

# Теория Графов

ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

# План лекции

- 1.Способы задание графов.
- 2.Графы :
  - А) Петерсена.
  - Б) Платонова.
  - В) Эйлера.
  - Г) Гамильтона.
- 3.Раскраска графов.
- 4.Использование графов .
- 5.Связный граф .

# 1. Способы задание графов

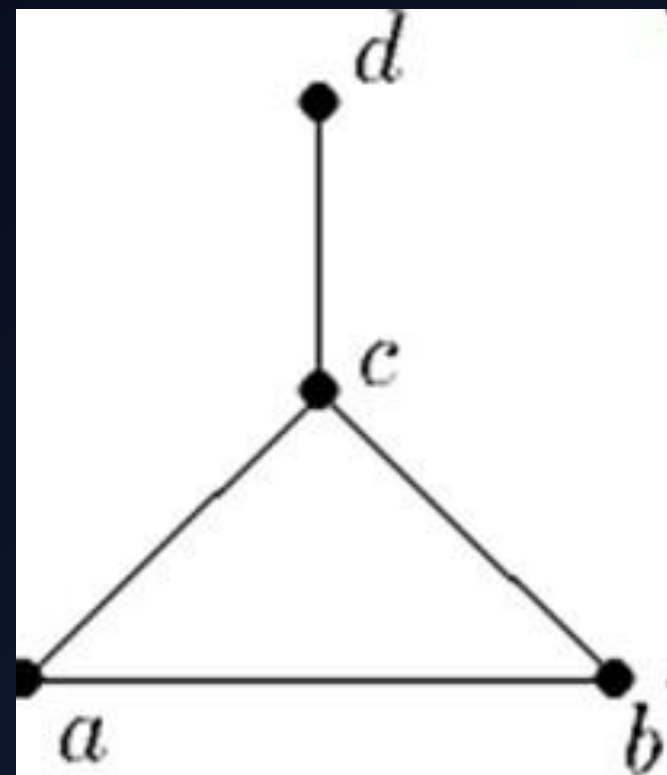
- 1) Явное задание графа как алгебраической системы.
- 2) Геометрический.
- 3) Матрица смежности.
- 4) Матрица инцидентности.

# 1) Явное задание графа как алгебраической системы

- $\langle \{a, b, c, d\}, \{u, v, w, x\}; \{(u, a), (u, b), (v, b), (v, c), (w, c), (w, a), (x, c), (x, d)\} \rangle$ .  
Так как мы рассматриваем только простые графы, граф нам проще определять как модель, носителем которой является множество вершин, а отношение - бинарное отношение смежности вершин. Тогда данный граф запишется как  $\langle \{a, b, c, d\}; \{(a, b), (b, a), (b, c), (c, b), (a, c), (c, a), (c, d), (d, c)\} \rangle$ .

## 2) Геометрический способ

Вершины изображают точками на плоскости, а ребра – линиями, соединяющими соответствующие точки. Для изображения дуги используется линия со стрелкой, указывающей направление от начала к концу дуги.



### 3) Матрица смежности

Матрица смежности вершин – это квадратная матрица, размер которой определяется числом вершин в графе.

	A	B	C	D
A	0	1	1	0
B	1	0	1	0
C	1	1	0	1
D	0	0	1	0

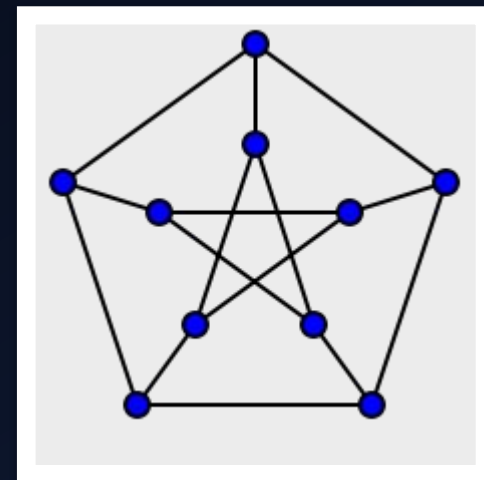
## 4) Матрица инцидентности

*Матрица инцидентности* – это прямоугольная матрица, число строк которой равно числу вершин, а число столбцов – числу дуг (ребер) графа.

