



Математическая система
MATHCAD

**Точные и итерационные
методы решения уравнений**

**Преподаватель Бич Наталья Николаевна
кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры информационных систем и технологий**



Цель лекции заключается в рассмотрении таких инструментов пакета Mathcad, которые можно использовать для решения различного вида уравнений.

Задачи. Для достижения поставленной цели в лекции будут приведены теоретические характеристики данного инструментария и примеры его практического использования.

Решение нелинейных уравнений

Нелинейные уравнения можно разделить на 2 класса - алгебраические и трансцендентные. Алгебраическими уравнениями называют уравнения, содержащие только алгебраические функции (целые, рациональные, иррациональные). В частности, многочлен является целой алгебраической функцией. Уравнения, содержащие другие функции (тригонометрические, показательные, логарифмические и другие) называются трансцендентными.

Методы решения нелинейных уравнений делятся на две группы:

- точные методы;
- итерационные методы.

Точные методы позволяют записать корни в виде некоторого конечного соотношения (формулы). Из школьного курса алгебры известны такие методы для решения тригонометрических, логарифмических, показательных, а также простейших алгебраических уравнений.

Решение нелинейных уравнений

Как известно, многие уравнения и системы уравнений не имеют аналитических решений. В первую очередь это относится к большинству трансцендентных уравнений. Для их решения используются *итерационные методы с заданной степенью точности* (не более значения заданного системной переменной **TOL**).

Решение нелинейных уравнений

Пусть дано уравнение $f(x) = 0$, где:

1) Функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ вместе со своими производными 1-го и 2-го порядка.

2) Значения $f(x)$ на концах отрезка имеют разные знаки ($f(a) \cdot f(b) < 0$).

3) Первая и вторая производные $f'(x)$ и $f''(x)$ сохраняют определенный знак на всем отрезке.

Условия 1) и 2) гарантируют, что на интервале $[a, b]$ находится хотя бы один корень, а из 3) следует, что $f(x)$ на данном интервале монотонна и поэтому корень будет единственным.

Решить уравнение $f(x) = 0$ итерационным методом значит установить, имеет ли оно корни, сколько корней и найти значения корней с нужной точностью.

Всякое значение ξ , обращающее функцию $f(x)$ в нуль, т.е. $f(\xi) = 0$ и ξ называется корнем уравнения или нулем функции $f(x)$.



Решение нелинейных уравнений

Задача нахождения корня уравнения $f(x) = 0$ итерационным методом состоит из двух этапов:

- отделение корней - отыскание приближенного значения корня или содержащего его отрезка;
- уточнение приближенных корней - доведение их до заданной степени точности.

Процесс отделения корней начинается с установления знаков функции $f(x)$ в граничных $x = a$ и $x = b$ точках области ее существования.

Приближенные значения корней (начальные приближения) могут быть также известны из физического смысла задачи, из решения аналогичной задачи при других исходных данных, или могут быть найдены графическим способом. В инженерной практике распространен графический способ определения приближенных корней.

Решение нелинейных уравнений

Принимая во внимание, что действительные корни уравнения $f(x) = 0$ - это точки пересечения графика функции $f(x)$ с осью абсцисс, достаточно построить график функции $f(x)$ и отметить точки пересечения $f(x)$ с осью Ox , или отметить на оси Ox отрезки, содержащие по одному корню.

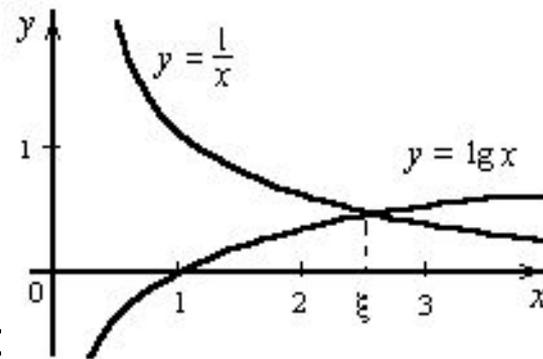
Построение графиков часто удается сильно упростить, заменив уравнение $f(x) = 0$ равносильным ему уравнением: $f_1(x) = f_2(x)$, где функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ - более простые, чем функция $f(x)$. Тогда, построив графики функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, искомые корни получим как абсциссы точек пересечения этих графиков

Решение нелинейных уравнений

Пример. Графически отделить корни уравнения $x \lg x = 1$.

