Відношення та їх властивості

Лекція 3

Д.е.н., к.т.н. професор
В.Л. Плескач

Факультет інформаційних технологій
Кафедра програмування та комп’ютерної техніки, КНУ

Поняття відношення

- Теорія відношень реалізує у математичних термінах на абстрактних множинах реальні зв'язки між реальними множинами. Підмножина R $\supseteq A^n$ називається n-місним відношенням на множині A. Одномісне (одновимірне) відношення – це просто деяка підмножина A. Такі відношення називають ознаками. Властивості одномісних відношень – це властивості підмножин A, тому для випадку термін "відношення" вживається рідко. Найчастіше зустрічаються і добре вивченими є двомісні або *бінарні* відношення. Якщо a і b знаходяться у відношенні R, це зазвичай записується у вигляді aRb.

Поняття відношення

- Теорія відношень реалізує у математичних термінах на абстрактних множинах реальні зв'язки між реальними множинами. Підмножина R $\supseteq A^n$ називається n-місним відношенням на множині А. Одномісне (одновимірне) відношення – це просто деяка підмножина А. Такі відношення називають ознаками. Властивості одномісних відношень – це властивості підмножин А, тому для випадку термін "відношення" вживається рідко. Найчастіше зустрічаються і добре вивченими є двомісні або *бінарні* відношення. Якщо a і b знаходяться у відношенні R, це зазвичай записується у вигляді aRb.

Кортеж

Кортеж – це послідовність елементів, в якій кожен елемент займає визначене місце: $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Число елементів кортежу називають довжиною.

Кортеж довжиною 2 називають ***упорядкованою парою***.

Декартів добуток множин

Декартів добуток n множин $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ – це множина упорядкованих наборів з ***n*** елементів – $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, в яких перший елемент належить множині X_1, другий – множині X_2, … , ***n***-й – множині X_n.

Декартів добуток $X \times X \times \ldots \times X$, в якому одна і та ж множина X множиться ***n*** раз сама на себе, називають ***декартовим степенем*** множини і позначають X^n.

Множина X^2 називається ***декартовим квадратом*** множини X, множина X^3 – ***декартовим кубом*** множини X.

n-арне відношення

***n*-арне відношення** R на множинах X_1, X_2, …, X_n – це підмножина декартова добутку цих n множин : $R \subseteq X_1 \times X_2 \times, \ldots, \times X_n$. Якщо упорядкований набір елементів $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ належить відношенню R, то стверджується, що елементи $x_1, x_2, \ldots, x_n$ знаходяться у відношенні R.

n-арне відношення

Приклад.

$A=\{a_1, a_2, a_3\}, B=\{b_1, b_2\}, C=\{c_1, c_2\}.$

$A\times B\times C=\{(a1, b1, c1), (a1, b1, c2), (a1, b2, c1), (a1, b2, c2), (a2, b1, c1), (a2, b1, c2), (a2, b2, c1), (a2, b2, c2), (a3, b1, c1), (a3, b1, c2), (a3, b2, c1), (a3, b2, c2)\}.$

$R\subseteq A\times B\times C$

$R_1 = \{(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_1, c_1), (a_2, b_1, c_2), (a_3, b_1, c_1), (a_3, b_1, c_2), (a_3, b_2, c_2)\}$

$R_2 = \{(a_2, b_2, c_1), (a_2, b_2, c_2), (a_3, b_1, c_1)\}.$

$A\times B=\{(a1, b1), (a1, b2), (a2, b1), (a2, b2), (a3, b1), (a3, b2)\}$

$R\subseteq A\times B$

$R_3=\{(a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_2)\}.$

Бінарні відношення

Бінарні відношення – це відношення між елементами .

Приклад.

$X=\{2, 3\}$, $Y=\{3, 4, 5\}$.

$X \times Y = \{(2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 3), (3, 4), (3,5)\}$.

$R \subseteq X \times Y$

R_1 – "$X<Y$" ***$R_1 = \{(2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5)\}$***

R_2 – "$X \geq Y$" ***$R_2 = \{(3,3)\}$***

R_3 – "$X>Y$" ***$R_3 = \{\varnothing\}$***

Способы задания бинарных отношений

1. Любое отношение может быть задано в виде ***списка***, элементами которого являются пары, определяемые этим отношением.

