

Аналіз зв'язку між змінними: кореляція і регресія

1. Поняття кореляційного зв'язку. Кореляційний і регресійний аналіз.
2. Параметричний кореляційний аналіз.
3. Непараметричний кореляційний аналіз.
4. Регресійний аналіз. Лінійна регресія.

1. Поняття регресійного аналізу.

- **Функціональний зв'язок** – вид зв'язку, коли конкретному значенню одного показника відповідає єдине значення іншого показника
- **Кореляційний зв'язок** – вид зв'язку, коли конкретному значенню одного показника відповідає деякий діапазон значень іншого показника.
- **Зв'язок поділяють :**
 - - за напрямком: **прямий** і **зворотній**,
 - - за силою: **слабкий**, **середній** і **сильний**,
 - - за формою: **лінійний** (рівномірна зміна x та y) і **нелінійний** (рівномірна зміна x та нерівномірна зміна y)

Кореляційний аналіз

- **Кореляційний аналіз** – це сукупність статистичних прийомів, за допомогою яких досліджується зв'язок між ознаками
 - **Параметричний коефіцієнт r** – коли обидві вибірки вибрані з нормально розподілених сукупностей,
 - **Непараметричний коефіцієнт r** – коли або хоч одна з вибірок взята з генеральної сукупності, розподіленої не за нормальним законом, або розподіли невідомі.

Коефіцієнт кореляції Пірсона

Емпіричний коефіцієнт кореляції:

- **Коефіцієнт кореляції**

(вибірковий r , генеральний ρ) – показник, який показує силу і напрямок зв'язку між двома параметрами (наприклад, x і y)

- **Коваріація** – усереднена величина добутків відхилень кожної пари змінних від їх середніх; вказує, в якій мірі більшим (меншим) значенням x_i відповідають більші (менші) значення y_i .

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n \cdot \sigma_x \sigma_y} \rightarrow 0 < |r| < 1$$

NB!: характеризує тільки лінійний зв'язок

Коваріація:

$$\text{cov} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n}$$

NB!: не коректно вживати для величин x і y з різною розмірністю

Напрямок і сила зв'язку:

- $|r| > 0.75$ – сильний
- $0.5 < |r| < 0.75$ - середній
- $|r| < 0.5$ -слабкий
- $r < 0$ – негативна кореляція,
- $r > 0$ – позитивна кореляція

Параметричні кореляції – у модулі “Базові статистики і таблиці”

Data: непараметрика (9v by 60c)

	1 Var2	2 Var3	3 Var4	4 Var5	5 Var6	6 Var7	7 Var8	8 Var9	9 Var10
1	12,50	14,8	13,7						
2	12,00	15,6	14,0						
3	13,40	10,4	18,0						
4	14,10	12,5	13,0						
5	12,90	13,8	15,2						
6	13,10	9,98	16,4						
7	14,00	11,2	20,0						
8	13,80	15,4	25,0						
9	12,40	16,01	14,0						
10	14,60	14,1	18,5						
11	15,00	13,8	13,8						
12	13,20	15,5	14,0						
13	14,00	12,65	14,6						
14	15,10	10,63	20,4						
15	12,90	12,54	20,0						
16	13,40	23	16,8						
17	15,60	13	19,9						
18	17,83	21,5	15,0						
19	16,01	23	22						

Basic Statistics and Tables: непарам

Quick

- Descriptive statistics
- Correlation matrices**
- t-test, independent, by groups
- t-test, independent, by variables
- t-test, dependent samples
- t-test, single sample
- Breakdown & one-way ANOVA
- Breakdown; non-factorial tables
- Frequency tables
- Tables and banners
- Multiple response tables
- Difference tests: r, %, means
- Probability calculator

OK

Cancel

Options

Open Data

SELECT CASES

W

Обираємо вкладку “Опції”

	1 Var2	2 Var3	3 Var4	4 Var5	5 Var6	6 Var7	7 Var8	8 Var9	9 Var10
1	12,50	14,8	13,7						
2	12,00	15,6	14,9						
3	13,40	10,4	18,7						
4	14,10	12,5	13,6						
5	12,90	13,8	15,23						
6	13,10	9,98	16,48						
7	14,00	11,2	20,5						
8	13,80	15,4	25,6						
9	12,40	16,01	14,6						
10	14,60	14,1	18,54						
11	15,00	13,8	13,89						
12	13,20	15,5	14,5						
13	14,00	12,65	14,63						
14	15,10	10,63	20,45						
15	12,90	12,54	20,3						
16	13,40	23	16,89						
17	15,60	13	19,98						
18	17,83	21,5	15,8						
19	16,01	23	22,6						

Product-Moment and Partial Correlations: непа

One variable list | Two lists (rect. matrix) | Summary

First list: none
Second list: none

Quick | Advanced/plot | Options

Display format for correlation matrices

- Display simple matrix (highlight p's)
- Display r, p-levels, and N's
- Display detailed table of results

Display long variable names
 Extended precision calculations

p-level for highlighting: .05

SELECT CASES | Weighted moments

DF = W-1 N-1

MD deletion

- Casewise
- Pairwise

Призначаємо змінні

Data: кореляція парам (10v by 30c)

	1 активність	2 концентрація	3 Var3	4 Var4	5 Var5
1	1,08	257			
2	1,1	264			
3	1,12	279			
4	1,14	287			
5					
6					
7					
8					
9					
10					
11					
12					
13					
14					
15					
16					
17					
18					
19					

Product-Moment and Partial Correlations: корел ? - X

One variable list Two lists (rect. matrix) Summary

First list: активність
Second list: концентрація

Quick | Advanced/plot | Options

Display format for correlation matrices

- Display simple matrix (highlight p's)
- Display r, p-levels, and N's
- Display detailed table of results

Display long variable names
 Extended precision calculations

p-level for highlighting: .05

(Only single-list square matrices can be saved)

