

# Лекция 15

**Уравнения Максвелла.**

- 4.11. Сравнение основных теорем электростатики и магнитостатики.
- 4.12. Вихревое электрическое поле. Первое уравнение Максвелла.
- 4.13. Второе уравнение Максвелла.
- 4.14. Гипотеза Максвелла о токе смещения. Взаимопревращаемость электрических и магнитных полей. Третье уравнение Максвелла
- 4.15. Четвертое уравнение Максвелла.
- 4.16. Дифференциальная форма уравнений Максвелла.
- 4.17. Замкнутая система уравнений Максвелла. Материальные уравнения.
- 4.18. Следствия из уравнений Максвелла. Электромагнитные волны. Скорость света.

## 4.11. Сравнение основных теорем электростатики и магнитостатики.

До сих пор мы изучали *статические* электрические и магнитные поля, то есть такие поля, которые создаются *неподвижными* зарядами и *постоянными* токами. **Основные уравнения**, описывающие свойства этих полей, приведены в таблице 1.

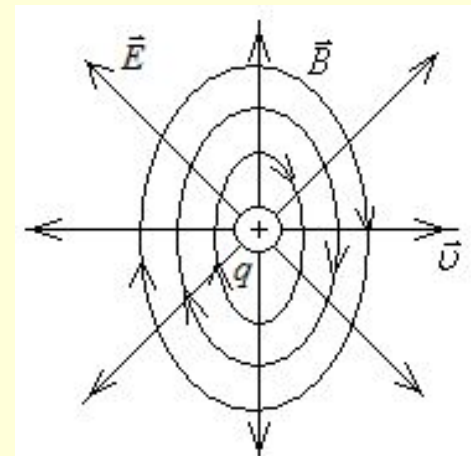
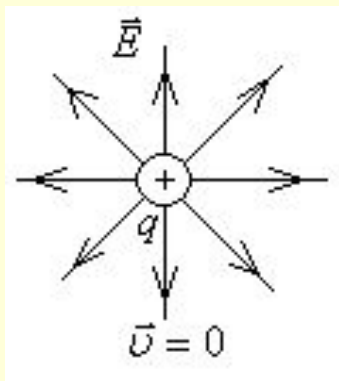
*Таблица 1. Основные уравнения электростатики и магнитостатики.*

	<b>Электростатика</b>	<b>Магнитостатика</b>
<b>Теорема Гаусса</b>	$\Phi_D = \oiint_S \vec{D} d\vec{S} = \sum_i q_i$ <p style="text-align: center;"><i>Источники электрического поля – заряды</i></p>	$\Phi_B = \oiint_S \vec{B} d\vec{S} = 0$ <p style="text-align: center;"><i>Соленоидальность магнитного поля</i></p>
<b>Теорема о циркуляции поля</b>	$U_E = \oint_l \vec{E} dl = 0$ <p style="text-align: center;"><i>Потенциальность электрического поля</i></p>	$U_H = \oint_l \vec{H} dl = \sum_i I_i$ <p style="text-align: center;"><i>Источники магнитного поля – токи</i></p>
<b>Материальные уравнения</b>	$\vec{D} = \epsilon\epsilon_0 \vec{E}$	$\vec{B} = \mu\mu_0 \vec{H}$

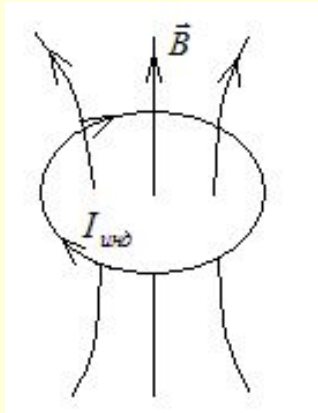
**Первое,** на что обращает внимание сравнение этих уравнений – это то, что *постоянные* электрическое и магнитное поля имеют различную физическую сущность: источниками электростатического поля являются *заряды*, источниками магнитного поля – *постоянные токи*; электростатическое поле является *потенциальным*, а магнитное – *вихревым (соленоидальным)*.