***Пример*.**

$A=\{2,3,5,7\}$;

$B=\{24,25,26\}$;

$A\times B=\{(2,24),(2,25),(2,26),(3,24),(3,25),(3,26),(5,24),(5,25),(5,26),(7,24),(7,25),(7,26)\}$

$R\subseteq A\times B$

R—“быть делителем”,

$R=\{(2,24),(2,26),(3,24),(5,25)\}$

Способы задания бинарных отношений

2. Бинарное отношение может быть задано с помощью ***матрицы***.

$R \subseteq X \times Y$

$|X|=n$, $|Y|=m$.

n – количество строк,

m – количество столбцов.

Ячейка (i,j) матрицы соответствует паре (x_i,y_j) элементов, где $x_i \in X$, а $y_j \in Y$.

В ячейку (i,j) помещается 1, если $(x_i,y_j) \in R$.

В ячейку (i,j) помещается 0, если $(x_i,y_j) \notin R$.

Способы задания бинарных отношений

Пример.

$A=\{2,3,5,7\}$;

$B=\{24,25,26\}$;

R— “быть делителем”

$R=\{(2,24),(2,26),(3,24),(5,25)\}$

A \ B	24	25	26
2	1		1
3	1		
5		1	
7			

Способы задания бинарных отношений

3. Бинарное отношение ***R*** на множествах ***X*** и ***Y*** может быть задано ***графически***.

Если пара (x_i,y_j) принадлежит отношению ***R***, соединяем изображенные точки x_i, y_j линией, направленной от первого элемента пары ко второму.

Направленные линии, соединяющие пары точек, называются ***дугами***, а точки, обозначающие элементы множеств – ***вершинами*** графа.

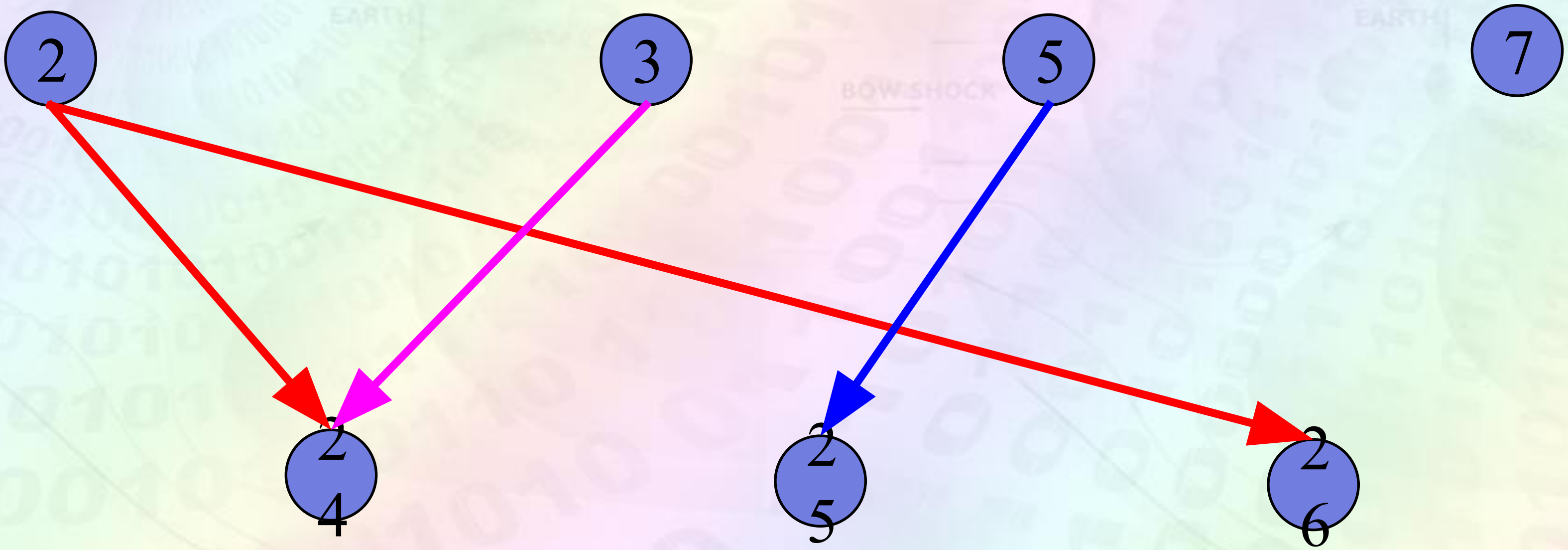
Способы задания бинарных отношений

Пример.