SELECT CASES § Weighted moments

DF = W-1 N-1

MD deletion

	1 активність	2 концентрація	3 Var3	4 Var4	5 Var5	6 Var6	7 Var7	8 Var
1	1,08	257						
2	1,1	264						
3	1,12	279						
4	1,14	287						

Workbook1* - Correlations (кореляція парам)

Workbook1*

Basic Statistics/Tab

Correlations (кореляція парам)

Marked correlations are significant at $p < ,05000$
(Casewise deletion of missing data)

Var. X & Var. Y	Mean	Std.Dv.	r(X,Y)	r?	t	p	N	Constant dep: Y	Slope dep: Y
активність	1,3017	0,19064							
концентрація	327,4167	47,65302	0,957700	0,917189	10,52411	0,000001	12	15,80572	239,3938

Зв'язок прямий сильний

Відхиляємо H_0 ,
зв'язок дійсно існує

Статистична похибка коефіцієнта кореляції та довірчий інтервал:

- Вибірковий коефіцієнт r характеризує генеральний параметр ρ зі **статистичною похибкою**:

$$s_r = \sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}}$$

- **Статистична значущість коефіцієнта r :**
- H_0 : зв'язок між x і y відсутній, $\rho=0$
- Перевіряють за **критерієм Стьюдента**:

$$t = \frac{r}{s_r}$$

- **Довірчий інтервал коефіцієнта кореляції:**

$$r - t \cdot s_r \leq \rho \leq r + t \cdot s_r$$

Табличне значення:

$$t_{\text{табл}}(\alpha, n-2)$$

При $t_{\text{табл}} > t$, приймають H_0

Коефіцієнт кореляції для малих вибірок:

- Для вибірок з $n < 30$ вводять поправку:

$$r^* = r \left[1 + \frac{1 - r^2}{2(n - 3)} \right]$$

- Для малочисельних вибірок, коли $r \leq 0.2$ або $r > 0.5$ використовують **перетворення Фішера**, r замінюють на z :

$$z = \frac{1}{2} \ln \frac{1+r}{1-r}$$

- **Критерій значущості z :**

$$t = \frac{z}{s_z} = z \sqrt{n - 3}$$

$$s_z = \frac{1}{\sqrt{n - 3}}$$

Табличне значення: $t_{\text{табл}}(\alpha, n - 2)$

При $t_{\text{табл}} > t$, приймають H_0

Статистична значущість різниці коефіцієнтів кореляції

- H_0 : вибірки взяті з одної генеральної сукупності або з генеральних сукупностей з однаковим типом зв'язку між показниками
- Для великих вибірок **$n > 100$** :

$$t = \frac{r_1 - r_2}{\sqrt{s_{r1}^2 - s_{r2}^2}}$$

- $t_{\text{табл}} (\alpha, n_1 + n_2 - 4)$
- При $t < t_{\text{табл}}$ приймаємо H_0

- Коли **$n < 100$ і $r > 0.5$** , порівнюють коефіцієнти кореляції після перетворення в z :

$$t = \frac{z_1 - z_2}{\sqrt{\frac{1}{n_1 - 3} + \frac{1}{n_2 - 3}}}$$

- $t_{\text{табл}} (\alpha, n_1 + n_2 - 4)$
- При $t < t_{\text{табл}}$ приймаємо H_0

2. Непараметричний кореляційний аналіз (коефіцієнти кореляції рангів)

- Застосовують: без передбачення про характер розподілу

- **Коефіцієнт кореляції рангів Спірмена:**

$$r_s = 1 - \frac{6}{n(n^2 - 1)} \sum (R_x - R_y)^2$$

- R_x, R_y – різниця між рангами спряжених значень ознак x і y (коли значення у вибірці співпадають, ранги усереднюються)

$$0 < r_s < 1$$

- **Значущість коефіцієнта r_s** перевіряють за критерієм Стьюдента:

$$t = |r_s| \sqrt{\frac{n-2}{1-r_s^2}}$$

- H_0 : зв'язок між x і y відсутній, $\rho=0$
- $t_{\text{табл}}(\alpha, n-2)$
- При $t < t_{\text{табл}}$ приймаємо H_0

Непараметричні кореляції – в модулі “Непараметричний аналіз”

The image shows a screenshot of the SPSS software interface. On the left, the 'Nonparametric Statistics: кореляція парам' dialog box is open, with the 'Quick' tab selected. The 'Correlations (Spearman, Kendall tau, gamma)' option is highlighted. The dialog box includes buttons for 'OK', 'Cancel', 'Options', and 'Open Data', as well as 'SELECT CASES' and 'W' options. On the right, a data table is visible with three columns: '4 агресивність', '5 схильність до лідерства', and '6 Var6'. The table contains 10 rows of data. A black rectangular box highlights the cell in the second row of the '6 Var6' column.

	4 агресивність	5 схильність до лідерства	6 Var6
	1	3	
	3	4	
	3	5	
	4	4	
	5	6	
	8	7	
	9	8	
	7	8	
	2	3	
	6	6	

Зв'язок прямий сильний

Відхиляємо H_0 ,
зв'язок дійсно існує

Workbook1* - Spearman Rank Order Correlations (кореляція парам)

Workbook1*

- Basic Statistics/Tests of Independence
- Correlations (nonparametric)
- Nonparametrics (nonparametric)
- Nonparametric Tests
- Spearman Rank Order Correlations

Spearman Rank Order Correlations (кореляція парам)
MD pairwise deleted
Marked correlations are significant at $p < ,05000$

Pair of Variables	Valid N	Spearman R	t(N-2)	p-level
агресивність & схильність до лідерства	10	0,944656	8,144425	0,000038

Spearman Rank Order Correlations (кореляція парам)

Сила зв'язку:

- $r^2=0.25-0.75$ – середній,
 - $r^2<0.25$ – слабкий,
 - $r^2>0.75$ - сильний
- **Коефіцієнт детермінації r^2**
 - Показує, яка частина варіації одної ознаки залежить від варіювання іншої ознаки.
 - Розраховується як r^2