	U	V	W	X
A	1	0	0	0
B	1	1	1	0
C	0	1	0	1
D	0	0	1	1

# Граф Петерсена

- Граф Петерсена является неориентированным кубическим графом. Его можно построить, взяв дополнение рёберного графа от полного 5-графа. Имеет 10 вершин и 15 рёбер. Сильно регулярен и рёберно регулярен, то есть, выбрав вершину или ребро можно отобразить граф на себя, переведя выбранный объект в любую вершину (ребро).



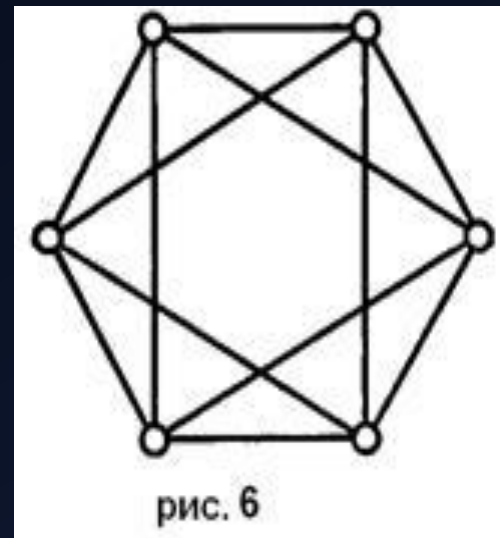


# Свойства

- Не является гамильтоновым, в то же время, результат удаления вершины — гамильтонов граф.
- Хроматическое число графа — 3.
- Хроматический класс (раскраска рёбер) — 4, иными словами, граф не является суммой трех 1-факторов, что показал ещё сам Петерсен.
- При изображении на плоскости имеет не менее двух самопересечений.
- Между любыми двумя вершинами существует единственный путь длины не более двух.

# Граф Платонова

- Платоновыми графами называются графы, образованные вершинами и ребрами пяти правильных многогранников – Платоновых тел: тетраэдра, куба, октаэдра, додекаэдра, икосаэдра.



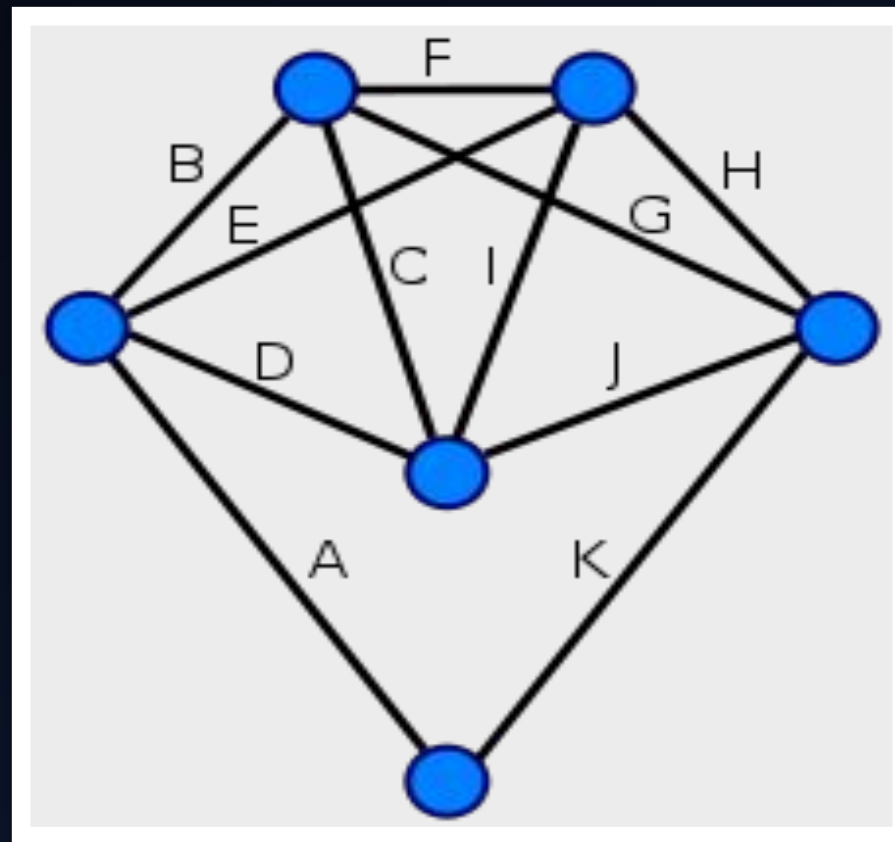
# Граф Эйлера

Цикл в графе называется эйлеровым, если он содержит все рёбра графа. Связный граф, в котором есть эйлеров цикл, называется эйлеровым графом.

