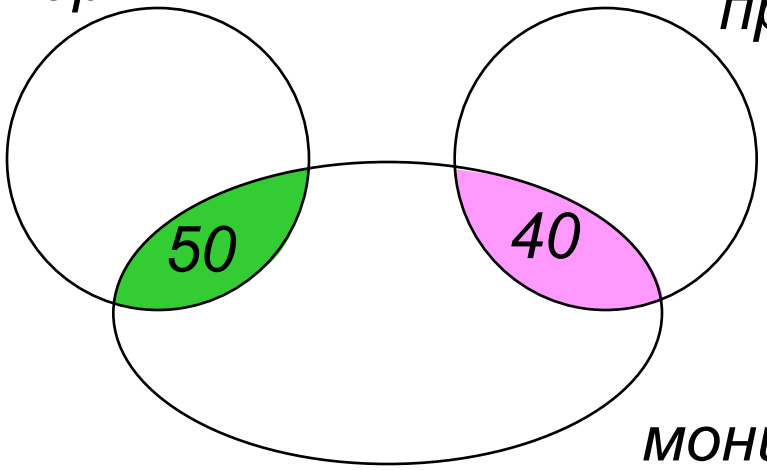
принтер | сканер

0

$$N_{A|B} = N_A + N_B - N_{A\&B}$$

сканер **200** **принтер** **250**

сканер *принтер*



монитор

принтер & монитор = 40

сканер & монитор = 50

(принтер | сканер) & монитор **40 + 50 = 90**

Моделирование

§ 12. Табличные модели. Диаграммы

Таблицы

Свойства объектов:

Фамилия	Имя	Год рождения	Место отдыха
Иванов	Кузьма	1955	о. Валаам
Кузьмин	Сидор	1978	о. Ольхон
Сидоров	Иван	1990	о. Кипр

Марка	Лада Приора	Лада Калина	ВАЗ 2110	ВАЗ 21099
Мощность двигателя, л.с.	98	89	79	70
Максимальная скорость, км/ч	183	165	165	156
Время разгона до 100 км/ч, с	11,5	12,5	14	15

Таблицы

Связи между объектами:

	Лада	УАЗ	Тойота	Форд
Москва	520	210	805	370
Санкт-Петербург	430	350	260	410
Пермь				

	Петя	Вася	Маша	Даша
Барнаул	❤		❤	
Хабаровск	❤	❤	❤	
Владивосток		❤	❤	❤
Магадан			❤	

Таблицы

Изменение свойств:

День	1	2	3	4	5	6	7
Температура, ° С	15	18	20	17	23	16	19
Давление, мм. рт. ст.	750	748	760	755	770	743	756
Скорость ветра, м/с	5	7	2	9	3	6	4

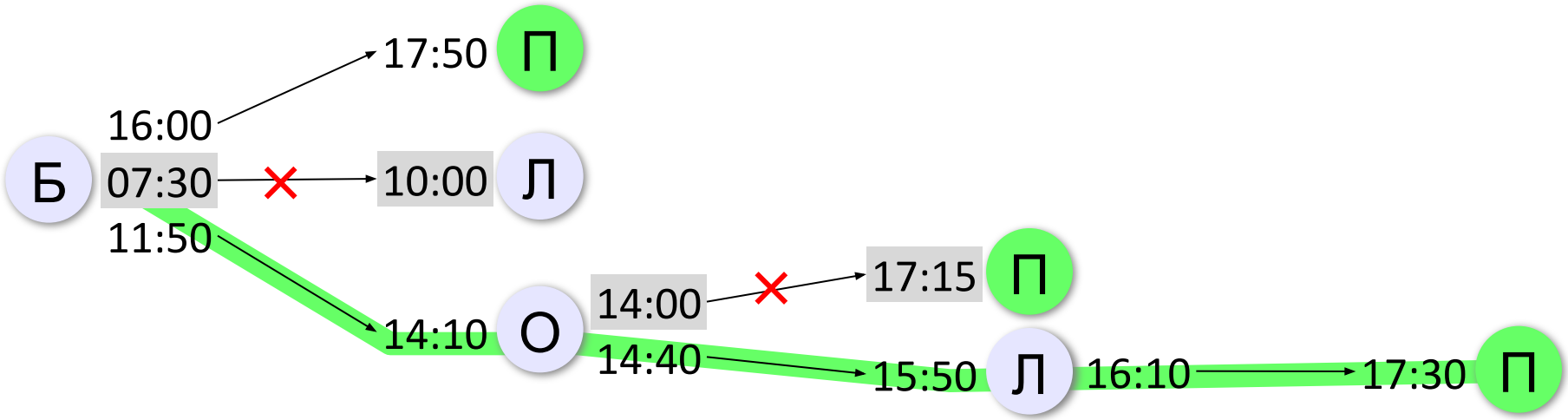
Оптимальный маршрут

Из	В	Отправл.	Прибытие
Березовое	Лесное	07:30	10:00
Березовое	Осиновое	11:50	14:10
Лесное	Березовое	12:50	15:20
Полевое	Лесное	13:20	14:40
Осиновое	Полевое	14:00	17:15
Лесное	Осиновое	14:20	15:30
Осиновое	Лесное	14:40	15:50
Березовое	Полевое	16:00	17:50
Лесное	Полевое	16:10	17:30
Полевое	Осиновое	17:40	19:55

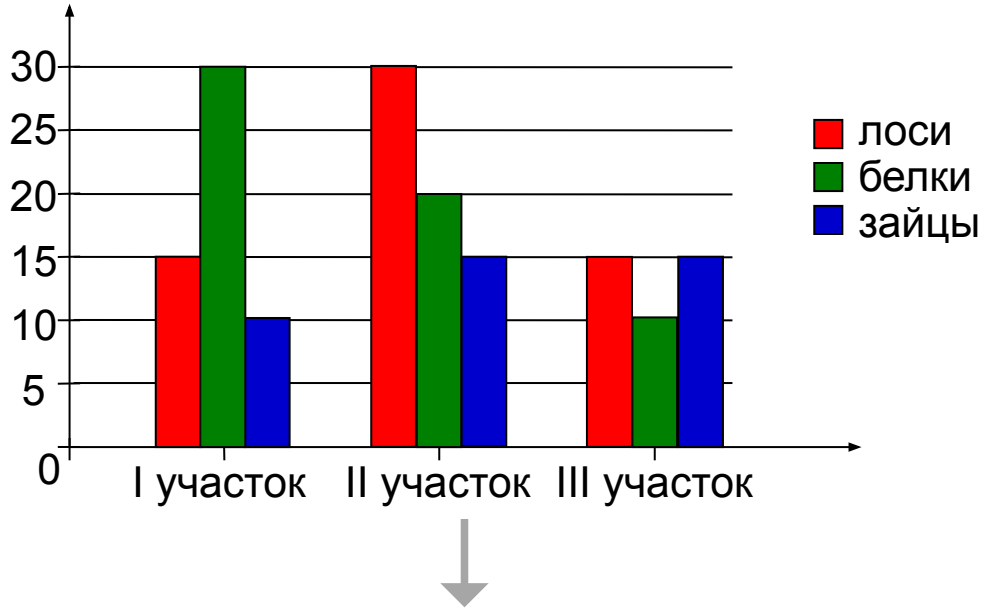
Березовое: 8:00

↓

Полевое

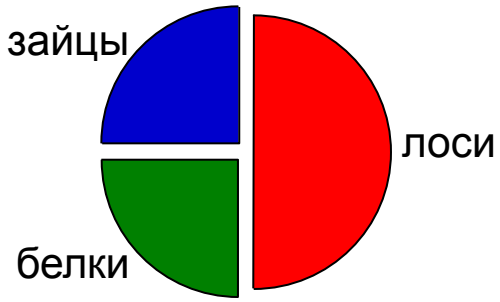


Анализ диаграмм

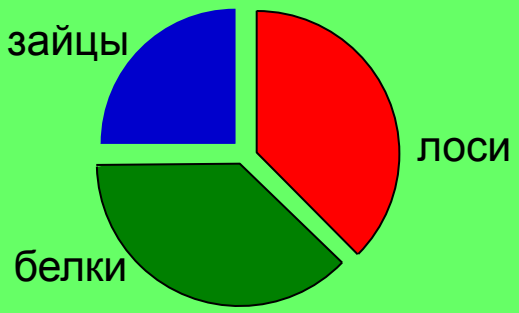


	I участок	II участок	III участок	всего
лоси	15	30	15	60
белки	30	20	10	60
зайцы	10	15	15	40
всего				160

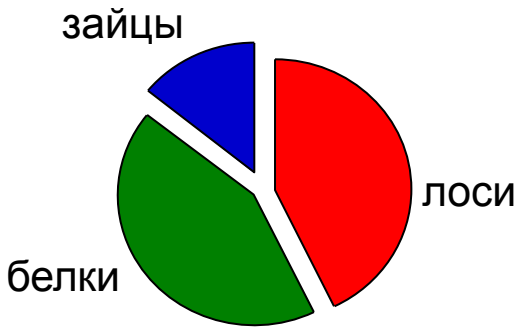
а)



б)

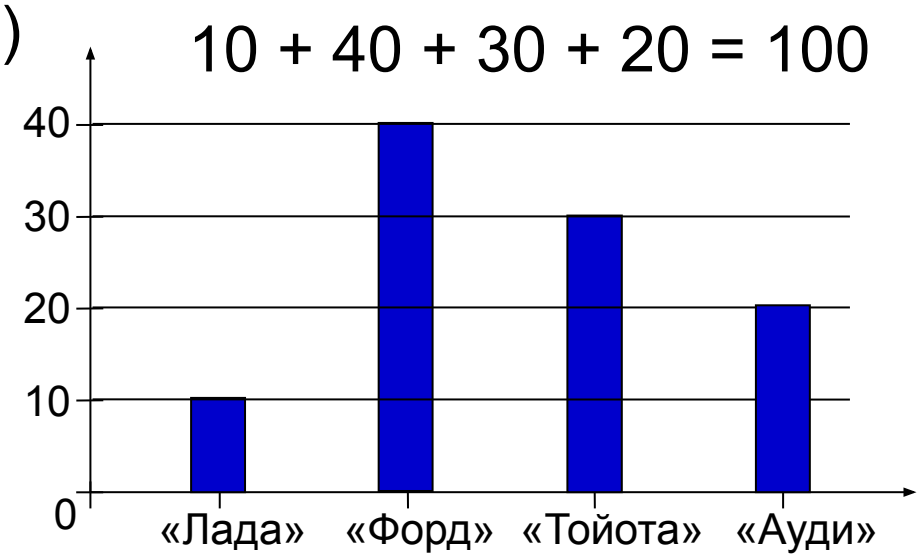


в)

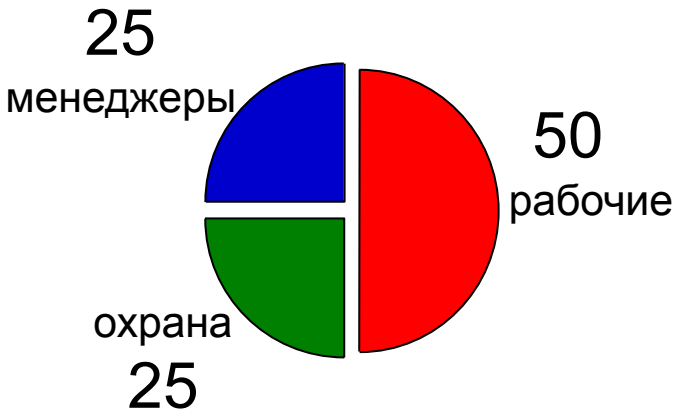


Анализ диаграмм

1)



2)



а) все «Форды» могут принадлежать менеджерам

б) все охранники могут ездить на «Ауди»

в) все «Тойоты» могут принадлежать рабочим

г) все рабочие могут ездить на «Фордах»

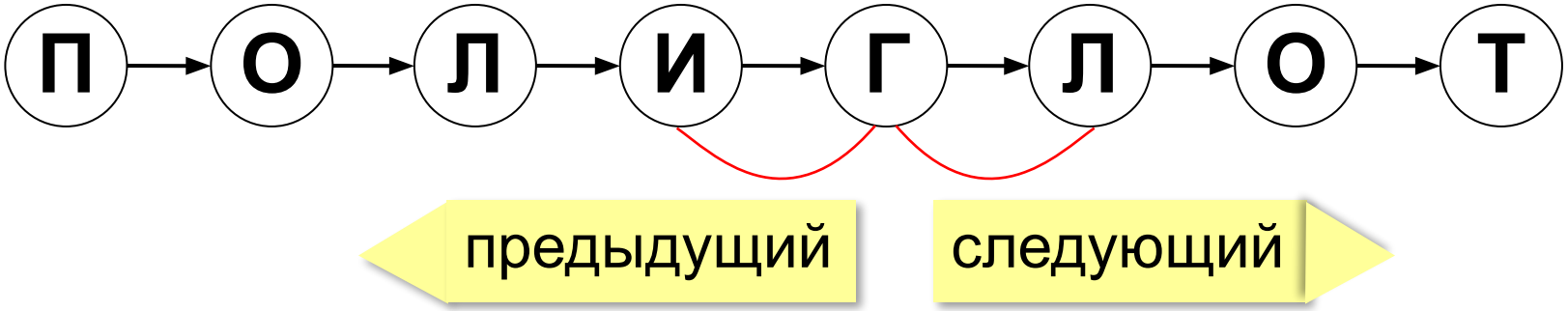
Моделирование

§ 13. Списки и деревья

© К.Ю. Поляков, Е.А. Ерёмин, 2017 http://kpolyakov.spb.ru

Что такое список?