Уравнение $x \lg x = 1$ удобно переписать в виде равенства: $\lg x = 1/x$

Отсюда ясно, что корни уравнения могут быть найдены как абсциссы точек пересечения логарифмической кривой $y = \lg x$ и гиперболы $y = 1/x$. Построив эти кривые, приближенно найдем единственный корень x . $\xi \approx 2,5$ уравнения или определим его содержащий отрезок $[2, 3]$.



Итерационный процесс с начальным приближением x_0 . Каждый такой шаг называется итерацией. В результате итераций находится последовательность приближенных значений корня x_1, x_2, \dots, x_n . Если эти значения с увеличением числа итераций n приближаются к истинному значению корня, то говорят, что итерационный процесс сходится.

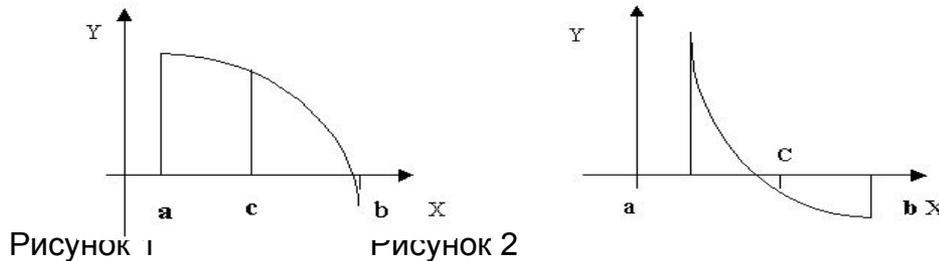
Итерационные методы

Метод половинного деления

Его ещё называют методом дихотомии. Этот метод решения уравнений отличается тем, что для него не требуется выполнения условия, что первая и вторая производная сохраняют знак на интервале $[a, b]$. Метод половинного деления сходится для любых непрерывных функций $f(x)$ в том числе недифференцируемых.

Разделим отрезок $[a, b]$ пополам точкой
$$c = \frac{a+b}{2}$$

Если $f(c) \neq 0$ (что практически наиболее вероятно), то возможны два случая: либо $f(x)$ меняет знак на отрезке $[a, c]$ (рисунок 1) либо на отрезке $[c, b]$ (рисунок 2)



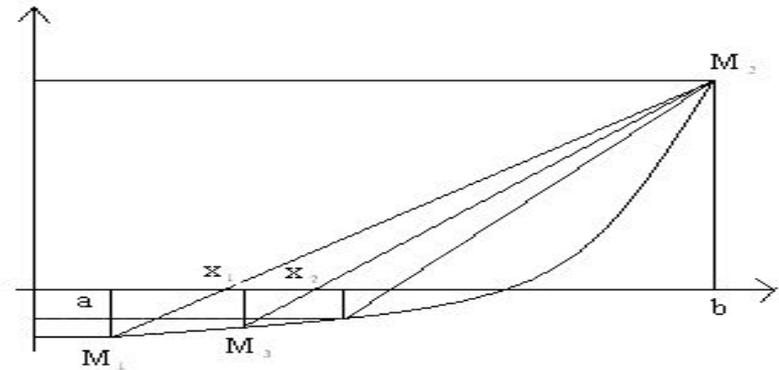
Выбирая в каждом случае тот отрезок, на котором функция меняет знак, и продолжая процесс половинного деления дальше, можно прийти до сколь угодно малого отрезка, содержащего корень уравнения.

Итерационные методы

Метод хорд

Сущность метода (его еще называют методом ложного положения) состоит в замене кривой $y=f(x)$ хордами, проходящими через концы отрезков, в которых $f(x)$ имеет противоположные знаки. Метод хорд требует, чтобы один конец отрезка, на котором ищется корень, был неподвижен. В качестве неподвижного конца x_0 выбирают тот конец отрезка, для которого знак $f(x)$ совпадает со знаком второй производной $f''(x)$. Расчетная формула имеет вид

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(x_0)}(x_n - x_0)$$

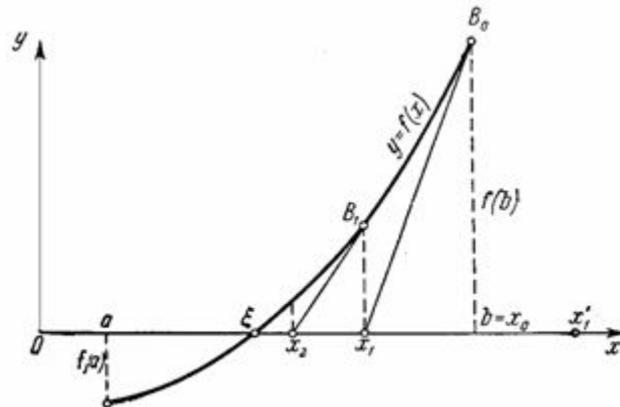


Метод хорд является двухточечным, его сходимость монотонная и односторонняя.