Зв'язок між якісними ознаками: таблиці 2x2; коефіцієнт асоціації Пірсона r_A

Маємо кореляційну таблицю даних:

	Ознака є	Ознаки немає	Суми:
Група1	a	b	a+b
Група2	c	d	c+d
Суми:	a+c	b+d	

Тут a, b, c і d – кількість випадків

$$r_A = \frac{ad - bc}{\sqrt{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}}$$

Похибка:

$$s_{r_A} = \frac{1 - r_A^2}{\sqrt{n}}$$

Критерій перевірки значущості:

$$\chi^2 = n * r_A^2$$

$$\chi^2_{\text{табл}}(\alpha; 1);$$

при $\chi^2 > \chi^2_{\text{табл}}$ відхиляють H_0
і говорять про значущість r_A

Бісеріальний коефіцієнт кореляції r_{BS}

Використовують, коли одна ознака бінарна (наприклад, стать), а інша кількісна:

$$r_{BS} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sigma} \sqrt{\frac{n_1 n_2}{N(N-1)}}$$

Тут 1 і 2 – коди бінарної ознаки,
 \bar{x}_1 – середня по кількісній ознаці, яка належить до 1 групи (код бінарної ознаки 1),

\bar{x}_2 – аналогічно для 2 групи,
 σ – стандартне відхилення кількісної ознаки

- Критерій значущості:

$$t = r_{BS} \sqrt{\frac{N-2}{1-r_{BS}^2}}$$

- Табличне значення:
- $t_{\text{табл}}(\alpha; N-2)$
- При $t > t_{\text{табл}}$ відхиляють H_0 і говорять про наявність зв'язку

Регресійний аналіз

- **Регресійний аналіз** – це методи статистичного аналізу, які встановлюють як кількісно змінюється одна ознака при зміні іншої
- **Регресійна залежність** : $y=f(x)$, де x – незалежна змінна, y – залежна змінна; коли маємо декілька незалежних змінних x_1, x_2, \dots – проводять **багатофакторний (множинний) регресійний аналіз**
- **Регресія** – це зміна функції (y) при зміні одного чи декількох аргументів (x)

Задача застосування в біології:

спрогнозувати (розрахувати) значення залежної ознаки за певним значенням незалежної ознаки: *наприклад*, спрогнозувати тривалість гострої фази захворювання залежно від температури і титру антитіл в крові пацієнтів

Умови застосування регресійного аналізу:

- Кількість об'єктів дослідження має бути в декілька разів більше, ніж кількість незалежних ознак,
- Усі ознаки повинні бути **кількісними і нормально розподіленими**
- Залежна ознака Y повинна мати нормальний розподіл з однаковими дисперсіями для кожного значення незалежної ознаки X_i (для багатофакторного аналізу)
- У випадку багатофакторного аналізу не повинні існувати сильні лінійні зв'язки між незалежними ознаками, коли це так – в модель включають ознаку X , яка має найбільший коефіцієнт r з залежною ознакою Y
- Різниця між теоретичним і реальним значеннями Δy повинна бути нормально розподіленою і мати нульове значення середнього,

Лінійна регресія

- Рівняння зв'язку між x та y має вигляд:

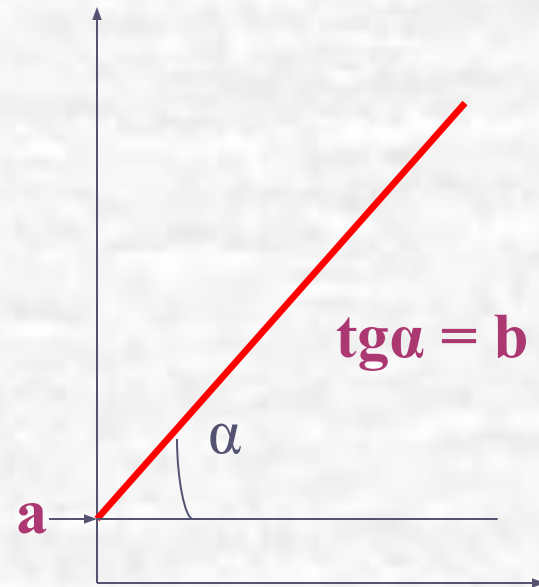
$$y = a + bx \quad \text{або}$$

$$y = a + b_1x_1 + b_2x_2 + \dots$$

- Тоді коефіцієнти a і b розраховують як:

$$b_{yx} = r \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x}$$



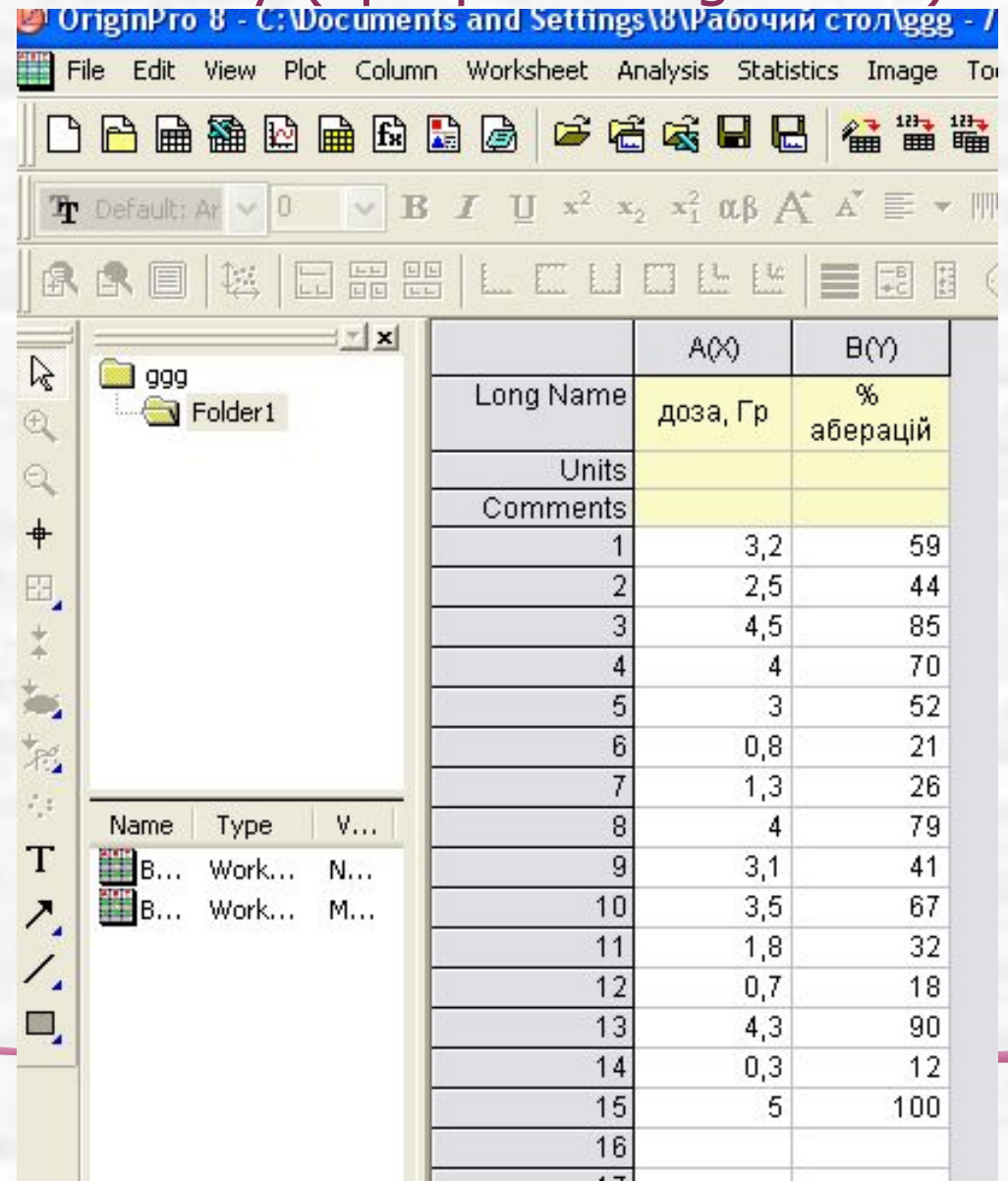
Тут a – вільний член (intercept), b – коефіцієнт регресії (slope)

Проведення регресійного аналізу (програма OriginPro 8):

Нехай маємо задачу:

Досліджували зв'язок між поглинутою дозою опромінення (X, Гр) та кількістю аберантних клітин кісткового мозку (Y, %) у білих мишей (n=15), отримали такі результати:

Треба побудувати графік лінії регресії з вказанням 95% довірчого інтервалу і передбачити дозу для отримання 50% аберантних клітин



	A(X)	B(Y)
Long Name	доза, Гр	% аберацій
Units		
Comments		
1	3,2	59
2	2,5	44
3	4,5	85
4	4	70
5	3	52
6	0,8	21
7	1,3	26
8	4	79
9	3,1	41
10	3,5	67
11	1,8	32
12	0,7	18
13	4,3	90
14	0,3	12
15	5	100
16		
17		

Етапи проведення регресійного аналізу в OriginPro 8:

The screenshot displays the OriginPro 8 software interface. The 'Analysis' menu is open, showing the 'Fitting' option selected. The 'Fit Linear' option is also selected, and a submenu is visible with '1 <Last used>' and 'Open Dialog...' options. The background shows a data table with 16 rows and 3 columns.

Long Narr			
Uni			
Commen			
1	3,2	59	
2	2,5	44	
3	4,5	85	
4	4	70	
5	3	52	
6	0,8	21	
7	1,3	26	
8	4	79	
9	3,1	41	
10	3,5	67	
11	1,8	32	
12	0,7	18	
13	4,3	90	
14	0,3	12	
15	5	100	
16			

	A(X)	B(Y)
Long Name	доза, Гр	% аберацій
Units		
Comments		
1	3,2	59
2	2,5	44
3	4,5	85
4	4	70
5	3	52
6	0,8	21
7	1,3	26
8	4	79
9	3,1	41
10	3,5	67
11	1,8	32
12	0,7	18
13	4,3	90
14	0,3	12
15	5	100
16		
17		
18		
19		
20		
21		
22		
23		
24		
25		
26		
27		
28		

Linear Fit

Dialog Theme <Factory default>

Description Perform Linear Fitting

Recalculate Manual

Input Data [Book2]Sheet1!(A,B) **B(Y) : % аберацій**

Range 1 [Book2]Sheet1!(A,B) **Add**

Fit Options

Errors as Weight Instrumental

Fix Intercept

Fix Intercept at 0

Fix Slope

Fix Slope at 1

Use Reduced Chi-Sqr

Apparent Fit

Quantities to Compute

Residual Analysis

Regular

Standardized

Studentized

Studentized Deleted

Output Results

Fitted Curves Plot

Find Specific X/Y

Residual Plots

OK Cancel

Показник а викидаємо

Вікно
результів
аналізу
і їх
інтерп-
ретація

Notes

Description	Perform Linear Fitting
User Name	8
Operation Time	09.01.2010 23:09:19
Equation	$y = a + b \cdot x$
Report Status	New Analysis Report
Weight	No Weighting

Input Data

Parameters

		Value	Standard Error	t-Value	Prob> t	LCL	UCL	Dependency	CI Half-Width
% абераций	Intercept	1,96047	3,75939	0,52149	0,6108	-6,1612	10,08215	--	8,1216
	Slope	18,25221	1,19185	15,31421	1,0687E-9	15,67738	20,82704	--	2,5748

Statistics

Summary

	Intercept		Slope		Statistics
	Value	Error	Value	Error	Adj. R-Square
% абераций	1,96047	3,75939	18,25221	1,19185	0,94344

ANOVA

		DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Prob>F
% абераций	Model	1	10540,65265	10540,65265	234,5251	1,0687E-9
	Error	13	584,28068	44,94467		
	Total	14	11124,93333			