Список – последовательность элементов, в которой важен порядок их расположения.



Список как модель:

слово = список букв, текст = список абзацев

Запись:

['Amicus', 'Socrates', 'sed', 'magis', 'amica', 'veritas']

Что это значит?

Операции со списком

- замена элемента
- удаление элемента
- вставка нового элемента

Какие операции на каждом шаге?

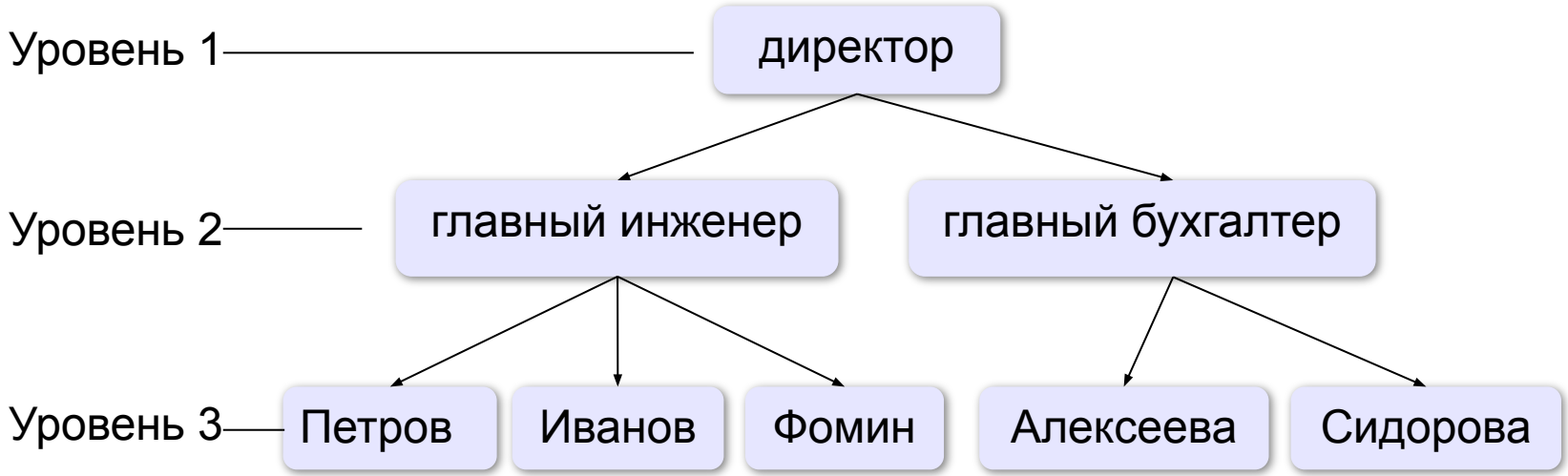
КРАН → КОАН → КОРН → КОРО → КОРОН → КОРОНА

Более короткие варианты?

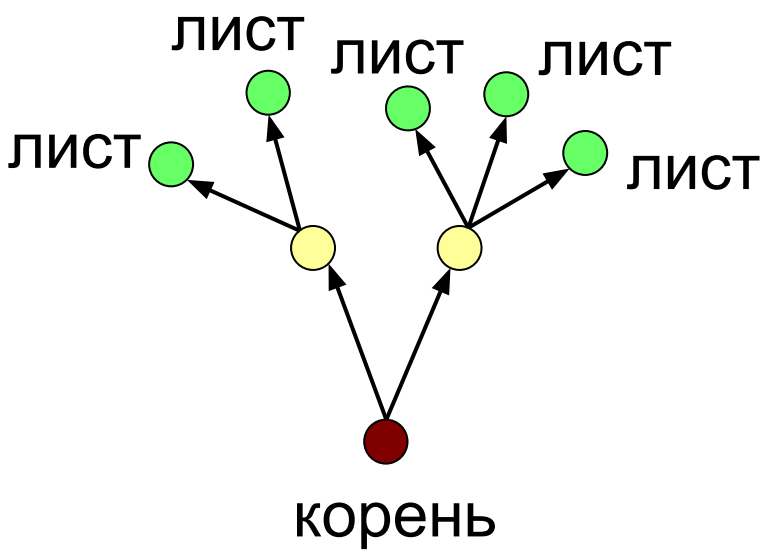
Операция	***Цена***
Замена гласной буквы на гласную или согласной на согласную.	1
Замена гласной на согласную или согласной на гласную.	2
Вставка или удаление буквы.	5

СКАНЕР → ПРИНТЕР с наименьшей стоимостью?

Что такое дерево?

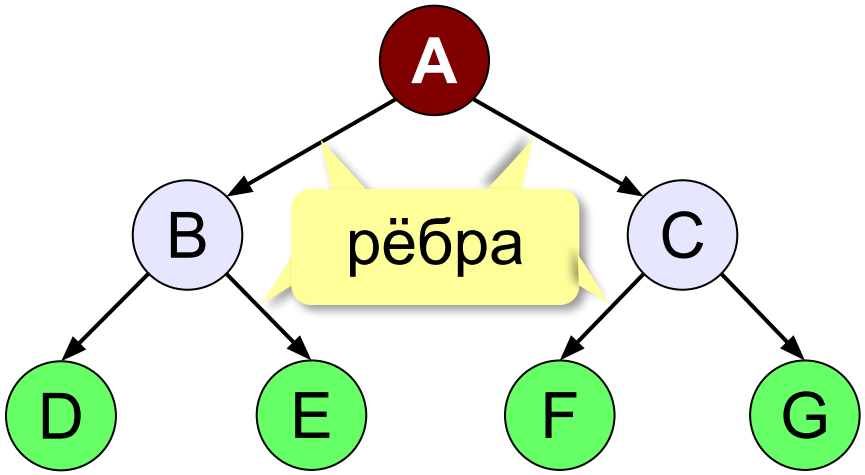


Дерево – это структура данных, которая служит моделью многоуровневой структуры (*иерархии*).



Лес – это несколько деревьев.

Из чего состоит дерево?



A – **корень**

D, E, F, G – **листья**

B, C – **промежуточные узлы**

Путь — это последовательность узлов, где каждый следующий связан с предыдущим.

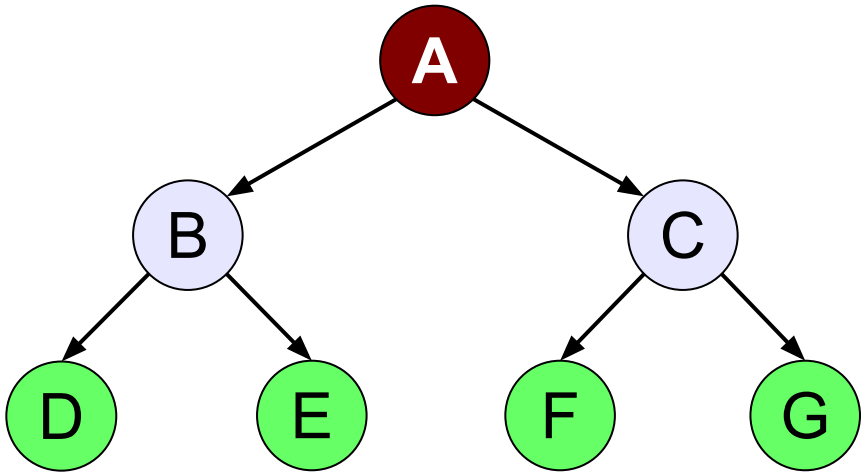
Высота дерева — это наибольшая длина пути от корня дерева к листу.

Поддерево — это часть дерева, которая тоже представляет собой дерево.

? Какие есть поддеревья?

Родители и дети

Родитель – сын: между ними есть ребро.



B – **родитель** для D и E
D и E – **сыновья** для B

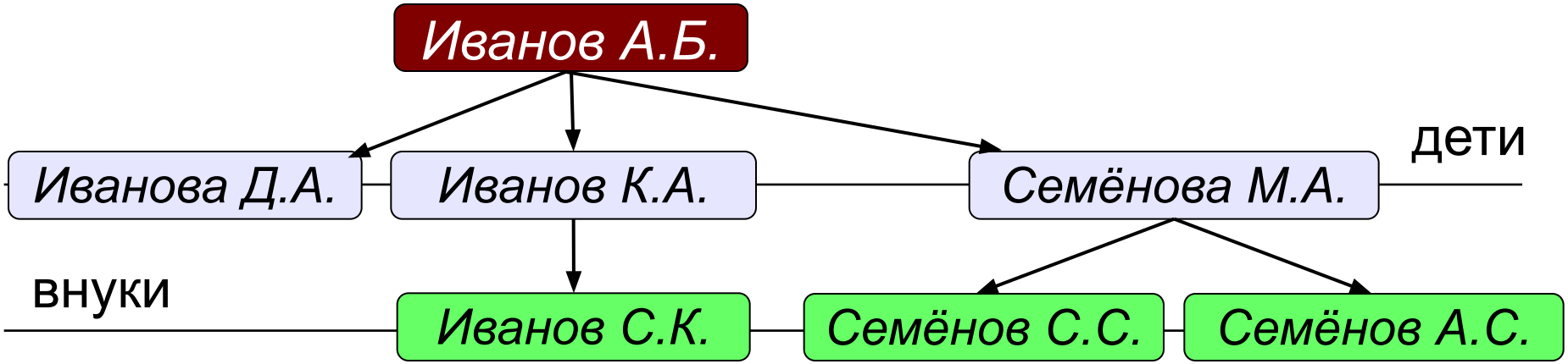
Если нет родителей?

Если нет сыновей?