Теорема Эйлера. Связный граф  $G$  является эйлеровым тогда и только тогда, когда все его вершины чётной степени.

Необходимость. Пусть  $G$  – эйлеров граф.  $C$  - эйлеров цикл этого графа. Выполним его обход. Если  $v$ -любая вершина  $G$ , то цикл содержит ребро, по которому он входит в  $v$  и другое, по которому выходит. Следовательно, у любой вершины  $v$  имеется чётное число рёбер, поэтому  $v$  - чётное число.

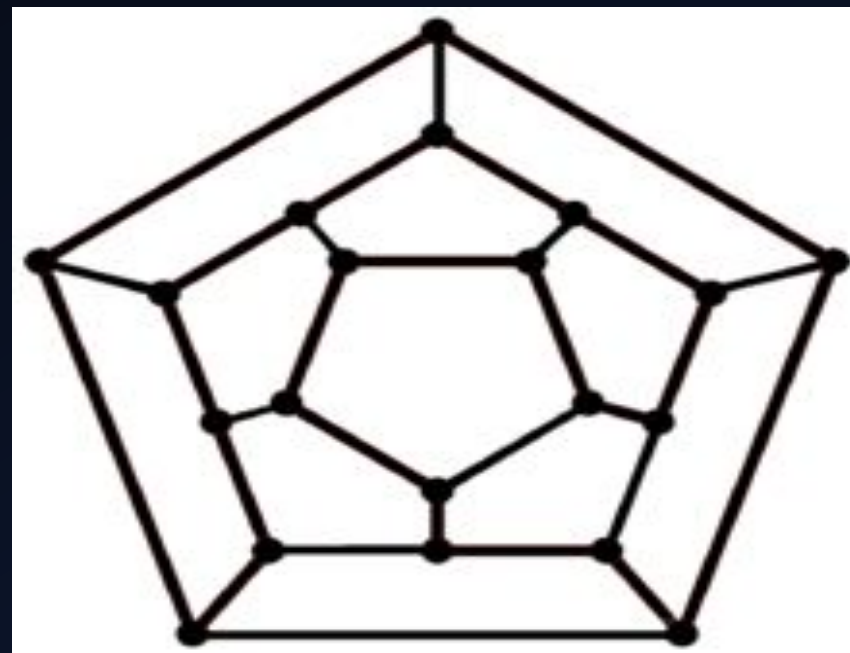
Каждая вершина этого графа имеет чётную степень, поэтому этот граф — эйлеров. Обход рёбер в алфавитном порядке даёт эйлеров цикл.



# Граф Гамильтона

- Гамильто́нов граф — математический объект теории графов. Представляет собой граф (набор точек и соединяющих их линий), который содержит гамильтонов цикл. При этом гамильтоновым циклом является такой цикл (замкнутый путь), который содержит все вершины (точки) данного графа.
- Также с гамильтоновым графом тесно связано понятие гамильтонова пути, который является простым путём (путём без петель), проходящим через каждую вершину графа ровно один раз. Гамильтонов путь отличается от цикла тем, что у пути начальные и конечные точки могут не совпадать, в отличие от цикла. Гамильтонов цикл является гамильтоновым путём.

- Гамильтонова линия для додекаэдра, предложенная Гамильтоном для замены его игры «вокруг света» на задачу для плоского графа.