**Второе,** что более важно для дальнейшего – это то, что система уравнений электростатики *не содержит* никаких характеристик магнитного поля, как и система уравнений магнитостатики *не содержит* никаких характеристик электрического поля. Другими словами, уравнения электростатики и магнитостатики являются *независимыми*, а электрические и магнитные поля, описываемые этими уравнениями, существуют *отдельно* одно от другого.

С другой стороны, нам известны по крайней мере два явления, которые указывают на *взаимосвязь* электрических и магнитных полей. Первое из них – появление *магнитного поля* у заряда, *движущегося относительно* неподвижного наблюдателя (или при движении наблюдателя *относительно* неподвижного заряда). В данном случае один и тот же объект – *электрический заряд* – является *источником* как *электрического*, так и *магнитного* полей.



Другое явление это – явление *электромагнитной индукции*, в котором *переменное магнитное поле* является причиной возникновения *электрического тока* – направленного движения зарядов в проводнике.



Переменное магнитное поле приводит в движение электрические заряды.

Глубокая *взаимосвязь* и *взаимопревращаемость* электрических и магнитных полей в природе были установлены Джеймсом Максвеллом (Maxwell J., 1831-1879), обобщившим труды Фарадея и создавшим *теорию электромагнитного поля*. В основе этой теории лежит система уравнений (получивших название *уравнений Максвелла*), которая позволила описать не только всю совокупность известных тогда электрических и магнитных явлений, но и предсказать новые явления, в частности, существование *электромагнитных волн*. Теория Максвелла является одной из самых совершенных физических теорий. Достаточно сказать, что она послужила *базисом* для создания А.Эйнштейном (Einstein A., 1879-1955) *специальной теории относительности*. Отметим также, что в настоящее время не известно ни одного экспериментального факта из области макроскопических электромагнитных явлений, который противоречил бы этой теории. Перейдем к изучению основ теории Максвелла.

## 4.12. Вихревое электрическое поле. Первое уравнение Максвелла.

Возникновение индукционного тока в *неподвижном* проводнике при изменении магнитного потока свидетельствует о появлении в контуре *сторонних сил*, приводящих в движение заряды. Как мы уже знаем, эти сторонние силы обусловлены возникающим в контуре особым *вихревым* электрическим полем, циркуляция которого по замкнутому контуру *отлична от нуля* и равна ЭДС индукции:

$$\varepsilon_i = \oint \vec{E}^* \cdot d\vec{l} \quad .$$

С другой стороны, в соответствии с *основным законом* электромагнитной индукции Фарадея, величина ЭДС индукции определяется скоростью изменения потока магнитной индукции, то есть:

$$\varepsilon_i = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad ,$$

где интегрирование производится по  $S$  произвольной поверхности, опирающейся на контур.

Приравнивая эти выражения, находим:

$$\oint_l \vec{E}^* \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad .$$

Максвелл предположил, что изменяющееся со временем магнитное поле приводит к появлению в пространстве электрического поля  $\vec{E}^*$ , независимо от того присутствует в этом пространстве проводящий контур или нет. Наличие контура лишь позволяет обнаружить это электрическое поле по возникновению индукционного тока в проводнике.

Вихревое электрическое поле.

В общем случае электрическое поле  $\vec{E}$  складывается из потенциального поля  $\vec{E}^0$ , циркуляция которого по замкнутому контуру равна нулю, и вихревого поля  $\vec{E}^*$ :

$$\vec{E} = \vec{E}^0 + \vec{E}^* ,$$

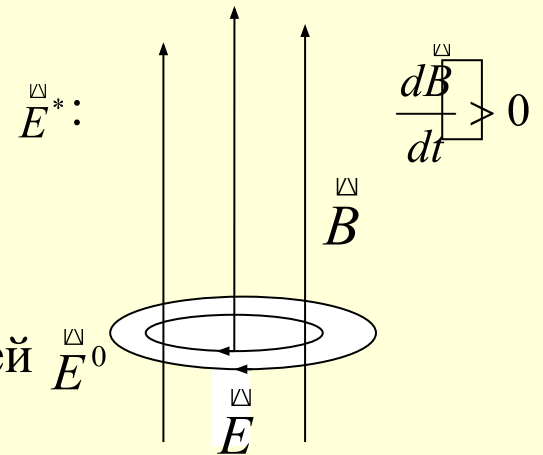
где

$$\oint \vec{E}^0 \cdot d\vec{l} = 0 .$$

На основании сказанного, сложив циркуляции полей  $\vec{E}^0$  и  $\vec{E}^*$ , приходим к **первому уравнению** Максвелла в интегральной форме:

$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Интеграл в левой части берется по произвольному замкнутому контуру, в правой части – по произвольной поверхности, опирающейся на этот контур.