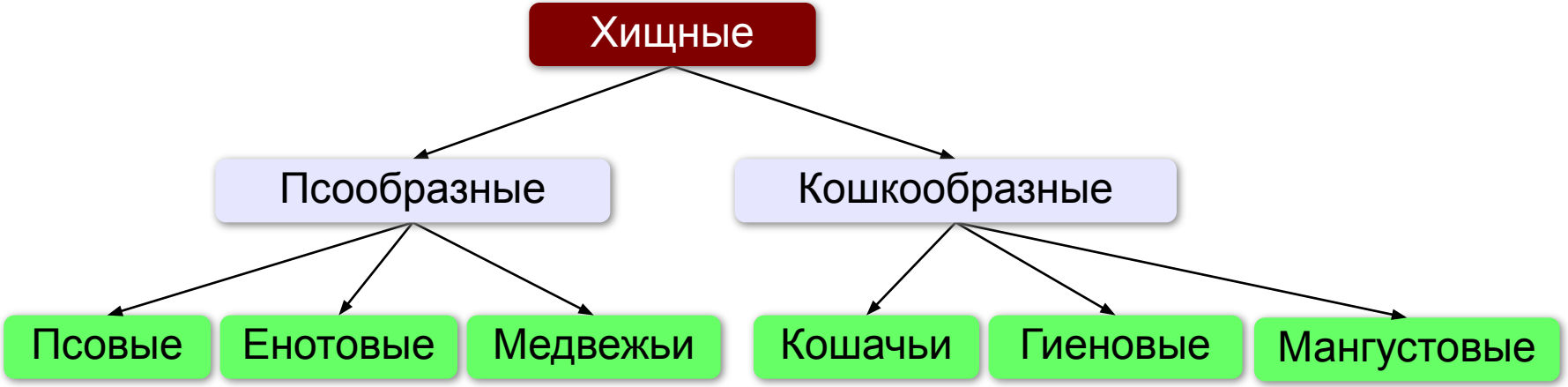
Предок – потомок: между ними есть **путь**.

A и B – **предки** для D и E
B, D и E – **потомки** для A

Генеалогическое дерево



Классификации



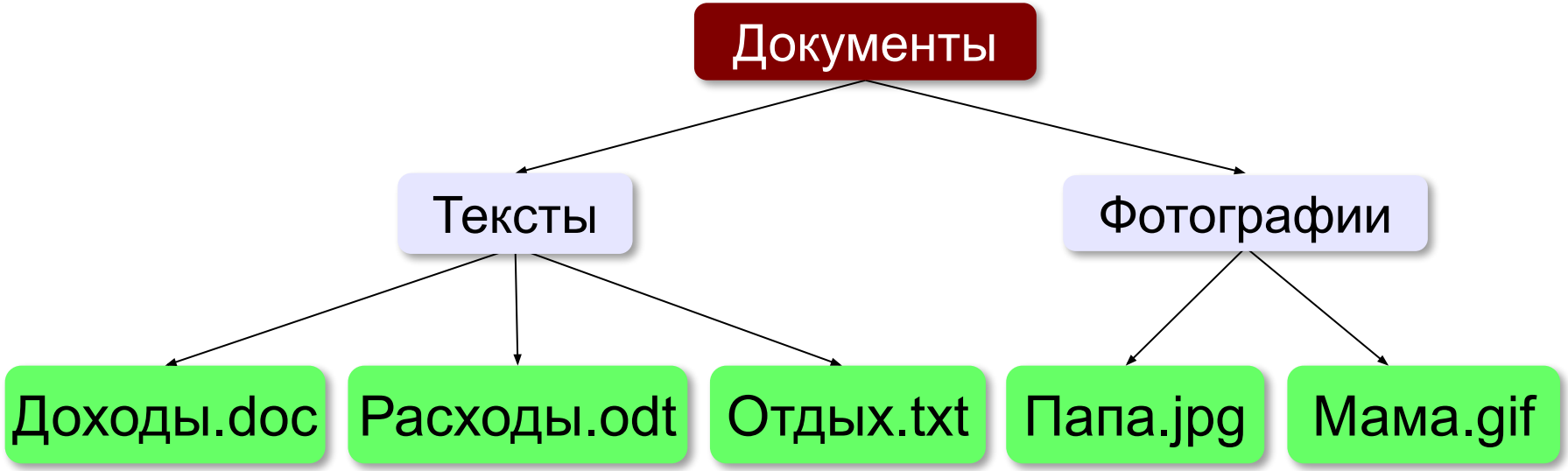
Глава 1. Псообразные

1.1. Псовые
1.2. Енотовые
1.3. Медвежьи
…

Глава 2. Кошкоообразные

2.1. Кошачьи
2.2. Гиеновые
2.3. Мангустовые

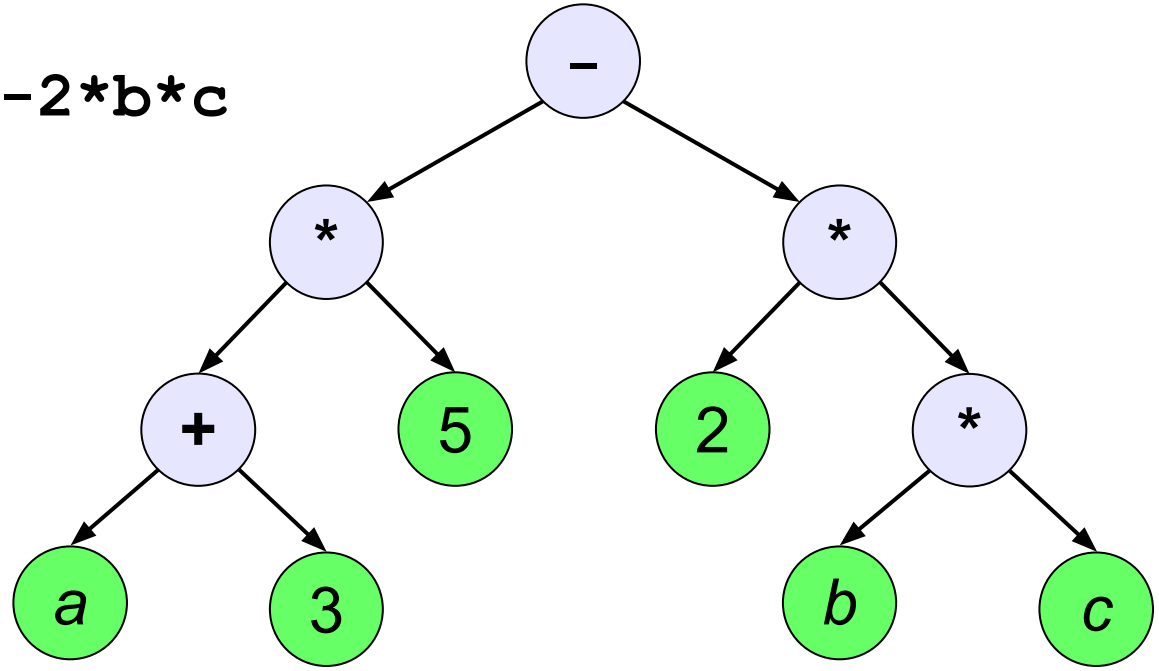
Файловая система



Документы
- **Тексты**
  - *Доходы.doc*
  - *Расходы.odt*
  - *Отдых.txt*
- **Фотографии**
  - *Папа.jpg*
  - *Мама.gif*

Арифметические выражения

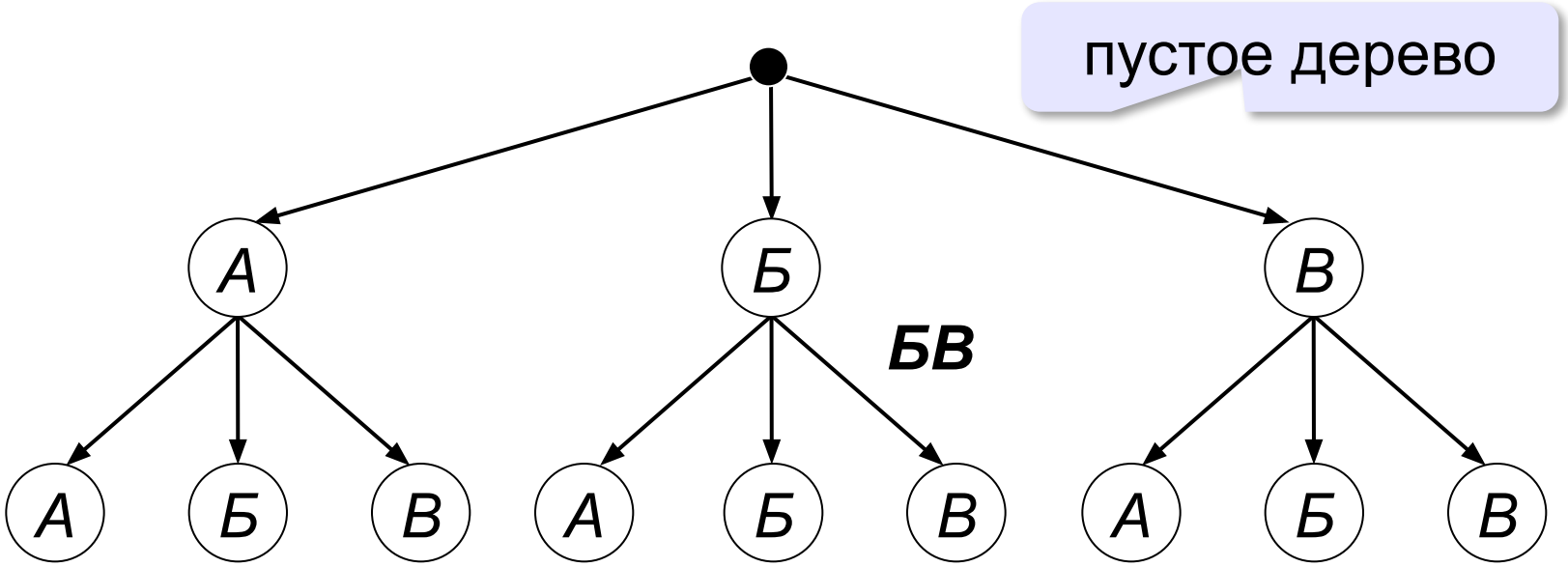
(a+3)*5-2*b*c



Двоичное (бинарное) дерево – это дерево, в котором каждый узел может иметь не более двух сыновей.

Перебор вариантов

Составить все двухбуквенные слова, которые можно записать с помощью алфавита **{A, B, C}**.



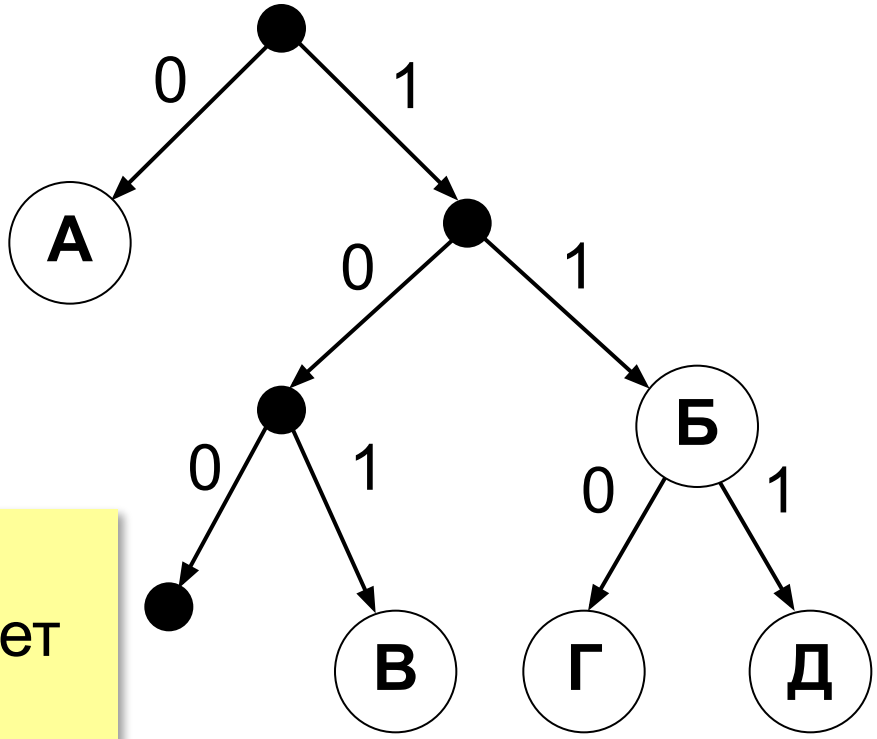
Перебор вариантов

Разведчик выяснил, что ключ к замку от сейфа состоит из трёх символов, причём могут использоваться буквы из алфавита {**A**, **B**, **C**, **D**}. *Две одинаковые буквы не могут стоять рядом. Рядом с буквой* **D** *обязательно должна стоять буква* **A**. *Если в ключе есть буква* **B**, *то там не может быть буквы* **C**.