Fitted Curves Plot



Residual vs. Independent Plot

% абераций

Довірчий інтервал

- Для оцінювання похибки при прогнозуванні параметра Y по X використовують **довірчий інтервал**:

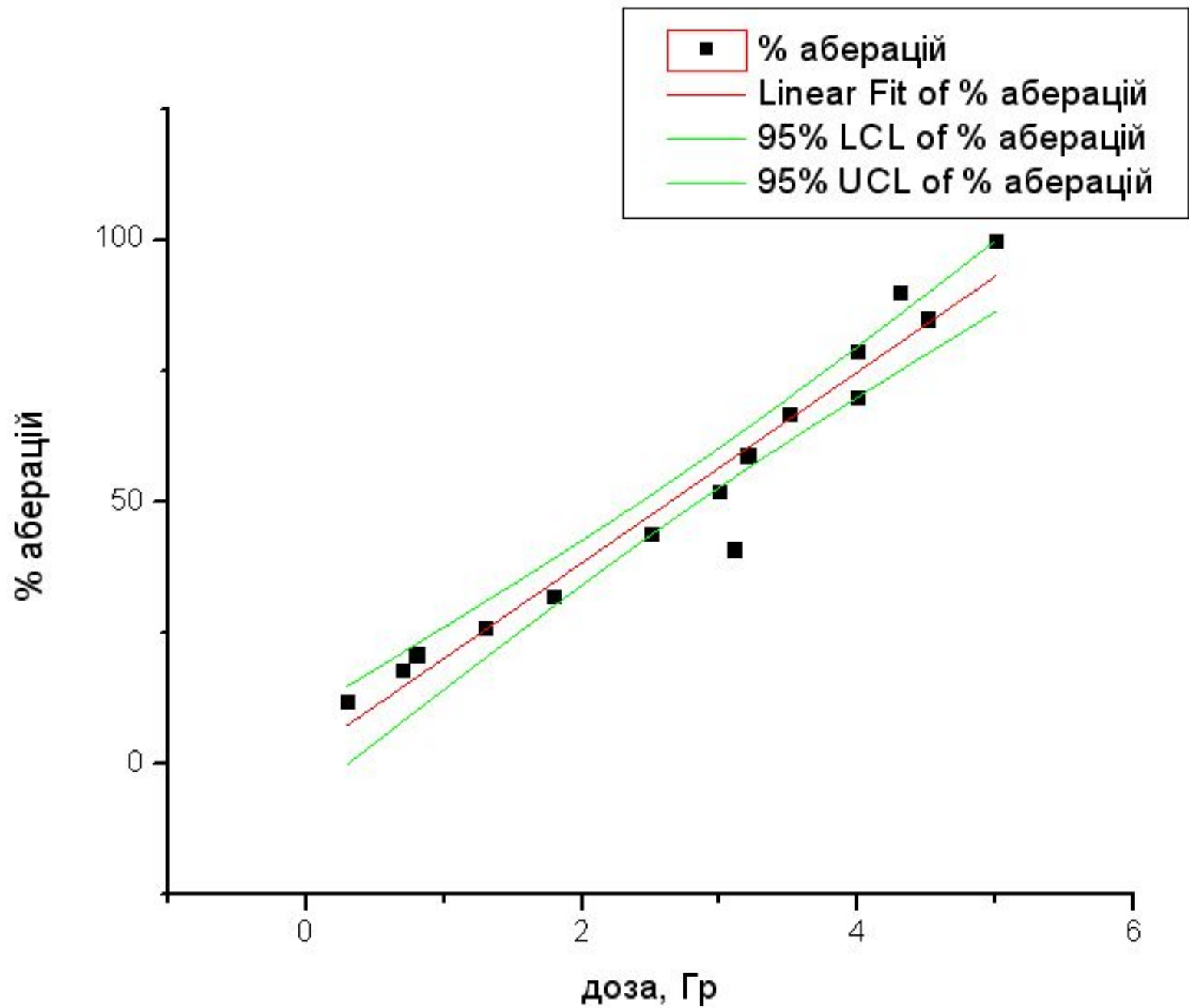
$$y_k = \bar{y}_k \pm t_{0.95} \cdot m_{\bar{y}_k}$$

- Тут y_k – прогнозоване значення параметра y при значення незалежного фактора x_i ,

- **Похибка оцінювання:**

$$m_{\bar{y}_k} = s_o \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_k - \bar{x})^2}{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}}$$

- Тут s_o – середнє квадратичне відхилення параметра Y ,
- X_k – значення фактора x , одержаного з рівняння