Итерационные методы

Метод Ньютона

Основная идея метода заключается в следующем: задаётся начальное приближение вблизи предположительного корня, после чего строится касательная к исследуемой функции в точке приближения, для которой находится пересечение с осью абсцисс. Эта точка и берётся в качестве следующего приближения. И так далее, пока не будет достигнута необходимая точность. В качестве исходной точки x_0 выбирается тот конец интервала $[a, b]$, которому отвечает ордината того же знака, что и знак $f''(x)$



Итерационные методы

Уравнение касательной, проведенной к кривой $y = f(x)$, имеет вид:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Отсюда найдем следующее приближение корня x_1 как абсциссу точки пересечения касательной с осью Ox ($y = 0$):

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Аналогично могут быть найдены и следующие приближения.

Для окончания итерационного процесса может быть использовано условие

и $|f(x_i)| < \varepsilon$ ие близости 2-х последовательных приближений

$$|x_i - x_{i-1}| < \varepsilon$$

Итерационный процесс сходится если

$$f(x_0) * f''(x_0) > 0$$

Реализация метода Ньютона в Mathcad

Mathcad Professional - [Метод Ньютона.mcd]

Файл Правка Вид Вставка Формат Математика Символы Окно ?

1. Отделение корней $f(x) := 2 \cdot x \cdot \sin(x) - \cos(x)$ $x := 0, 0.1 .. 1$

$x_0 := 0.67$ - начальное приближение, определенное по графику $f(x)=0$

2. Уточнение корней (методом Ньютона)

$n := 100$ - предположительное число итераций
 $i := 1 .. n$

$\varepsilon := 10^{-4}$ - задание точности вычислений

$df(x) := \frac{d}{dx} f(x)$ - определение функции, вычисляющей производную от $f(x)$

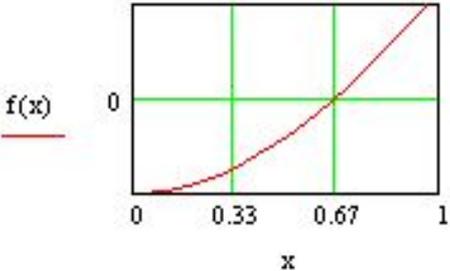
$x_1 := x_0 - \frac{f(x_0)}{df(x_0)}$ - вычисление первого приближения по формуле Ньютона

$x_{i+1} := \text{until} \left(|x_i - x_{i-1}| - \varepsilon, x_i - \frac{f(x_i)}{df(x_i)} \right)$ - реализация итерационного процесса по методу Ньютона с использованием функции **until**

$j := \text{last}(x)$ - определение числа итераций за которые итерационный процесс сошелся
 $j = 4$

$x_{j-1} = 0.65327$ - **корень уравнения $f(x)$**

$x = \begin{pmatrix} 0.67 \\ 0.65342 \\ 0.65327 \\ 0.65327 \\ 0 \end{pmatrix}$ - итерационная последовательность



Численное решение нелинейного уравнения

Для решения простейших уравнений вида $f(x) = 0$ в Mathcad используется функция *root*

$\text{root}(f(x1), x1, a, b)$

Функция возвращает значение $x1$, принадлежащее отрезку $[a,b]$, при котором выражение или функция $f(x)$ обращается в 0. Аргументы этой функции должны быть скалярами. Функция возвращает скаляр.

Численное решение нелинейного уравнения

Аргументы:

$f(x1)$ - функция, определенная где-либо в рабочем документе, или выражение. Выражение должно возвращать скалярные значения.

$x1$ - имя переменной, которая используется в выражении. Этой переменной перед использованием функции *root* необходимо присвоить числовое значение. Mathcad использует его как **начальное приближение** при поиске корня.

a , b – необязательны, если используются, то должны быть вещественными числами, причем **$a < b$** .

Использование функции root

Mathcad - [Безымянный:2]

Файл Правка Вид Добавить Формат Инструменты Символика Окно Справка

Нормаль Arial 10

Мой сайт Go

$f(x) := x^2 + 10 \cdot x + 6$
 $x := -15..10$

$x := 0$
 $y := \text{root}(f(x), x)$
 $y = -0.641$

$x := -10$
 $y := \text{root}(f(x), x)$
 $y = -9.359$

График

Нажмите F1 для справки.