Сколько возможных ключей?

Дерево для двоичного кода

А	Б	В	Г	Д
0	11	101	110	111



Можно однозначно декодировать?

Условие Фано: ни одно из кодовых слов не совпадет с началом другого кодового слова.

тогда однозначно декодируется!

Все буквы должны быть в листьях!

Моделирование

§ 14. Графы

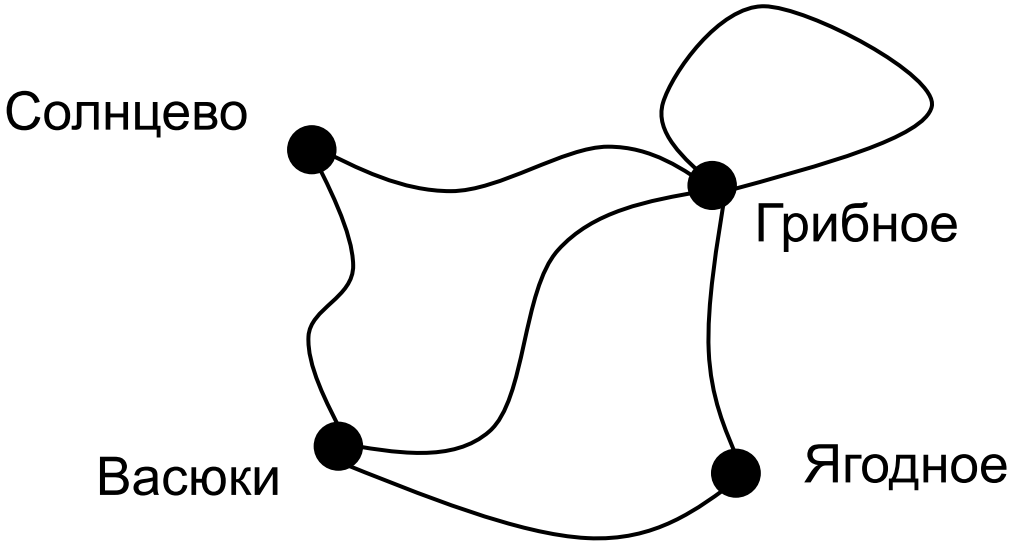
© К.Ю. Поляков, Е.А. Ерёмин, 2017

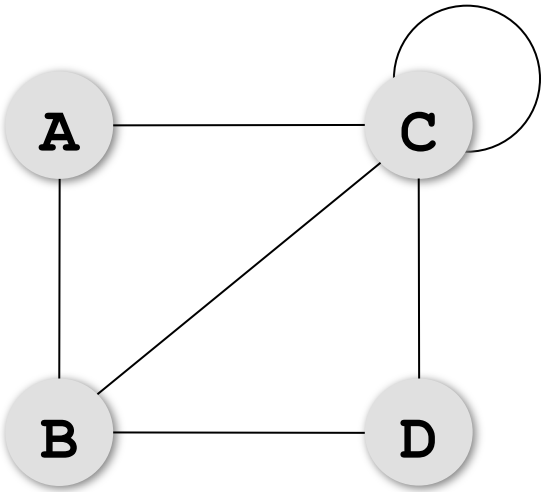
Графы

«От посёлка Васюки три дороги идут в посёлки Солнцево, Грибное и Ягодное. Между Солнцевым и Грибным и между Грибным и Ягодным также есть дороги. Кроме того, есть дорога, которая идет из Грибного в лес и возвращается обратно в Грибное».

Как структурировать?

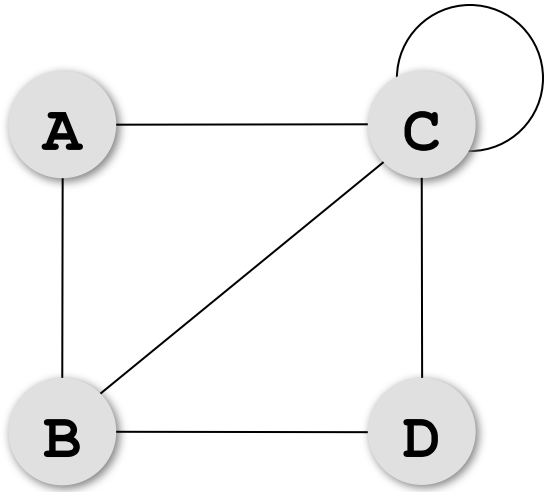
Графы





Граф – это набор вершин (узлов) и связей между ними (рёбер).

Матрица и список смежности



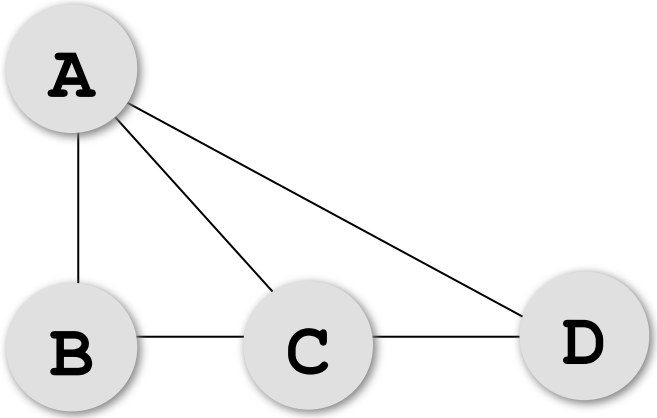
Матрица смежности

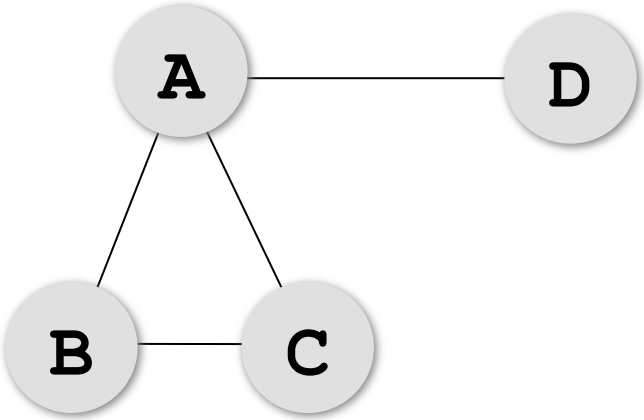
	A	B	C	D	
A	0	1	1	0	2
B	1	0	1	1	3
C	1	1	1	1	5
D	0	1	1	0	2

петля

Степень вершины – это количество связанных с ней рёбер (петля считается дважды!).

Постройте матрицу смежности

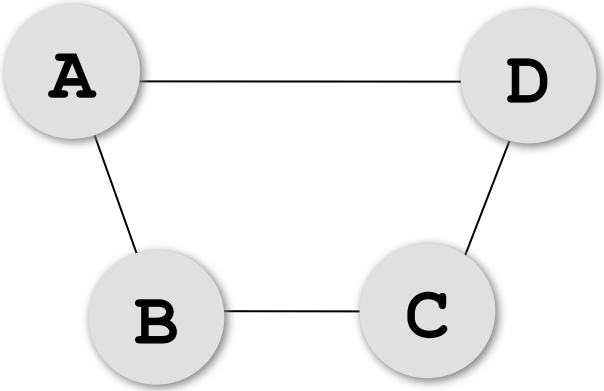


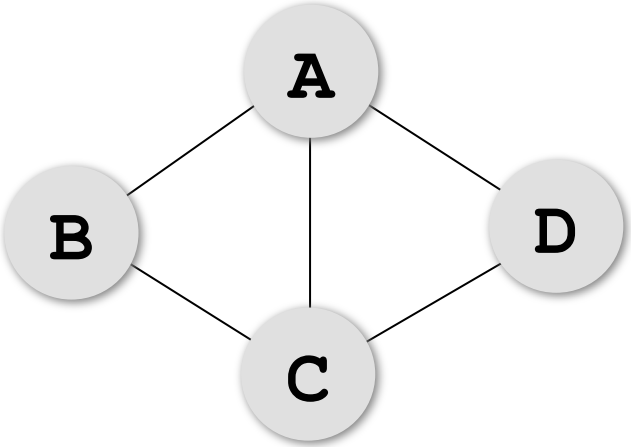


	A	B	C	D
A				
B				
C				
D				

	A	B	C	D
A				
B				
C				
D				

Постройте матрицу смежности





	A	B	C	D
A				
B				
C				
D				

	A	B	C	D
A				
B				
C				
D				

Нарисуйте граф

	A	B	C	D
A		0	1	1
B	0		1	0
C	1	1		0
D	1	0	0	

	A	B	C	D
A		1	0	1
B	1		1	0
C	0	1		1
D	1	0	1	

Нарисуйте граф

	A	B	C	D	E
A		0	1	1	0
B	0		1	0	1
C	1	1		0	1
D	1	0	0		0
E	0	1	1	0	

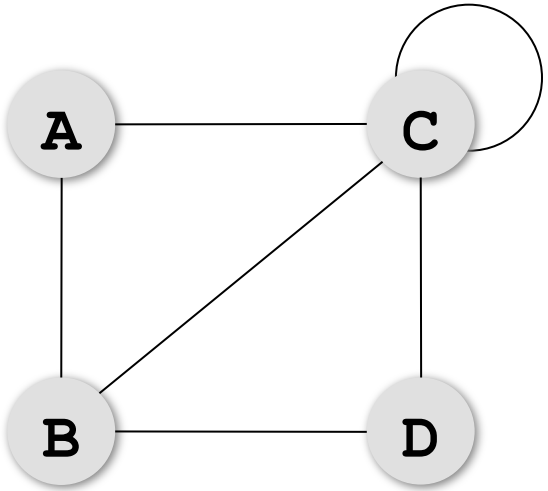
	A	B	C	D	E
A		0	1	1	1
B	0		1	0	0
C	1	1		0	1
D	1	0	0		0
E	1	0	1	0	

Нарисуйте граф

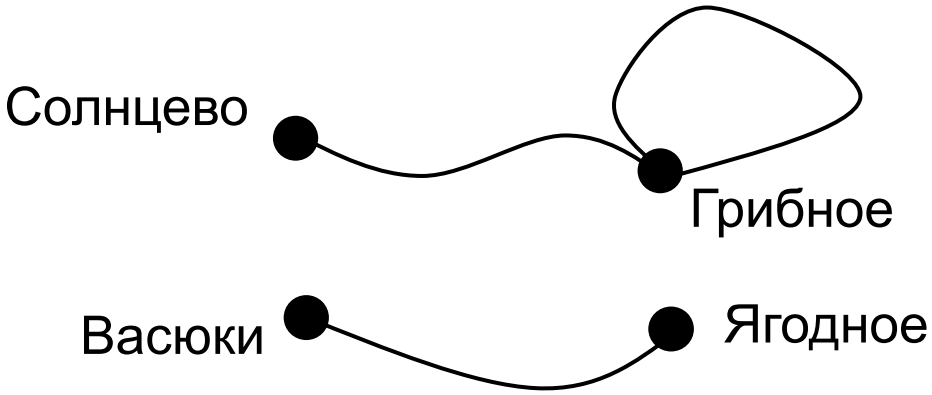
	A	B	C	D	E
A		0	1	1	1
B	0		1	0	1
C	1	1		0	1
D	1	0	0		0
E	1	1	1	0	

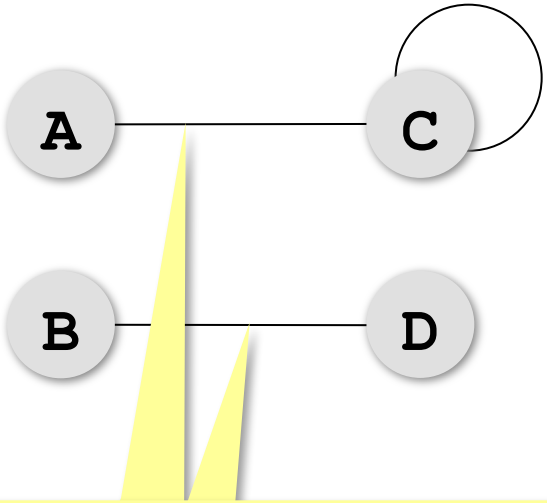
	A	B	C	D	E
A		0	0	1	0
B	0		1	0	1
C	0	1		1	1
D	1	0	1		0
E	0	1	1	0	

Связность графа



Связный граф – это граф, между любыми вершинами которого существует путь.