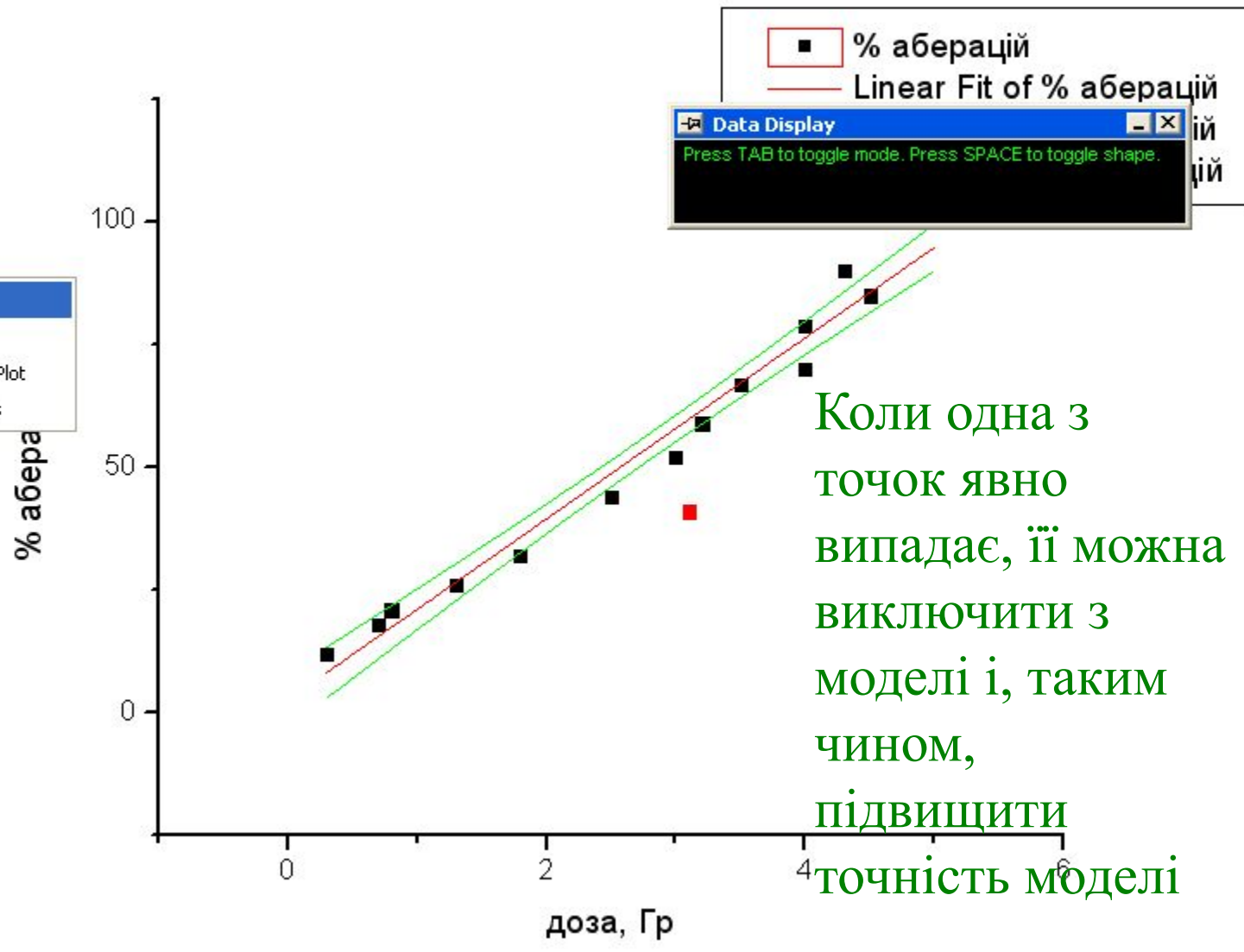


g g g
Folder1

1

- Add Masked Points to Active Plot
- Add Masked Points to All Plots
- Remove Masked Points from Active Plot
- Remove Masked Points from All Plots

Name	Type	V...
B...	Work...	N... 1
B...	Work...	N... 1
T...	Work...	H... 6



Коли одна з точок явно випадає, її можна виключити з моделі і, таким чином, підвищити точність моделі

Linear Fit (10.01.2010 15:23:22)

Notes

Input Data

Masked Data - Values Excluded from Computations

	Rows	Y Data	X Data
% аберацій	9	41	3,1

Parameters

		Value	Standard Error	t-Value	Prob> t	LCL
% аберацій	Intercept	2,71681	2,58475	1,05109	0,31392	-2,914
	Slope	18,43097	0,81845	22,51932	3,47651E-11	16,647

Some input data points are masked.

Statistics

Summary

	Intercept		Slope		Statistics
	Value	Error	Value	Error	Adj. R-Square
% аберацій	2,71681	2,58475	18,43097	0,81845	0,97496

ANOVA

		DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Prob>F
% аберацій	Model	1	10715,37014	10715,37014	507,11956	3,4765E-11
	Error	12	253,55843	21,12987		
	Total	13	10968,92857			

Correlation

% аберацій

	Intercept	Slope
Intercept	1	-0,87982
Slope	-0,87982	1

Fitted Curves Plot



Усе рівно, показник а викидаємо

- Для цього ми спочатку з групи інструментів **Regional Mask Tool** вибираємо команду **Add Mask Points to Active Plot**,
- Потім виділити за допомогою мишки прямокутну область навколо точки – точка забарвиться в червоний колір,
- І знову провести кореляційний аналіз: **Analysis – Fitting – Fit Linear – Last Used**
- Виділена точка не буде врахована, а точність коефіцієнтів і в цілому моделювання – зросте

Дисперсійний аналіз – засіб перевірки значущості моделі:

- Наслідком дисперсійного аналізу є розрахунок коефіцієнта детермінації R^2 :

$$R^2 = \frac{SS_R}{SS}$$

- Тут SS_R – сума квадратів відхилень розрахованих значень y_i від середнього \bar{y} , а SS – сума квадратів відхилень експериментальних значень y_i від середнього \bar{y} .

- Коефіцієнт детермінації на пряму пов'язаний зі значенням F-критерію:

$$F = \frac{D_R^2}{D_0^2}$$

- Тут D_R^2 – дисперсія відхилень розрахункових значень y_i від середнього \bar{y} , і D_0^2 – дисперсія відхилень експериментальних значень y_i від середнього \bar{y} .