## 4.13. Второе уравнение Максвелла

В силу общности теоремы Гаусса применительно к любым векторным полям и отсутствия в природе «магнитных зарядов» (о чем уже говорилось ранее), *второе уравнение* Максвелла в *интегральной* форме совпадает с теоремой Гаусса для магнитной индукции:

$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

Интегрирование производится по произвольной замкнутой поверхности  $S$ .



## 4.14. Гипотеза Максвелла о токе смещения. Взаимопревращаемость электрических и магнитных полей. Третье уравнение Максвелла

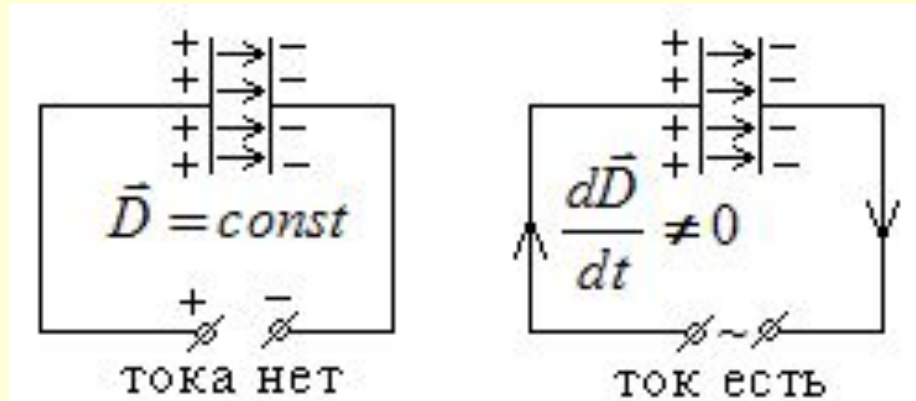
Основная идея Максвелла – это идея о *взаимопревращаемости* электрических и магнитных полей. Максвелл предположил, что не только переменные магнитные поля являются источниками электрических полей, но и *переменные электрические* поля являются *источниками магнитных* полей. Согласно гипотезе Максвелла, изменяющееся во времени электрическое поле создает в окружающем пространстве *вихревое* магнитное поле  $\vec{H}^*$ , циркуляция которого по любому замкнутому контуру, равна скорости изменения потока электрической индукции  $\vec{D}$  через поверхность, ограниченную этим контуром:

$$\oint_l \vec{H}^* \cdot d\vec{l} = \frac{d}{dt} \iint_S \vec{D} \cdot d\vec{S}$$

Величина, стоящая в правой части этого выражения, получила название *тока смещения*:

$$I_{cm} = \frac{d}{dt} \iint_S \vec{D} \cdot d\vec{S}$$

Смысл введения этой величины можно пояснить следующим опытом. Конденсатор, подключенный к источнику *постоянного* тока, представляет собой разрыв цепи для тока проводимости, поэтому в такой цепи ток *не течет*. При этом в конденсаторе имеется электрическое поле, индукция которого  $\vec{D} = const$  .



Если конденсатор подключить к источнику *переменного* тока, то, как показывает опыт, в цепи *будет течь* переменный ток. Его существование можно объяснить только тем, что в пространстве между обкладками ток проводимости *замыкается* током смещения, поскольку теперь  $\vec{D} \neq const$  . В этом случае конденсатор перестает представлять собой разрыв цепи.