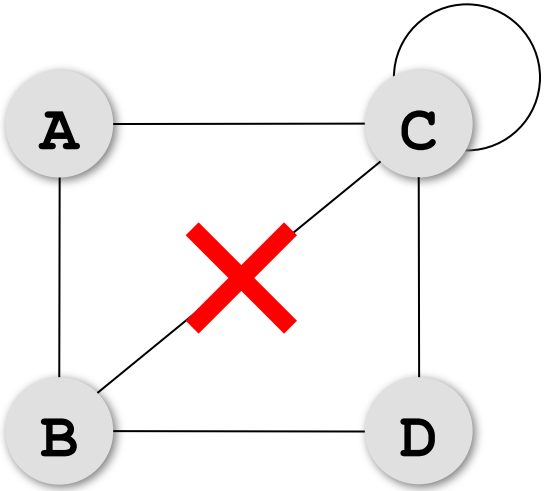




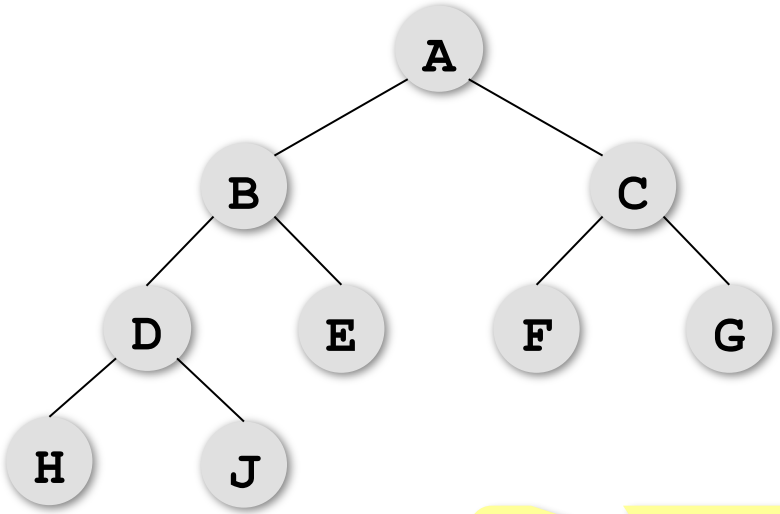
компоненты связности

Дерево – это граф?

Дерево – это связный граф без циклов (замкнутых путей).

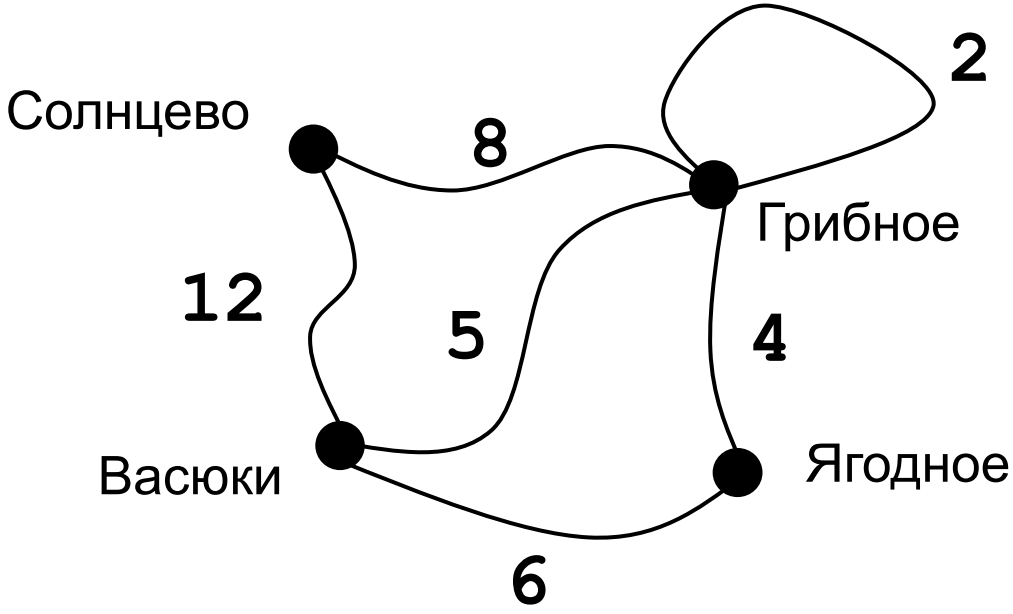


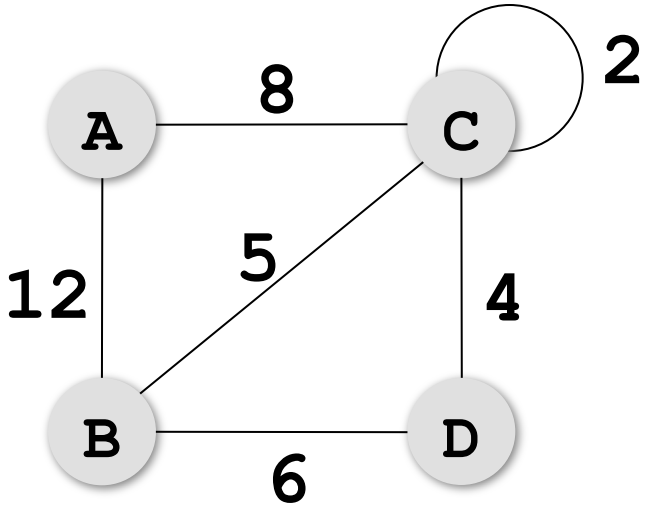
ABC ABDC
BCD CCC…



дерево

Взвешенные графы



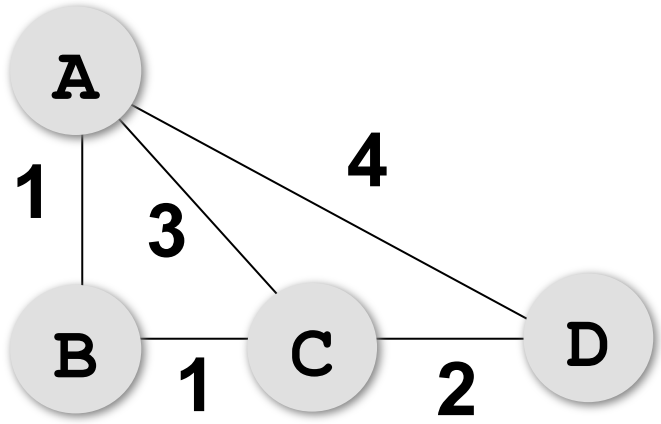


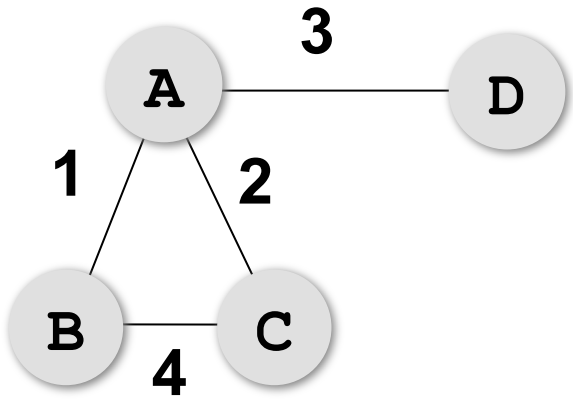
вес ребра

Весовая матрица:

	A	B	C	D
A		12	8	
B	12		5	6
C	8	5	2	4
D		6	4	

Постройте весовую матрицу

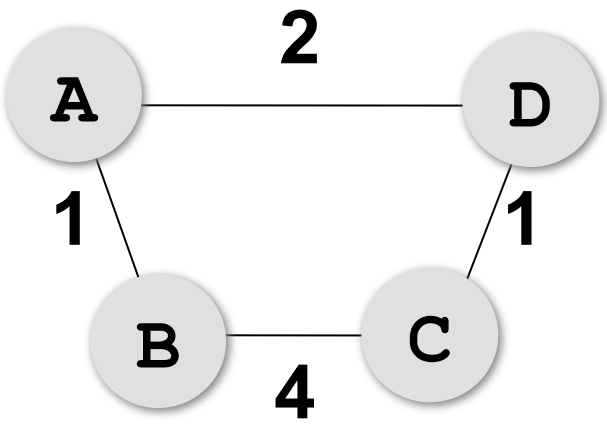


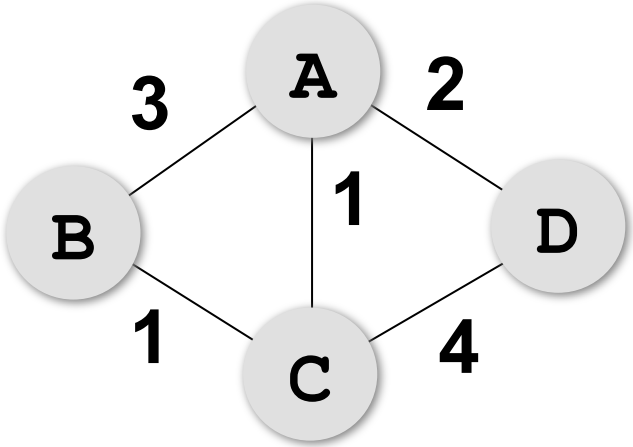


	A	B	C	D
A				
B				
C				
D				

	A	B	C	D
A				
B				
C				
D				

Постройте весовую матрицу





	A	B	C	D
A				
B				
C				
D				

	A	B	C	D
A				
B				
C				
D				

Нарисуйте граф

	A	B	C	D
A		4	3	
B	4			2
C	3			6
D		2	6	

	A	B	C	D
A			2	3
B				4
C	2			5
D	3	4	5	

Нарисуйте граф

	A	B	C	D	E
A		4	3		7
B	4			2	
C	3			6	
D		2	6		1
E	7			1	

	A	B	C	D	E
A		2	5		6
B	2			3	
C	5				
D		3			1
E	6			1	

Нарисуйте граф

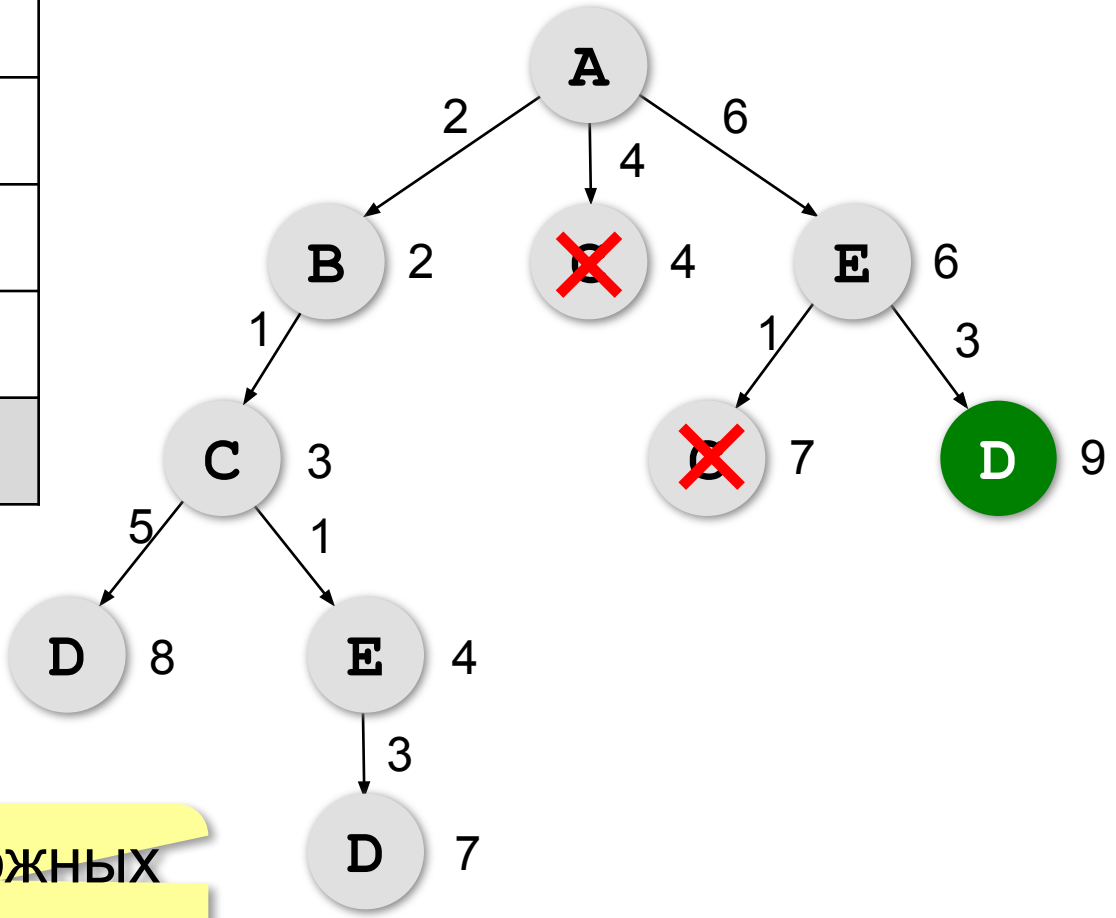
	A	B	C	D	E
A			2	2	6
B				2	
C	2			2	
D	2	2	2		
E	6				