Отсутствие сходимости функции *root*

Если после многих итераций Mathcad не находит подходящего приближения, то появится сообщение (отсутствует сходимость). Эта ошибка может быть вызвана следующими причинами:

- Уравнение не имеет корней.
- Корни уравнения расположены далеко от начального приближения.
- Выражение имеет локальные *max* и *min* между начальным приближением и корнями.
- Выражение имеет разрывы между начальными приближениями и корнями.
- Выражение имеет комплексный корень, но начальное приближение было вещественным.

Чтобы установить причину ошибки, нужно исследовать график $f(x)$. Он поможет выявить наличие корней уравнения $f(x) = 0$ и, если они есть, то определить приблизительно их значения. Чем точнее выбрано начальное приближение корня, тем быстрее будет *root* сходиться.

Рекомендации по использованию функции *root*

Для изменения точности, с которой функция *root* ищет корень, нужно изменить значение системной переменной TOL.

- Если значение TOL увеличивается, функция *root* будет сходиться быстрее, но ответ будет менее точен.
- Если значение TOL уменьшается, то функция *root* будет сходиться медленнее, но ответ будет более точен.
- Чтобы изменить значение TOL в определенной точке рабочего документа, используйте определение вида `TOL:=0.01`.
- Чтобы изменить значение TOL для всего рабочего документа, выберите команду команду **Математика** ⇒ **Параметры...** ⇒ **Переменные** ⇒ **Допуск сходимости (TOL)**.

Нахождение корней полинома

Для нахождения корней выражения, имеющего вид

$$v_n x^n + \dots + v_2 x^2 + v_1 x + v_0,$$

лучше использовать функцию *polyroots*, нежели *root*. В отличие от функции *root*, функция *polyroots* не требует начального приближения и возвращает сразу все корни, как вещественные, так и комплексные.

`r:=polyroots(v)`

Возвращает корни полинома степени n . Коэффициенты полинома находятся в векторе v длины $n + 1$. Возвращает вектор r длины n , состоящий из корней полинома.

Нахождение корней полинома

Аргументы:

- v – вектор, содержащий коэффициенты полинома.

Вектор v удобно создавать используя команду **Символы** \Rightarrow **Коэффициенты полинома**. Следующий рисунок иллюстрирует определение корней полинома средствами Mathcad.

Нахождение корней полинома

Mathcad Professional - [Решение уравнений средствами Mathcad.mcd]

Файл Плавка Вид Вставка Формат Математика Символы Окно ?

Нахождение корней полинома $0.75 \cdot x^3 - 8 \cdot x + 5$

$$v := \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ 0 \\ .75 \end{pmatrix}$$

$$r := \text{polyroots}(v) \quad r = \begin{pmatrix} -3.542 \\ 0.651 \\ 2.892 \end{pmatrix}$$

Для создания вектора v :

1. Поставьте курсор на переменную x в выражении $0.75 \cdot x^3 - 8 \cdot x + 5$
2. Выберите команду **Символы** \Rightarrow **Кoeffициенты полинома**.
3. Выберите команду **Плавка** \Rightarrow **Вырезать**.
4. Напечатайте $v :=$ и выберите команду **Плавка** \Rightarrow **Вставить**.

Построение графика функции

$f(x) := 0.75 \cdot x^3 - 8 \cdot x + 5 \quad x := -4, -3.9 \dots 4 \quad j := 0 \dots 2$

$\frac{f(x)}{f(r_j)}$
○○○

Root r_j	Approximate Value
r_1	-3.542
r_2	0.651
r_3	2.892

Методы решения систем линейных уравнений

Способы решения систем линейных уравнений делятся на две группы:

- точные методы, представляющие собой конечные алгоритмы для вычисления корней системы (решение систем с помощью обратной матрицы, правило Крамера, метод Гаусса и др.),
- итерационные методы, позволяющие получить решение системы с заданной точностью путем сходящихся итерационных процессов (метод итерации, метод Зейделя и др.).

Вследствие неизбежных округлений результаты даже точных методов являются приближенными. При использовании итерационных методов, сверх того, добавляется погрешность метода.

Эффективное применение итерационных методов существенно зависит от удачного выбора начального приближения и быстроты сходимости процесса.