В соответствии с гипотезой Максвелла *полный* ток в проводнике складывается из тока *проводимости*  $I$  и тока *смещения*  $I_{см}$ , каждый из которых является источником *своего* магнитного поля так, что общее магнитное поле, существующее вокруг проводника, есть:

$$\vec{H} = \vec{H}^0 + \vec{H}^* \quad ,$$

где

$$\oint_l \vec{H}^0 dl = I \quad .$$

Следовательно,

$$\oint_l \vec{H} dl = I + I_{см} \quad .$$

Если контур интегрирования охватывает несколько проводников с током, то в соответствии с *теоремой о циркуляции* магнитного поля, мы должны написать:

$$\oint_l \vec{H} dl = \frac{d}{dt} \iint_S \vec{D} dS + \sum_i I_i$$

Написанное уравнение является *третьим уравнением* Максвелла в *интегральной* форме.

«Размазав» токи по площади поверхности  $S$ , опирающейся на контур  $l$ , можно записать последнее уравнение также в виде:

$$\oint_l \vec{H} dl = \frac{d}{dt} \iint_S \vec{D} dS + \iint_S \vec{j} dS$$

где  $\vec{j}$  - плотность тока, протекающего через поверхность  $S$ .

По аналогии с плотностью тока проводимости величину

$$\vec{j}_{см} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

называют *плотностью тока смещения*.

## 4.15. Четвертое уравнение Максвелла.

*Четвертое уравнение* Максвелла в *интегральной* форме совпадает с теоремой Гаусса для электрической индукции:

$$\oiint_S \vec{D} d\vec{S} = \sum_i q_i$$

Интегрирование производится по произвольной замкнутой поверхности  $S$ , окружающей систему зарядов  $q_i$ .

В случае непрерывного распределения зарядов в охваченном поверхностью  $S$  объеме  $V$ , это уравнение запишется в виде:

$$\oiint_S \vec{D} d\vec{S} = \iiint_V \rho dV$$

где  $\rho$  – объемная плотность заряда.

## 4.16. Дифференциальная форма уравнений Максвелла.

1. Применяя *теорему Стокса*, преобразуем левую часть *первого уравнения* Максвелла к виду:

$$\oint_l \vec{E} d\vec{l} = \iint_S \text{rot} \vec{E} d\vec{S} \quad .$$

Тогда само уравнение можно переписать как

$$\iint_S \left( \text{rot} \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) d\vec{S} = 0 \quad ,$$

откуда, в силу произвольности поверхности интегрирования, имеем:

$$\text{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

2. Применяя *теорему Остроградского* ко *второму уравнению* Максвелла, находим:

$$\oiint_S \vec{B} d\vec{S} = \iiint_V \text{div} \vec{B} dV = 0 \quad ,$$

откуда, в силу произвольности объема интегрирования, имеем:

$$\text{div} \vec{B} = 0$$

3. Применяя *теорему Стокса*, преобразуем левую часть **третьего уравнения** Максвелла к виду:

$$\oint_S \vec{H} d\vec{l} = \iint_S \text{rot} \vec{H} dS \quad .$$

Тогда само уравнение можно переписать как

$$\iint_S (\text{rot} \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \vec{j}) dS = 0 \quad ,$$

откуда, в силу произвольности поверхности интегрирования, имеем:

$$\text{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}$$

4. Применяя *теорему Остроградского*, преобразуем левую часть **четвертого уравнения** Максвелла к виду:

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \iiint_V \text{div} \vec{D} dV \quad .$$

Тогда само уравнение можно переписать как

$$\iiint_V (\text{div} \vec{D} - \rho) dV = 0 \quad ,$$

откуда, в силу произвольности объема интегрирования, имеем:

$$\text{div} \vec{D} = \rho$$

## 4.17. Замкнутая система уравнений Максвелла. Материальные уравнения.

Для замыкания системы уравнений Максвелла необходимо еще указать связь между векторами  $\vec{D}$ ,  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$ , то есть конкретизировать свойства *материальной среды*, в которой рассматривается электромагнитное поле. Если эти соотношения известны (они называются *материальными уравнениями*), то по заданному распределению зарядов  $\rho$  и токов  $\vec{j}$  однозначно находится распределение электрических и магнитных полей в данной среде; или по заданному распределению полей находится распределение зарядов и токов. Для *однородной изотропной* среды материальные уравнения записывают обычно в виде:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon(E) \vec{E} ; \quad \vec{B} = \mu_0 \mu(H) \vec{H} .$$

Если среда не обладает сегнетоэлектрическими или ферромагнитными свойствами, то  $\varepsilon(E) = \varepsilon = \text{const}$  и  $\mu(H) = \mu = \text{const}$ . В этом случае материальные уравнения имеют наиболее простой вид:

$$\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E} \quad ; \quad \vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}$$

(в частности, для вакуума  $\varepsilon = \mu = 1$ , тогда  $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$  и  $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$  ).