	A	B	C	D	E
A		5	2		6
B	5			5	
C	2			2	
D		5	2		3
E	6			3	

Кратчайший путь (перебор)

	A	B	C	D	E
A		2	4		6
B	2		1		
C	4	1		5	1
D			5		3
E	6		1	3	

Определите кратчайший путь между пунктами A и D.



дерево возможных путей

Кратчайший путь

	A	B	C	D	E
A		2	4		
B	2		1		7
C	4	1		3	5
D			3		3
E		7	5	3	

Определите кратчайший путь между пунктами A и E.

Кратчайший путь

	A	B	C	D	E
A			3	1	
B			4		2
C	3	4			2
D	1				
E		2	2		

Определите кратчайший путь между пунктами A и B.

Кратчайший путь

	A	B	C	D	E
A			3	1	1
B			4		
C	3	4			2
D	1				
E	1		2		

Определите кратчайший путь между пунктами A и B.

Кратчайший путь

	A	B	C	D	E
A			3	1	4
B			4		2
C	3	4			2
D	1				
E	4	2	2		

Определите кратчайший путь между пунктами A и B.

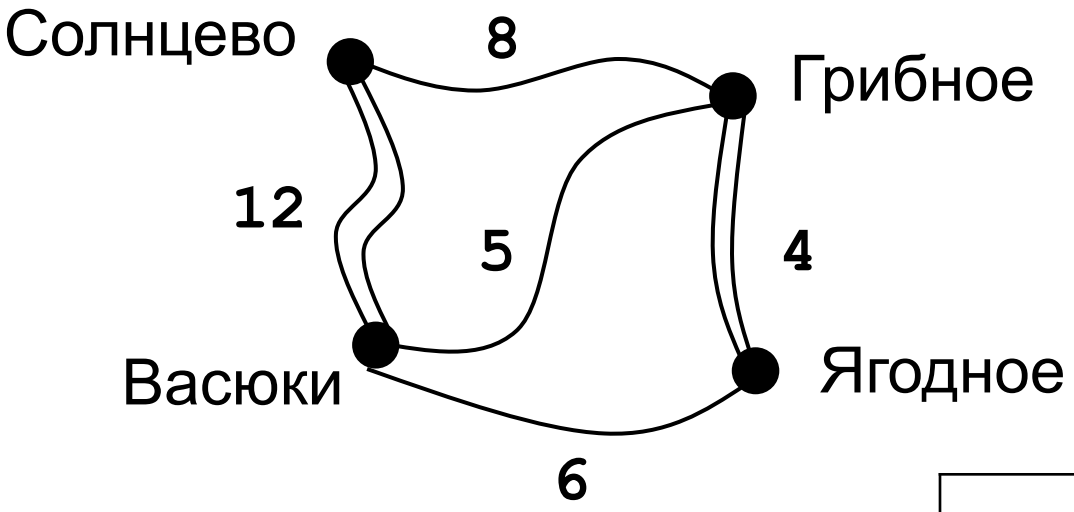
Кратчайший путь

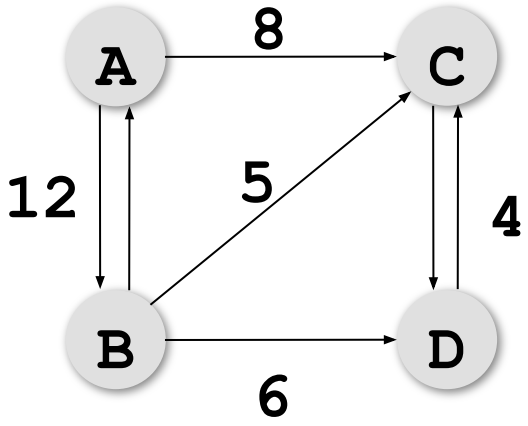
	A	B	C	D	E
A				1	
B			4		1
C		4		4	2
D	1		4		
E		1	2		

Определите кратчайший путь между пунктами A и B.

Ориентированные графы (орграфы)

Рёбра имеют направление (начало и конец), рёбра называю **дугами**.





Весовая матрица может быть несимметрична!

	A	B	C	D
A		12	8	
B	12		5	6
C				4
D			4	

Нарисуйте орграф

	A	B	C	D	E
A			3	1	
B	2		4		2
C	3				
D	1				
E			2		

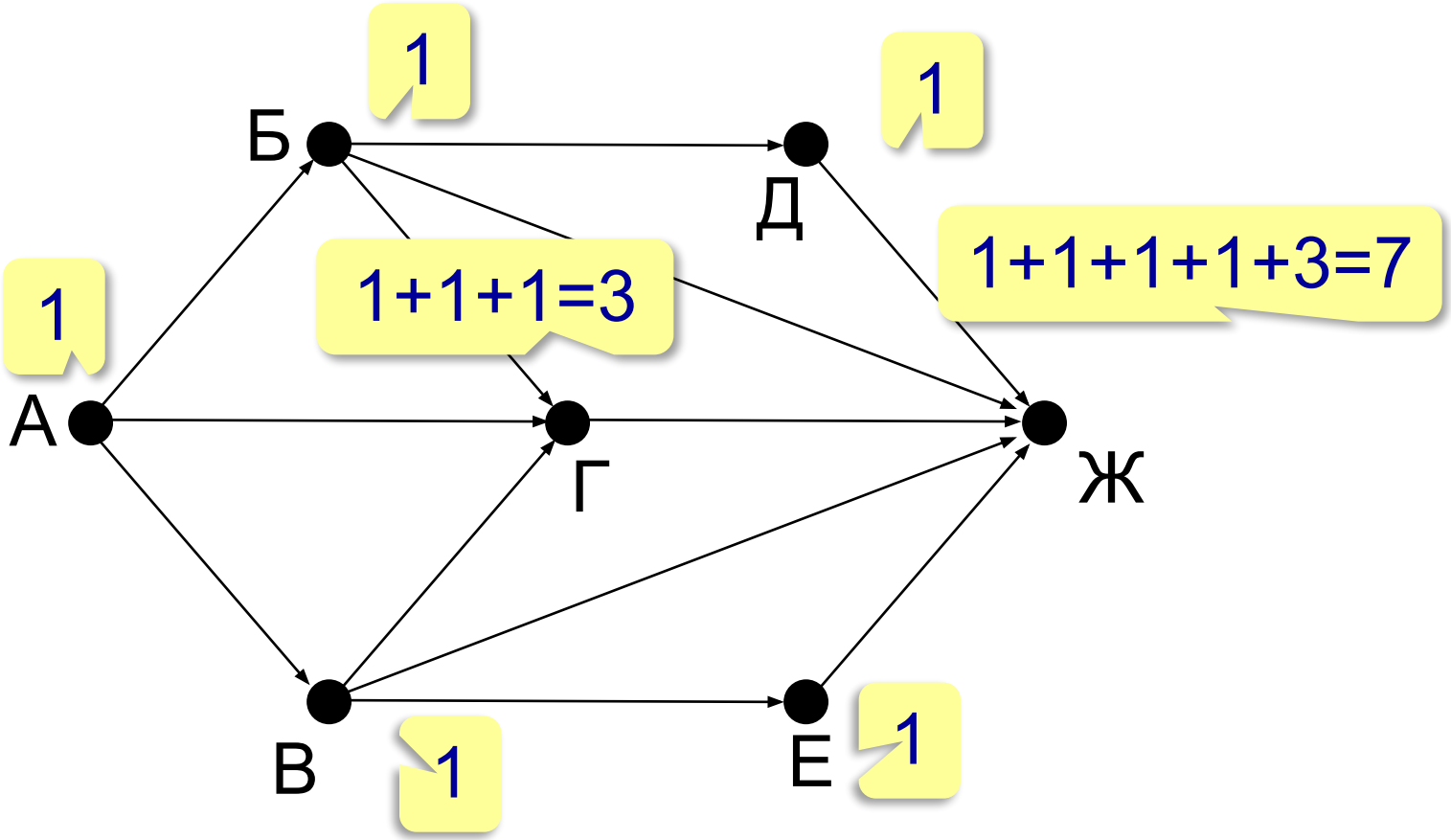
	A	B	C	D	E
A			5	1	
B			6	4	
C	3	4			3
D		2			
E			3		

Нарисуйте орграф

	A	B	C	D	E
A			3	1	4
B			4		2
C		4			2
D					
E	4		2		

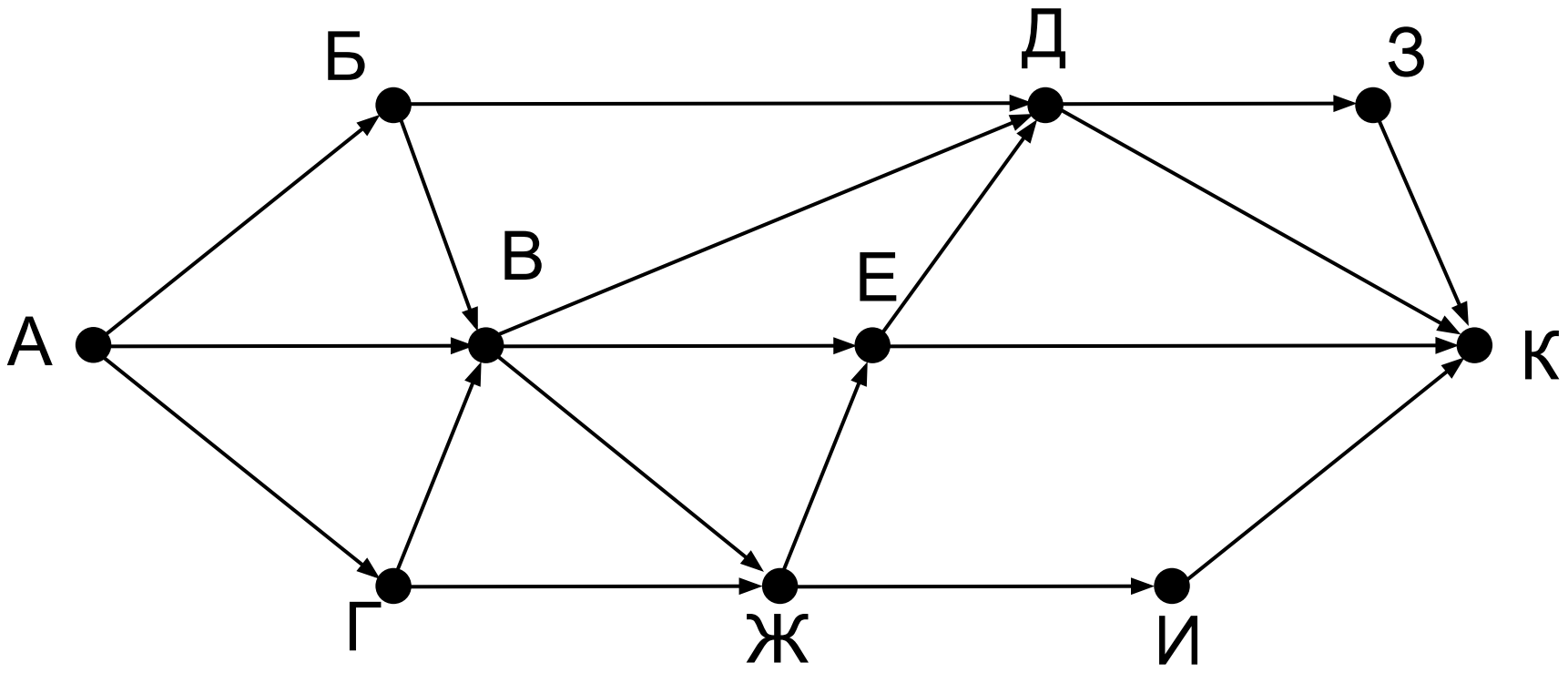
	A	B	C	D	E
A				1	
B			4		1
C	3	4		4	2
D	1	2	4		
E	1	1	2		