- Отже, ми нехтуємо коефіцієнтом рівняння а і маємо остаточне рівняння лінійної регресії:

$$\% \text{ аберацій} = 18,25 * D(\text{Гр})$$

- Тому 50% аберацій можна отримати з використанням ДОЗИ

$$D = 50\% / 18,25 = 2.7 \text{ Гр}$$

	A(X1)	B(Y1)
Comments		
Long Name	Independent Variable	Linear Fit of % àáâäåö¸é Inc
Parameters	Fitted Values	
45	2,38889	45,56298
46	2,43636	46,4295
47	2,48384	47,29602
48	2,53131	48,16254
49	2,57879	49,02906
50	2,62626	49,89558
51	2,67374	50,76209
52	2,72121	51,62861
53	2,76869	52,49513
54	2,81616	53,36165
55	2,86364	54,22817
56	2,91111	55,09469
57	2,95859	55,96121
58	3,00606	56,82773
59	3,05354	57,69425
60	3,10101	58,56077
61	3,14848	59,42729
62	3,19596	60,29381
63	3,24343	61,16032
64	3,29091	62,02684
65	3,33838	62,89336
66	3,38586	63,75988
67	3,43333	64,6264
68	3,48081	65,49292
69	3,52828	66,35944
70	3,57576	67,22596
71	3,62323	68,09248
72	3,67071	68,959
73	3,71818	69,82552
74	3,76566	70,69204
75	3,81313	71,55855
76	3,86061	72,42507

Інтерпретація результатів:

- Коли для моделі $p < 0,05$ – регресійна модель адекватно описує взаємозв'язок між Y та X ,
- Коефіцієнт детермінації r^2 вказує, яка частина варіація Y визначається варіацією X , коли $r^2 > 0.5$ – модель є значущою на рівні $P=0,95$
- Ваговий коефіцієнт b показує, наскільки змінюється показник Y при одиничній зміні X .
- У випадку, коли для коефіцієнтів a або b $p > 0,05$ – цим коефіцієнтом нехтують як незначущим
- Застосування результатів аналізу з прогностичною метою можливо тільки для того діапазону даних, на якому вони були отримані

Нелінійний регресійний аналіз

- Найбільш часто зустрічаються у біології такі нелінійні залежності:
- Найпростіший спосіб аналізу таких даних – лінеаризація, зокрема, логарифмуванням:

- Експоненційна

$$y = e^{a \cdot bx} \longrightarrow \ln y = a + b \cdot x, \text{ приймемо } Z = \ln y$$

- Ступенева

$$y = a \cdot x^b \longrightarrow \ln y = \ln a + b \cdot \ln x, \text{ приймаємо } \ln y = Z, \\ b_0 = \ln a, t = \ln x$$