Решение систем уравнений

MathCAD дает возможность решать системы уравнений. Максимальное число уравнений и переменных равно 50. Результатом решения системы будет численное значение искомого корня.

Для решения системы уравнений необходимо выполнить следующее:

1. Задать начальное приближение для всех неизвестных, входящих в систему уравнений. Mathcad решает систему с помощью итерационных методов.
2. Напечатать ключевое слово *Given*. Оно указывает Mathcad, что далее следует система уравнений.
3. Ввести уравнения и неравенства в любом порядке. Используйте **[Ctrl]=** для печати символа =. Между левыми и правыми частями неравенств может стоять любой из символов $<$, $>$, \geq и \leq .
4. Ввести любое выражение, которое включает функцию *Find*, например: $a := \text{Find}(x, y)$.

Решение систем уравнений

Find(z1, z2, . . .)

возвращает точное решение системы уравнений.

Число аргументов должно быть равно числу неизвестных.

Ключевое слово *Given*, уравнения и неравенства, которые следуют за ним, и какое-либо выражение, содержащее функцию *Find*, называют **блоком решения уравнений**.

Следующие выражения недопустимы внутри блока решения:

1. Ограничения со знаком \neq .
2. Дискретный аргумент или выражения, содержащие дискретный аргумент в любой форме.
3. Неравенства вида $a < b < c$.
4. Блоки решения уравнений не могут быть вложены друг в друга, каждый блок может иметь только одно ключевое слово *Given* и имя функции *Find*.

Сообщение об ошибке

No solution was found. Try changing the guess value or the value of TOL or CTOL.

Решение не найдено) при решении уравнений появляется, когда:

1. поставленная задача может не иметь решения;
2. для уравнения, которое не имеет вещественных решений, в качестве начального приближения взято вещественное число и наоборот;
3. в процессе поиска решения последовательность приближений попала в точку локального минимума невязки. Для поиска искомого решения нужно задать различные начальные приближения;
4. возможно, поставленная задача не может быть решена с заданной точностью. Попробуйте увеличить значение TOL.

Решение систем уравнений

Mathcad Professional - [Решение систем уравнений.MCD]

Файл Плавка Вид Вставка Формат Математика Символы Окно ?

Пример 1. Решение системы уравнений с помощью функции Find

$x_1 := 0 \quad x_2 := 0 \quad x_3 := 0$ - Начальные приближения

Given

$100 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 - 2 \cdot x_3 = 100$ - Используйте **[Ctrl]=** для печати символа =

$6 \cdot x_1 + 200 \cdot x_2 - 10 \cdot x_3 = 600$

$x_1 + 2 \cdot x_2 + 100 \cdot x_3 = 500$

$\text{Find}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 0.905 \\ 3.219 \\ 4.927 \end{pmatrix}$ +

Пример 2. Решение системы уравнений в символьном виде

Given

$x + 2 \cdot \pi \cdot y = a$

$4 \cdot x + y = b$

$\text{Find}(x, y) \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{-(-2 \cdot \pi \cdot b + a)}{(-1 + 8 \cdot \pi)} \\ \frac{(4 \cdot a - b)}{(-1 + 8 \cdot \pi)} \end{bmatrix}$ - Используйте **[Ctrl].** (клавиша **Ctrl**, сопровождаемая точкой) для печати символьного знака равенства

Решение матричных уравнений

Матричным уравнением называется уравнение, коэффициенты и неизвестные которого – прямоугольные матрицы соответствующей размерности.

Рассмотрим систему n линейных алгебраических уравнений относительно n неизвестных x_1, x_2, \dots, x_n :

Решение матричных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdot \quad \cdot \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

В соответствии с правилом умножения матриц рассмотренная система линейных уравнений может быть записана в матричном виде

$$A^*x=b,$$

Решение матричных уравнений

- где

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \boxtimes & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \boxtimes & a_{2n} \\ \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ a_{n1} & a_{n2} & \boxtimes & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}$$

- Матрица A , столбцами которой являются коэффициенты при соответствующих неизвестных, а строками – коэффициенты при неизвестных в соответствующем уравнении, называется *матрицей системы*;
- матрица-столбец b , элементами которой являются правые части уравнений системы, называется *матрицей правой части* или просто *правой частью системы*.
- Матрица-столбец x , элементы которой - искомые неизвестные, называется *решением системы*.

Решение матричных уравнений

Если матрица A - неособенная, то есть $\det A \neq 0$, то система $Ax = b$, или эквивалентное ей матричное уравнение, имеет единственное решение.