# Раскраска графов

- В теории графов, раскраска графов является частным случаем разметки графов. При раскраске элементам графа ставятся в соответствие метки с учётом определенных ограничений; эти метки традиционно называются “цветами”. В простейшем случае, такой способ окраски вершин графа, при котором любым двум смежным вершинам соответствуют разные цвета, называется раскраской вершин. Аналогично, раскраска ребер присваивает цвет каждому ребру так, чтобы любые два смежных ребра имели разные цвета. Наконец, раскраска областей планарного графа назначает цвет каждой области, так, что каждые две области, имеющие общую границу, не могут иметь одинаковый цвет.
- Раскраска вершин – главная проблема раскраски графов, все остальные задачи в этой области могут быть перенесены на эту модель. Например, раскраска ребер графа - это раскраска вершин его реберного графа, а раскраска областей планарного графа – это раскраска вершин двойственного графа. Тем не менее, другие проблемы раскраски графов часто ставятся и решаются в изначальной постановке. Причина этого частично заключается в том, что это даёт лучшее представление о происходящем и более показательнее, а частично из-за того, что некоторые задачи таким образом решать удобнее (например, раскраска ребер).

# Реберная раскраска

- Реберной раскраской называется присвоение ребром графа  $k$  различных цветов . Реберная раскраска называется правильной , если никакие две смежных ребра не получают в ней одинакового цвета . Граф называется реберно-раскрашиваемым , если он имеет правильную реберную раскраску .
- Хроматический индекс или реберное хроматическое число  $\chi(G)$  графа  $G$  – это минимальное число  $k$ , для которого граф  $G$  имеет правильную реберную  $k$ -раскраску . Граф  $G$  называется реберно - хроматическим если  $\chi(G)=k$  .  
Хроматический индекс равен 4.



# Тотальная раскраска

- В теории графов тотальной раскраской называется вид раскраски вершин и рёбер графа. Если не указано явно другое, тотальная раскраска предполагается правильной в том смысле, что никакие смежные вершины и никакие смежные рёбра и вершины, лежащие на концах рёбер, не раскрашиваются в один и тот же цвет.
- Тотальное хроматическое число  $\chi''(G)$  графа  $G$  — это наименьшее число цветов, необходимых для тотальной раскраски  $G$ .
- Тотальным графом  $T = T(G)$  графа  $G$  называется граф, в котором множество вершин графа  $T$  соответствуют вершинам и рёбрам графа  $G$ ;
- две вершины в  $T$  смежны тогда и только тогда, когда соответствующие элементы либо смежны в  $G$ , либо инцидентны.

# Свойства тотальной раскраски

- $\chi''(G) \geq \Delta(G) + 1$ .
- $\chi''(G) \leq \Delta(G) + 1026$ .
- $\chi''(G) \leq \Delta(G) + 8 \ln 8(\Delta(G))$  для достаточно большого  $\Delta(G)$ [2].
- $\chi''(G) \leq \text{ch}'(G) + 2$ .
- Здесь  $\Delta(G)$  — это максимальная степень, а  $\text{ch}'(G)$  — индекс предписанной раскраски рёбер

# Использование графов

- неориентированный граф;
- граф с цветными ребрами;
- ориентированный граф;
- граф-дерево или дерево возможностей .

# Неориентированные графы

- В них ребрами являются отрезки или части кривой линии.

# Ориентированный граф

- Одну вершину считают началом ребра, а другую – концом. В ориентированном графе все ребра должны быть ориентированы.

# Граф-дерево

- Графы такого вида используются при решении комбинаторных задач, когда надо осуществить перебор всех возможных вариантов.

## Граф с ребрами двух цветов

- Эти графы соответствуют таким ситуациям, в которых одни пары элементов множества находятся между собой в данном отношении, а другие – нет.

# Связный граф

- Связный граф — граф, содержащий ровно одну компоненту связности. Это означает, что между любой парой вершин этого графа существует как минимум один путь.



- В ориентированных графах различают несколько понятий связности.
- Ориентированный граф называется сильно-связным, если в нём существует (ориентированный) путь из любой вершины в любую другую, или, что эквивалентно, граф содержит ровно одну сильно связную компоненту.
- Ориентированный граф называется слабо-связным, если является связным неориентированный граф, полученный из него заменой ориентированных рёбер неориентированными.

# Критерии связного графа

- У него одна компонента связности
- Существует путь из любой вершины в любую другую вершину
- Существует путь из заданной вершины в любую другую вершину
- Содержит связный подграф, включающий все вершины исходного графа
- Содержит в качестве подграфа дерево, включающее все вершины исходного графа (такое дерево называется основным)
- При произвольном делении его вершин на 2 группы всегда существует хотя бы 1 ребро, соединяющее пару вершин из разных групп