A={2,3, 5, 7}; ***B={24,25,26}.***

R— “быть делителем”;

R={(2,24),(2,26),(3,24),(5,25)}.



Граф ***G*** отношения ***R***

Частные случаи отношений

R – бинарное отношение на множестве ***A***: $\mathbf{R} \subseteq \mathbf{A}^2$.

$\mathbf{R} = \mathbf{A}^2$ –***полное*** отношение.

$\mathbf{R} = \varnothing$ –***пустое*** отношение.

Если отношение содержит все возможные пары вида ***(a, a)*** и не содержит других пар элементов, то такое отношение называется ***тождественным*** (***R=E***).

1. Рефлексивность.

Отношение ***R*** на множестве ***X*** называется ***рефлексивным***, если для любого $x \in X$ имеет место ***xRx***, то есть, каждый элемент $x \in X$ находится в отношении ***R*** к самому себе.

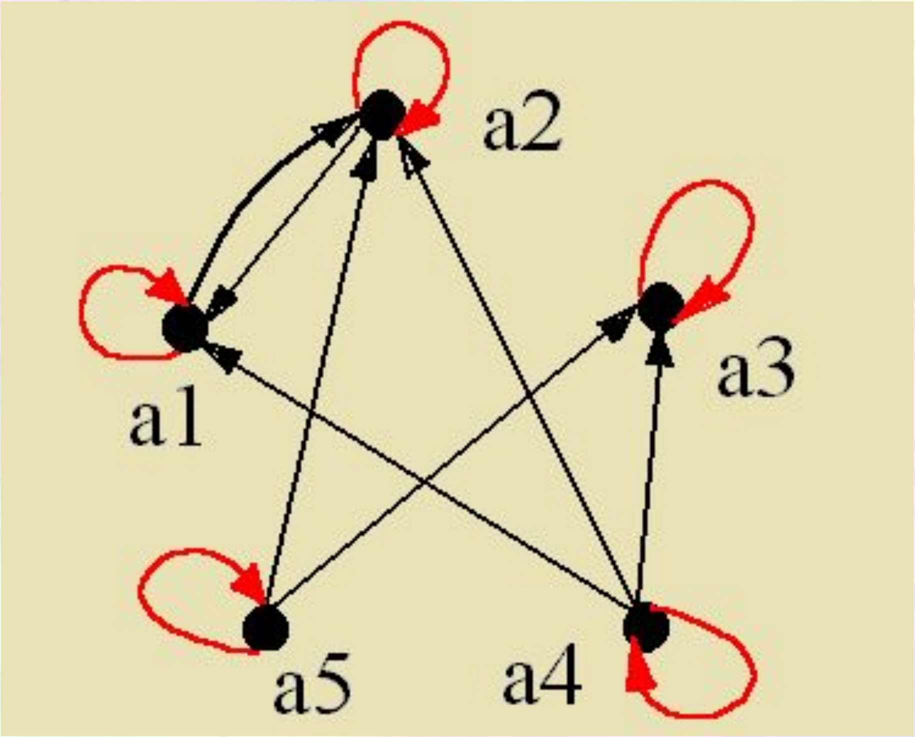
Все диагональные элементы матрицы равны 1; при задании отношения графом каждый элемент имеет петлю – дугу ***(x, x)***.

Пример.

R_1 — “$\leq$” на множестве вещественных чисел,

R_2 — “иметь общий делитель” на множестве целых чисел.

Свойства бинарных отношений. Рефлексивность



	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1	1	1			
a_2	1	1			
a_3			1		
a_4	1	1	1	1	
a_5		1	1		1

2. *Антирефлексивность.*

Отношение R на множестве X называется ***антирефлексивным***, если из x_1Rx_2 следует, что $x_1 \neq x_2$.

Все диагональные элементы являются нулевыми; при задании отношения графом ни один элемент не имеет петли – нет дуг вида (x,x).

Пример.