Количество путей из А в Ж



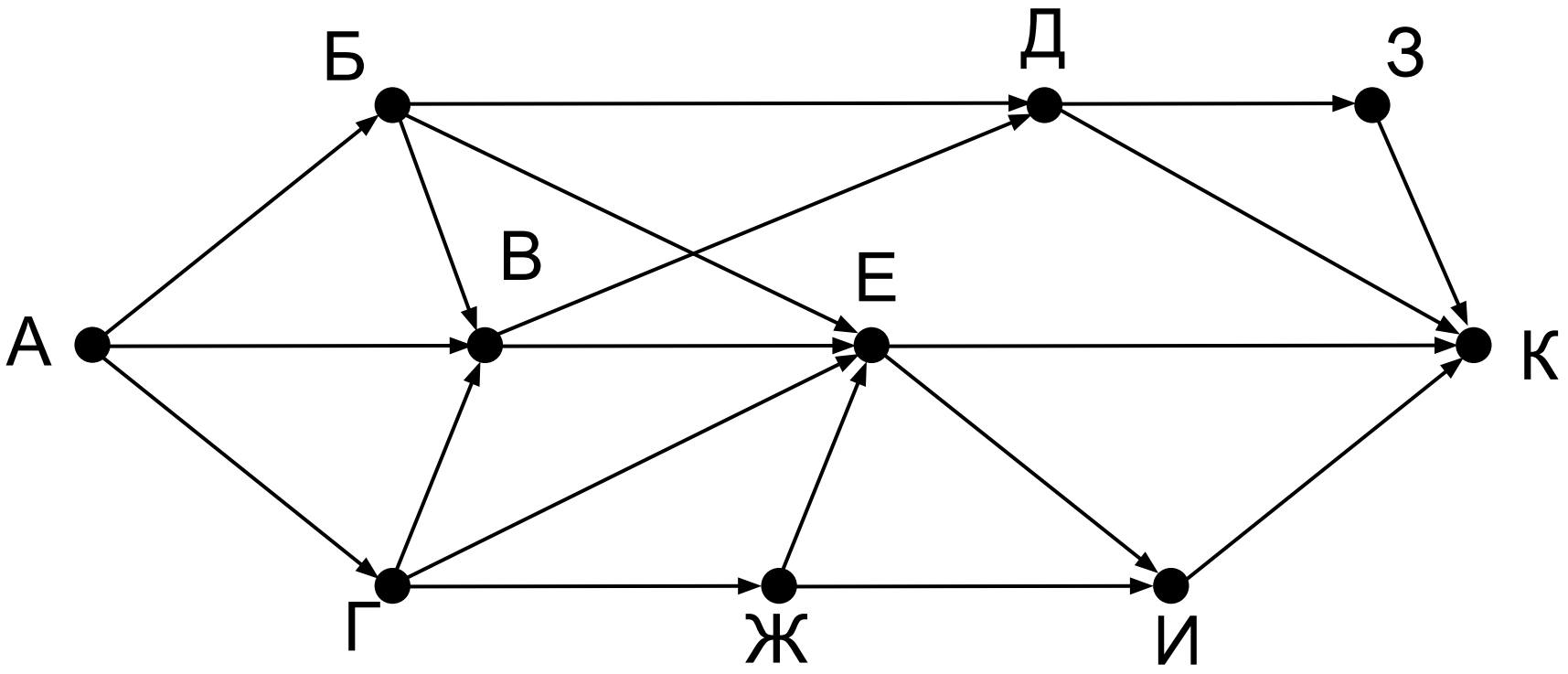
$$N_Ж = N_Д + N_Б + N_Г + N_В + N_Е$$

Количество путей из А в К

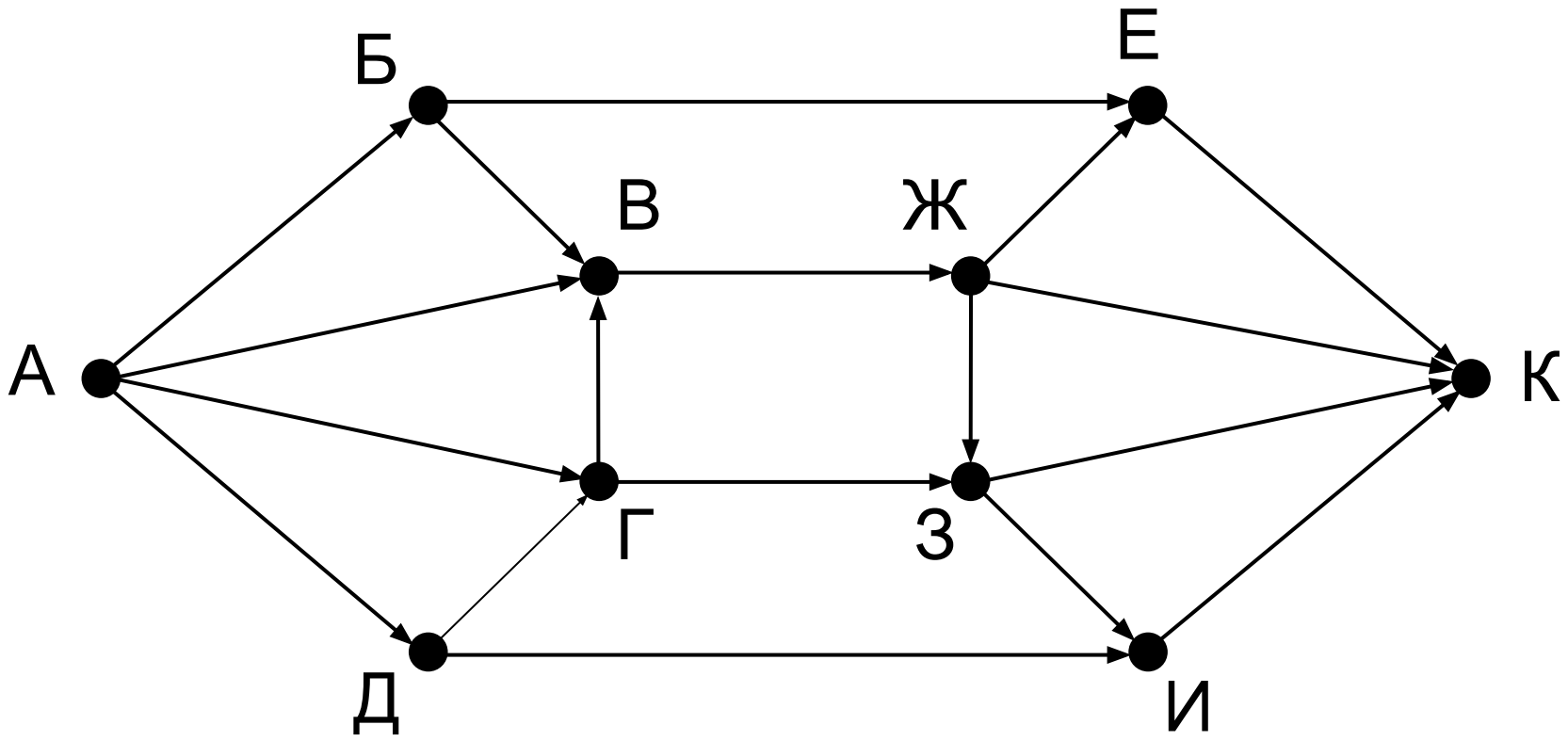


© К.Ю. Поляков, Е.А. Ерёмин, 2017 http://kpolyakov.spb.ru

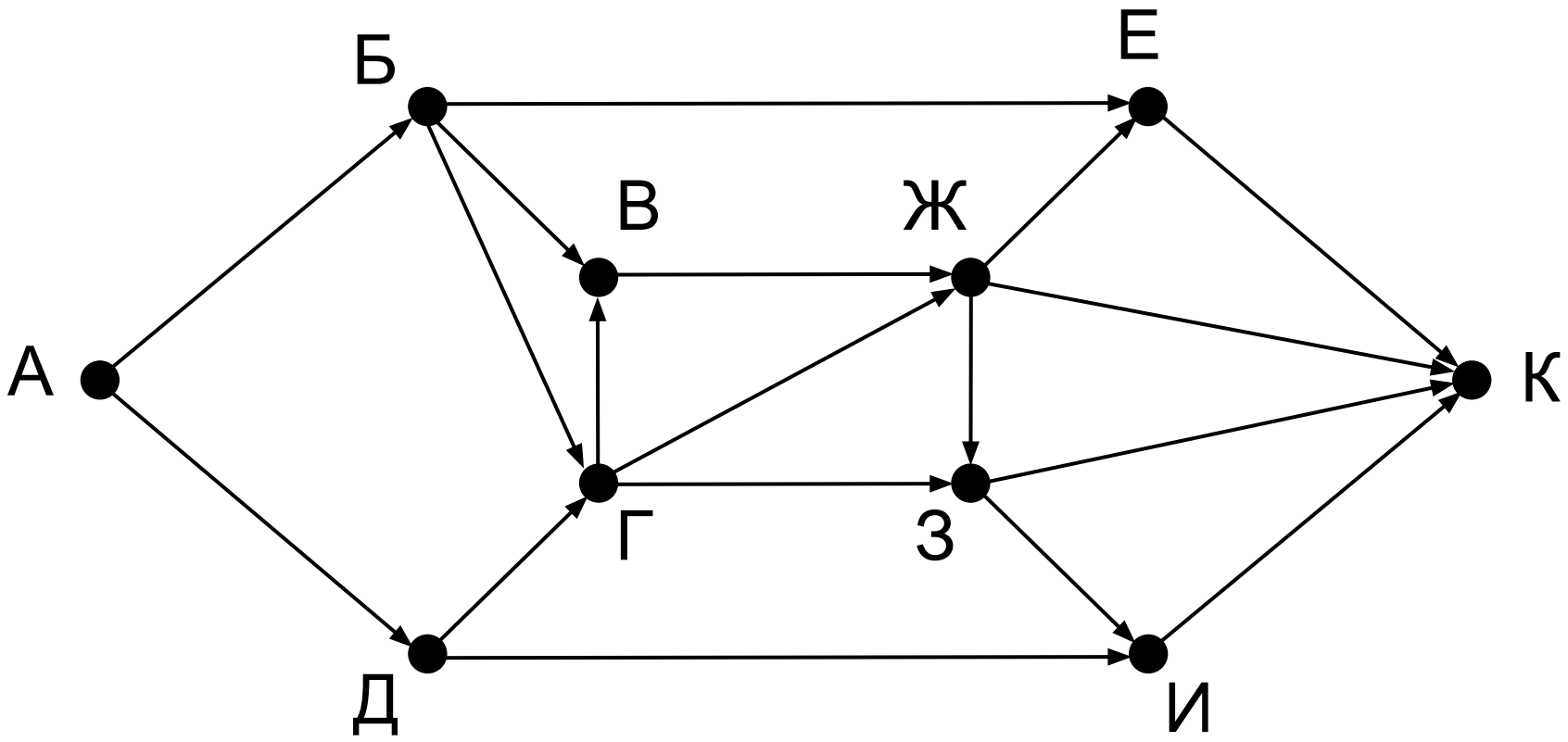
Количество путей из А в К



Количество путей из А в К



Количество путей из А в К



Моделирование

§ 15. Игровые стратегии

© К.Ю. Поляков, Е.А. Ерёмин, 2017

Что такое игровая модель?