В самом деле, при условии $\det A \neq 0$ существует обратная матрица A^{-1}

Умножая обе части уравнения на матрицу A^{-1} получим:

$$A^{-1}Ax = A^{-1}b,$$

$$x = A^{-1}b.$$

Формула $x = A^{-1}b$ дает решение уравнения $Ax = b$ и оно единственно.

Решение матричных уравнений

Системы линейных уравнений удобно решать с помощью функции *lsolve*.

$x := \text{lsolve}(A, b)$

Возвращается вектор решения x такой, что
 $Ax = b$.

Аргументы:

A - квадратная, не сингулярная матрица.

b - вектор, имеющий столько же рядов, сколько рядов в матрице **A** .

Решение матричных уравнений

Mathcad Professional - [Решение матричных уравнений.mcd]

Файл Правка Вид Вставка Формат Математика Символы Окно ?

Матрица системы: Матрица правой части: **Примечание:** образцы матрицы и вектора соответствуют линейной системе

$$A := \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Вычисление определителя + $3x_1 - x_2 = 5$
 $-2 \cdot x_1 + x_2 + x_3 = 0$
 $2 \cdot x_1 - x_2 + 4 \cdot x_3 = 15$

$|A| = 5$

Определитель отличен от нуля, система имеет единственное решение

Вычисление решения системы

$$x := A^{-1} \cdot b \quad x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Решение системы с помощью функции `lsolve` Проверка правильности решения

$$x := \text{lsolve}(A, b) \quad x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad A \cdot x - b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Матрицы Вычисление определителя

$\begin{bmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{bmatrix}$
 \times_n
 \times^{-1}
 $|x|$
 $f(M)$
 $M^{<>}$
 M^T
 $m..$
 $\hat{u} \cdot \hat{v}$
 $\hat{u} \times \hat{v}$
 Σu

Приближенные решения

Функция *Minerr* очень похожа на функцию *Find* (использует тот же алгоритм). Если в результате поиска не может быть получено дальнейшее уточнение текущего приближения к решению, *Minerr* возвращает это приближение. Функция *Find* в этом случае возвращает сообщение об ошибке. Правила использования функции *Minerr* такие же, как и функции *Find*.

Minerr(z1, z2, . . .)

Возвращает приближенное решение системы уравнений. Число аргументов должно быть равно числу неизвестных.

Если *Minerr* используется в блоке решения уравнений, необходимо всегда включать дополнительную проверку достоверности результатов.

Символьное решение уравнений

В Mathcad можно быстро и точно найти численное значение корня с помощью функции *root*. Но имеются некоторые задачи, для которых возможности Mathcad позволяют находить решения в символьном (аналитическом) виде.

Решение уравнений в символьном виде позволяет найти точные или приближенные корни уравнения:

- Если решаемое уравнение имеет параметр, то решение в символьном виде может выразить искомый корень непосредственно через параметр. Поэтому вместо того, чтобы решать уравнение для каждого нового значения параметра, можно просто заменять его значение в найденном символьном решении.
- Если нужно найти все комплексные корни полинома со степенью меньше или равной 4, символьное решение даст их точные значения в одном векторе или в аналитическом или цифровом виде.

Символьное решение уравнений

Команда **Символы** ⇒ **Переменные** ⇒ **Вычислить** позволяет решить уравнение относительно некоторой переменной и выразить его корни через остальные параметры уравнения.

Чтобы решить уравнение символьно необходимо:

- Напечатать выражение (для ввода знака равенства используйте комбинацию клавиш **[Ctrl]=**).
- Выделить переменную, относительно которой нужно решить уравнение, щелкнув на ней мышью.
- Выбрать пункт меню **Символы** ⇒ **Переменные** ⇒ **Вычислить**.

Нет необходимости приравнивать выражение нулю. Если MathCAD не находит знака равенства, он предполагает, что требуется приравнять выражение нулю.

Символьное решение уравнений

Чтобы решить систему уравнений в символьном виде, необходимо выполнить следующее:

- Напечатать ключевое слово *Given*.
- Напечатать уравнения в любом порядке ниже слова *Given*. Удостоверьтесь, что для ввода знака = используется **[Ctrl]=**.
- Напечатать функцию *Find*, соответствующую системе уравнений.
- Нажать **[Ctrl]**. (клавиша CTRL, сопровождаемая точкой). Mathcad отобразит символьный знак равенства \rightarrow .
- Щелкнуть мышью на функции *Find*.