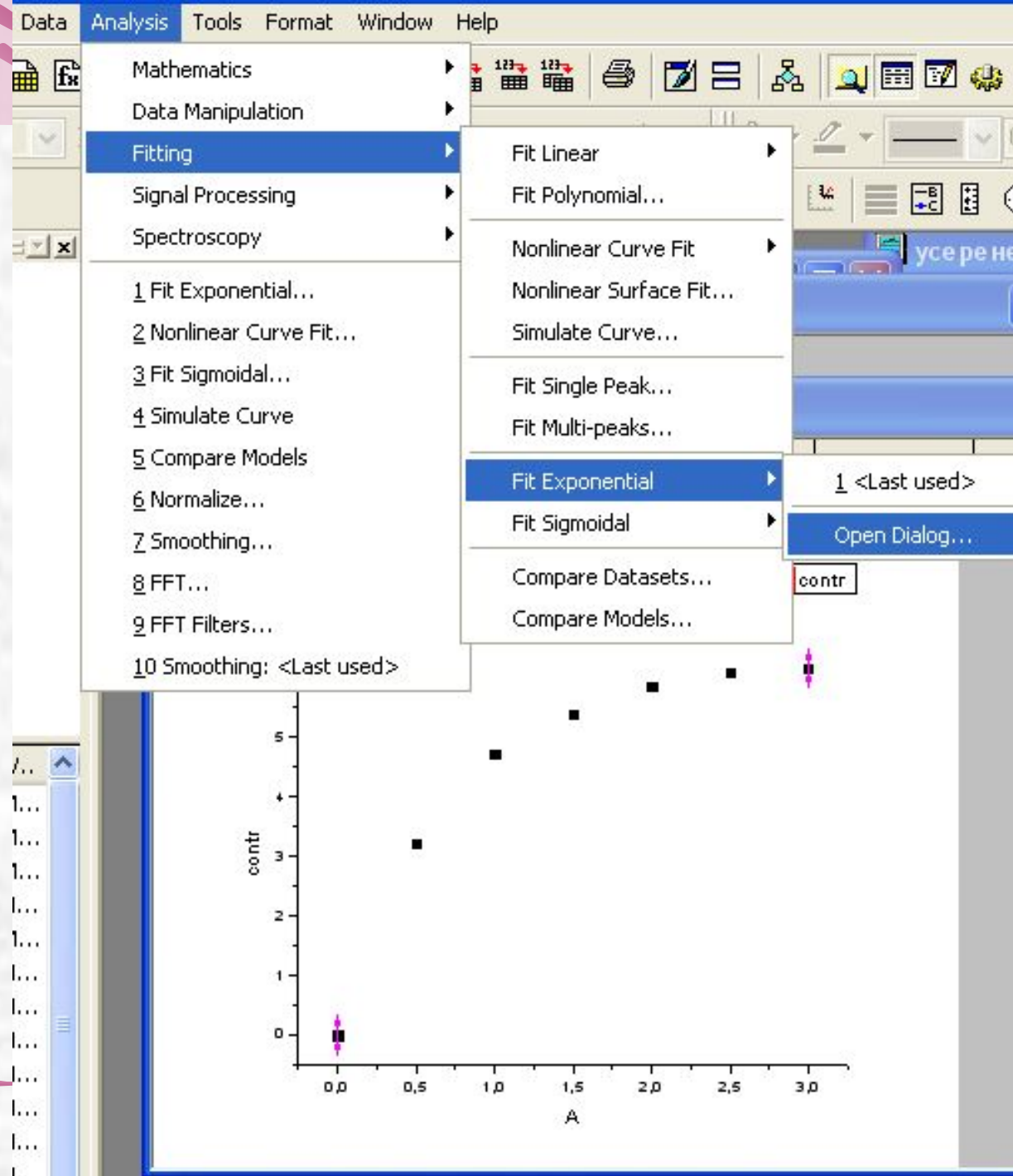
- Зворотна

$$y = a + \frac{b}{x}$$

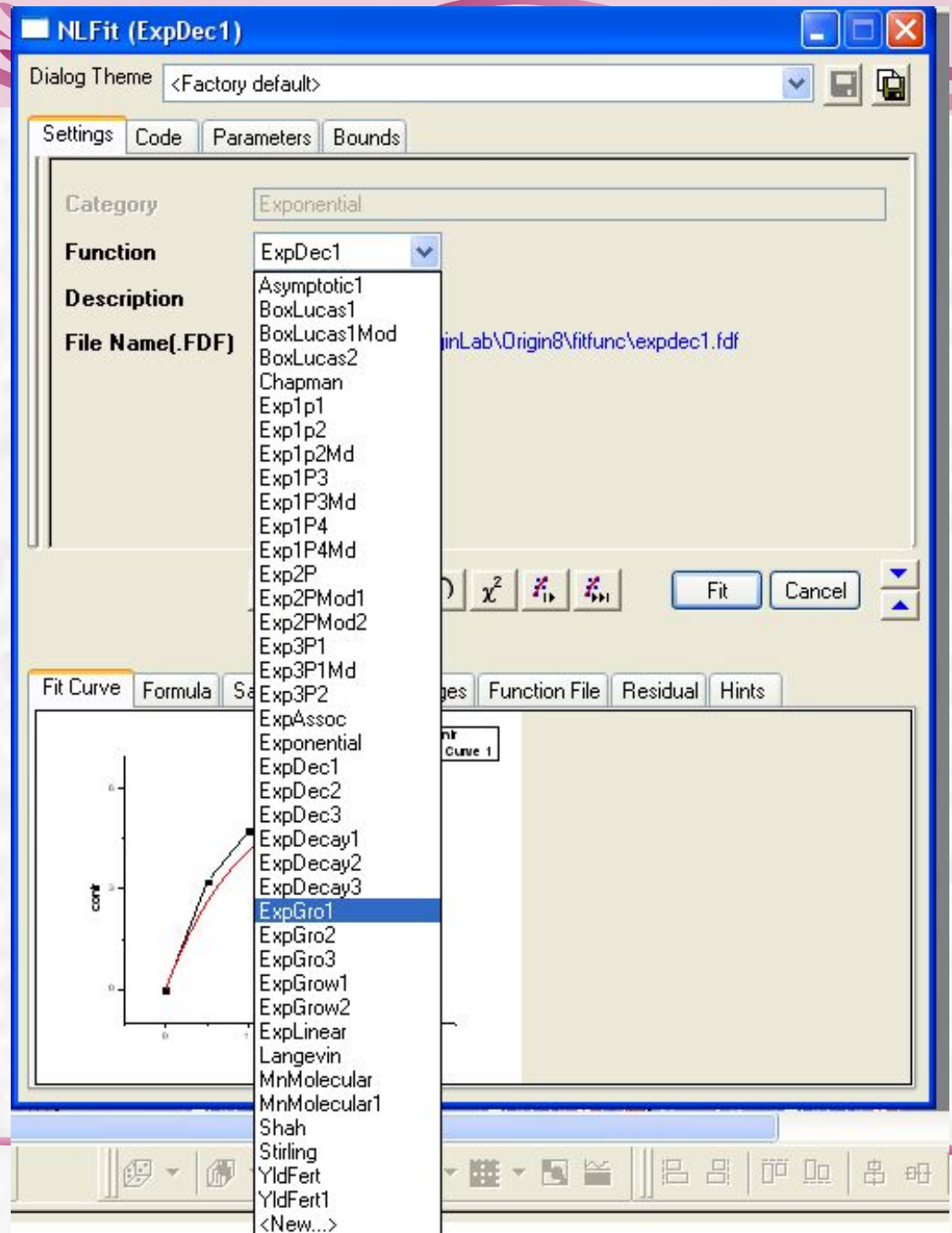
$$Z = b_0 + b \cdot t$$

Приклад створення моделі експоненційної регресії

- Маємо результати дослідження зміни довжини м'язу при постійному навантаженні (ізотонічний режим)
- У програмі OriginPro 8 регресійну модель можна отримати:



Вікно нелінійної регресії:



Notes

Description	NL Fit
User Name	8
Operation Time	10.01.2010 21:17:24
Model	ExpGro1
Equation	$y = A1 \cdot \exp(x/t1) + y0$
Report Status	New Analysis Report

Результати

Input Data

Parameters

		Value	Fixed	Standard Error	t-Value	Prob> t	LCL	UCL	Dependency	CI Half-Width	Lower Bou
contr	y0	6,23339	N	0,04898	127,26051	2,28664E-8	--	--	0,77237	0,13599	
	A1	-6,21627	N	0,07174	-86,64635	1,06357E-7	--	--	0,43861	0,19919	
	t1	-0,70931	N	0,02138	-33,17337	4,92455E-6	--	--	0,68699	0,05937	

Iterations Performed = 6
 Total Iterations in Session = 6
 Fit converged - tolerance criterion satisfied.

Fit Status Code :
 100 : Fit converged

Statistics

	contr
Number of Points	7
Degrees of Freedom	4
Reduced Chi-Sqr	0,00382
Residual Sum of Squares	0,01529
Correlation	0,99974
R Value	0,99974
R-Square(COD)	0,99949
Adj. R-Square	0,99923
Root-MSE (SD)	0,06183
Norm of Residuals	0
Fit Status	Succeeded(100)

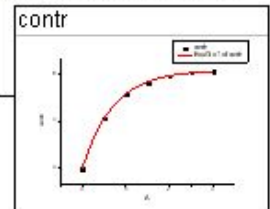
Summary

	y0		A1		t1		Statistics	
	Value	Error	Value	Error	Value	Error	Reduced Chi-Sqr	Adj. R-Square
contr	6,23339	0,04898	-6,21627	0,07174	-0,70931	0,02138	0,00382	0,99923

ANOVA

		DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Prob>F
contr	Regression	3	171,01013	57,00338	14911,30135	1,79851E-8
	Residual	4	0,01529	0,00382		
	Uncorrected Total	7	171,02542			
	Corrected Total	6	29,87478			

Fitted Curves Plot



Residual vs. Independent Plot