Игровая модель — это модель, которая описывает соперничество двух (или более) сторон, каждая из которых преследует свою цель.

Теория игр: как играть, чтобы получить наибольший выигрыш?

Стратегия — это алгоритм игры, который позволяет добиться цели в игре в предположении, что соперники играют безошибочно.

Игры с полной информацией: нет случайностей:

- крестики-нолики
- шашки
- шахматы
- …

Какие игры с неполной информацией?

Выигрышные и проигрышные позиции

игра без ничьих…

Выигрышная позиция — это такая позиция, в которой игрок, делающий первый ход, может гарантированно выиграть при любой игре соперника, если не сделает ошибку.

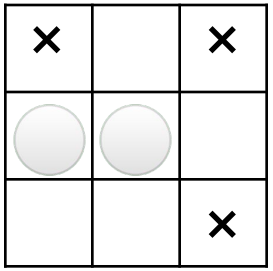
Есть **выигрышная стратегия —** алгоритм выбора очередного хода, позволяющий выиграть.

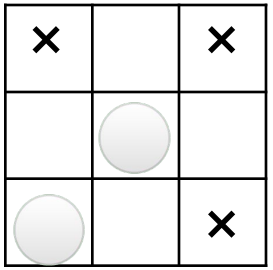
Проигрышная позиция — это такая позиция, в которой игрок, делающий первый ход, обязательно проиграет, если его соперник не сделает ошибку.

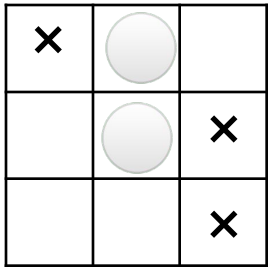
Нет выигрышной стратегии…

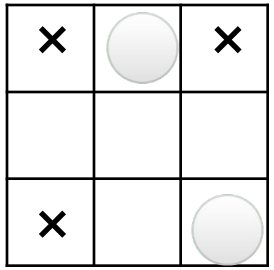
Выигрышные и проигрышные позиции

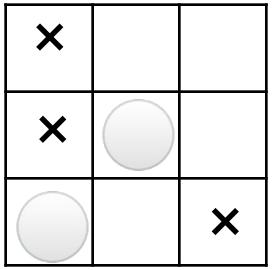
ходят нолики

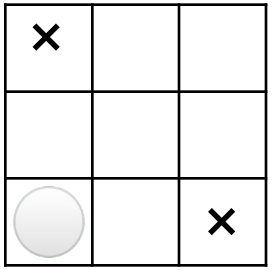
а) 

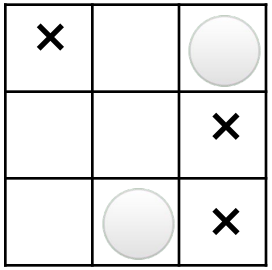
б) 

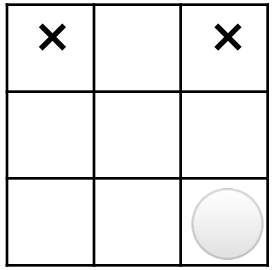
в) 

г) 

д) 

е) 

ж) 

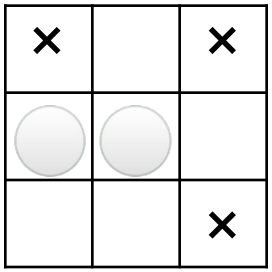
з) 

Выигрышные и проигрышные позиции

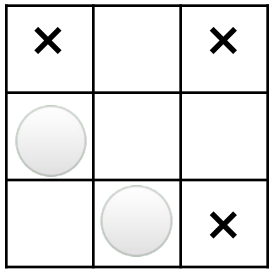
- позиция, из которой все возможные ходы ведут в выигрышные позиции, — **проигрышная**
- позиция, из которой хотя бы один из возможных ходов ведёт в проигрышную позицию, — **выигрышная**

при этом *выигрышная стратегия* состоит в том, чтобы перевести игру в эту проигрышную (для соперника) позицию.

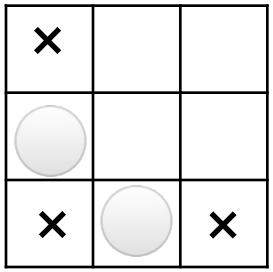
Ходят нолики:



выигрышная



проигрышная



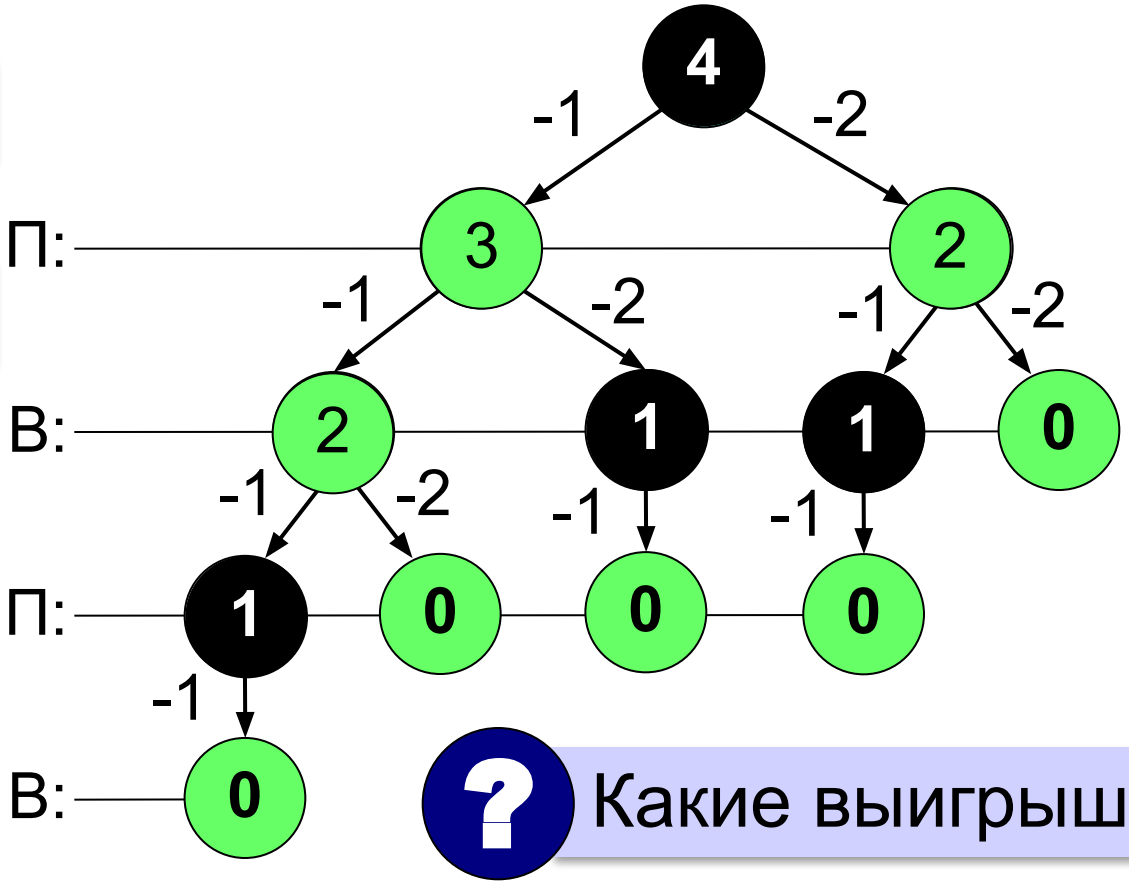
выигрышная

Дерево перебора вариантов

Два игрока, куча из *S* камней. За один ход игрок может взять **один или два камня**. Тот, кто возьмёт последний камень, проигрывает.

Первый

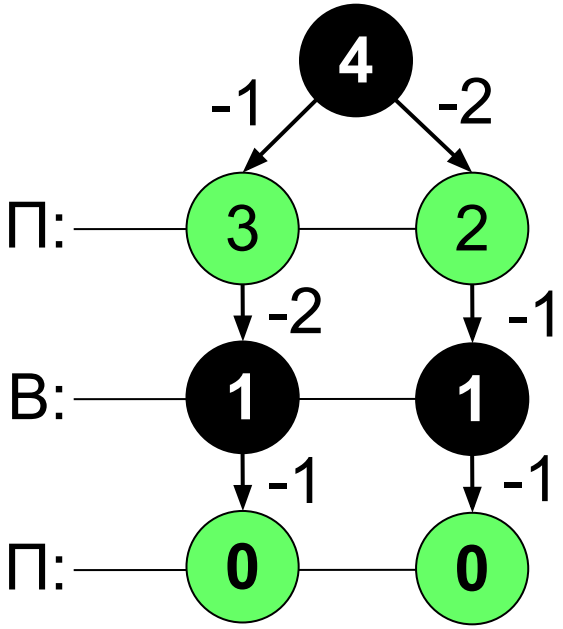
Второй



? Какие выигрышные?

Неполное дерево игры

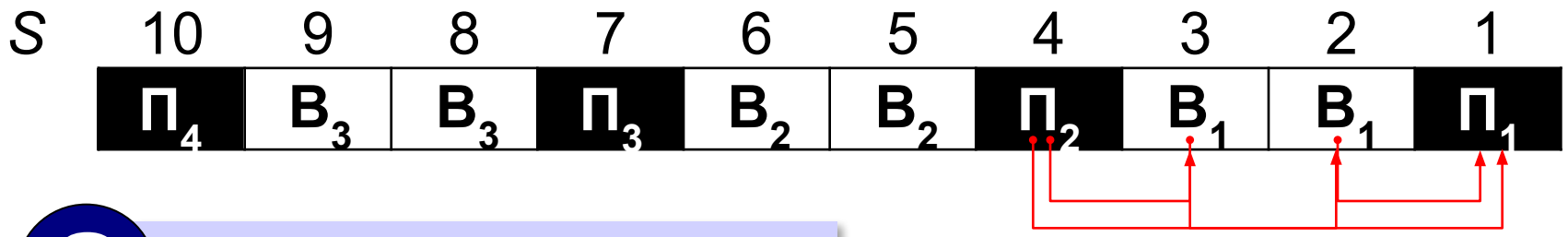
Цель – доказать выигрыш.



все возможные ходы того, кто проигрывает

достаточно одного хода того, кто выигрывает

Таблица позиций



Какова стратегия?

Нужно оставлять сопернику $N = 3 \cdot k + 1$ камней.

Конец фильма

ПОЛЯКОВ Константин Юрьевич
д.т.н., учитель информатики
ГБОУ СОШ № 163, г. Санкт-Петербург
kpolyakov@mail.ru

ЕРЕМИН Евгений Александрович
к.ф.-м.н., доцент кафедры мультимедийной дидактики и ИТО ПГГПУ, г. Пермь
eremin@pspu.ac.ru

Источники иллюстраций

1. loadmap.net
2. pilotrc.ru
3. www.ship268.com
4. www.globusy.ru
5. infourok.ru
6. alkhimikov.net
7. redcross-mosuvao.ru
8. studopedia.info
9. portalsystem.ru
10. biographera.net
11. tylove.ru
12. lms.101xp.com
13. mbofsantarosa.com
14. bumblebee.org
15. ru.wikipedia.org
16. иллюстрации художников издательства «Бином»
17. авторские материалы