Следует подчеркнуть, что написанные соотношения справедливы только для *неподвижных сред*. В движущихся средах они имеют более сложный вид, обусловленный требованиями *релятивистской инвариантности* уравнений Максвелла.

**Таблица 2. Замкнутая система уравнений Максвелла.**

Интегральная форма	Дифференциальная форма
$\oint_l \vec{E} d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} d\vec{S}$	$\text{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
$\oiint_S \vec{B} d\vec{S} = 0$	$\text{div} \vec{B} = 0$
$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = \frac{d}{dt} \iint_S \vec{D} d\vec{S} + \iint_S \vec{j} d\vec{S}$	$\text{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}$
$\oiint_S \vec{D} d\vec{S} = \iiint_V \rho dV$	$\text{div} \vec{D} = \rho$

$$\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}$$



## 4.18. Следствия из уравнений Максвелла. Электромагнитные волны. Скорость света.

Рассмотрим некоторые основные следствия, вытекающие из уравнений Максвелла, приведенных в таблице 2. Прежде всего, отметим, что эти уравнения *линейные*. Отсюда следует, что *электромагнитное поле* удовлетворяют *принципу суперпозиции*.

Одним из *главных* следствий, вытекающих из уравнений Максвелла, является то, что электромагнитное поле может существовать в виде *электромагнитных волн* в отсутствие всяких зарядов и токов

$$(\rho = 0; \mathbf{j} = 0).$$

В этом случае уравнения Максвелла принимают вид (в дифференциальной форме):

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}; \operatorname{div} \mathbf{D} = 0 \\ \mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}; \mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H} \end{array} \right.$$

Применяя к первому из этих уравнений операцию  $rot$ , будем иметь:

$$rot(rot\vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}(rot\vec{B})$$

Но согласно третьему уравнению (с учетом материальных уравнений):

$$rot\vec{B} = \mu\mu_0 rot\vec{H} = \mu_0\mu \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \mu_0\mu\varepsilon_0\varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Используя это соотношение, получим:

$$rotrot\vec{E} = -\varepsilon_0\mu_0\varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Далее, принимая во внимание, что  $rotrot\vec{E} = graddiv\vec{E} - \Delta\vec{E}$ , причем в силу четвертого уравнения  $div\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon} div\vec{D} = 0$ , приходим к так называемому **волновому уравнению** для электрического поля  $\vec{E}$ :

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

где обозначено

$$\Delta \equiv \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

- оператор Лапласа (в декартовых координатах).

Аналогичное волновое уравнение получается для магнитного поля  $\vec{H}$  :

$$\Delta \vec{H} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0$$

Совместным решением этих уравнений является векторная **волновая функция** электромагнитного поля:

$$\begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{E}_0 \\ \vec{H}_0 \end{pmatrix} \exp \left[ i \left( t - \frac{\vec{r} \cdot \vec{n}}{v} \right) \right], \quad \vec{r} = \vec{r}(x, y, z) .$$

Коэффициент  $v$  имеет смысл **фазовой скорости** электромагнитной волны (см. *Лекцию 17*):

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0 \epsilon \mu}}$$

Для вакуума:  $\epsilon = 1; \mu = 1$ . Тогда:  $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 12,57 \cdot 10^{-7}}} = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ , что совпадает со **скоростью света** в вакууме  $c$ . Таким образом, мы приходим к выводу, что **свет** – это **электромагнитная волна**.

В прозрачной диэлектрической среде скорость света

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}} = \frac{c}{n}$$

где величина  $n = \sqrt{\epsilon \mu}$  называется **показателем преломления** среды. Для многих **оптически прозрачных** сред эта формула дает хорошие совпадения с измеренными на опыте значениями  $n$ , что также является одним из достижений теории Максвелла.

Некоторые другие следствия, вытекающие из **волновой теории** электромагнитного поля, рассматриваются в *Лекции 17*.