R_1 — “<” на множестве вещественных чисел,

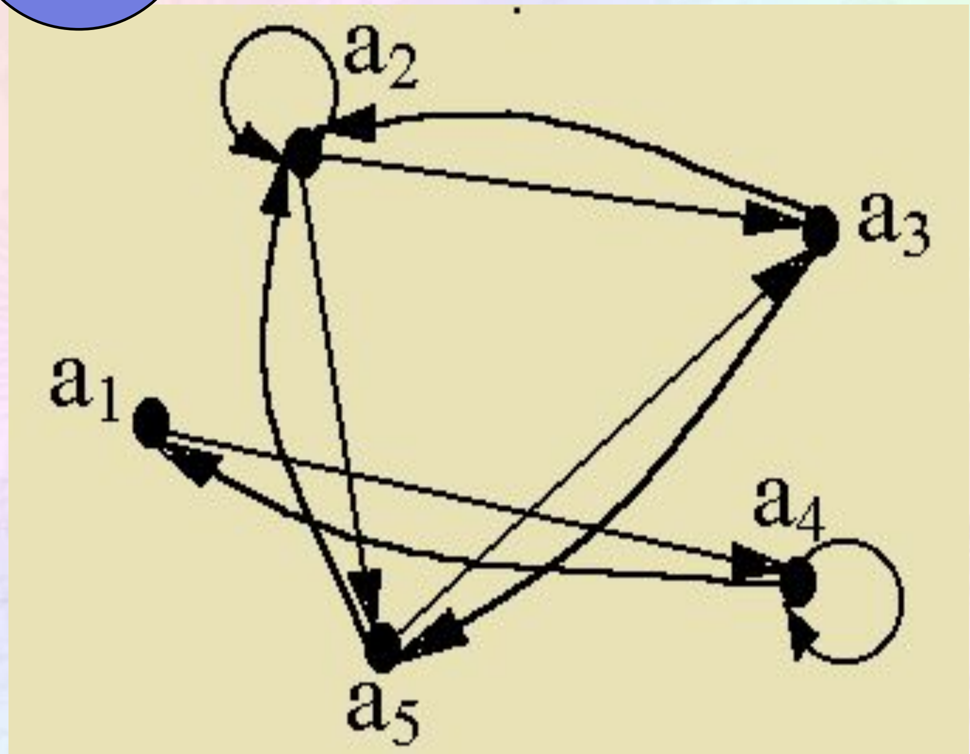
R_2 — “быть сыном” на множестве людей.

3. Симметричность.

Отношение R на множестве *X* называется ***симметричным***, если для пары $(x_1,x_2)\in X^2$ из x_1Rx_2 следует x_2Rx_1 (иначе говоря, для любой пары *R* выполняется либо в обе стороны, либо не выполняется вообще).

Матрица симметричного отношения является симметричной относительно главной диагонали, а в задающем графе для каждой дуги из x_i в x_k существует противоположно направленная дуга из x_k в x_i.

Граф и матрица симметричного отношения.



	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1				1	
a_2		1	1		1
a_3		1			1
a_4	1				
a_5		1	1		

Пример.

R_1 — "=" на множестве вещественных чисел,

R_2 — "быть родственником" на множестве людей.

Демонстрация

4. Асимметричность.

Отношение ***R*** называется ***асимметричным***, если для пары $(x_1,x_2) \in X^2$ из x_1Rx_2 следует, что не выполняется x_2Rx_1 (иначе говоря, для любой пары ***R*** выполняется либо в одну сторону, либо не выполняется вообще).

Пример.

R_1 — ">" на множестве вещественных чисел,

R_2 — "быть сыном" на множестве людей.

Свойства бинарных отношений. Антисимметричность

5. *Антисимметричность.*

Отношение R называется ***антисимметричным***, если из x_1Rx_2 и x_2Rx_1 следует, что $x_1=x_2$.

Пример.

R_1 — “$\leq$” на вещественной оси .

R_2 — “быть делителем”– на множестве действительных чисел.

6. *Транзитивность.*

Отношение ***R*** называется ***транзитивным***, если для любых x_1, x_2, x_3 из $x_1 R x_2$ и $x_2 R x_3$ следует $x_1 R x_3$.

В графе, задающем транзитивное отношение ***R***, для всякой пары дуг таких, что конец первой совпадает с началом второй, существует третья дуга, имеющая общее начало с первой и общий конец со второй.

Пример.

R — “$\leq$” и “$<$” на множестве действительных чисел – транзитивны.

7. Антитранзитивность.

Отношение R называется ***антитранзитивным***, если для любых x_1, x_2, x_3 из x_1Rx_2 и x_2Rx_3 следует, что x_1Rx_3 не выполняется.

Пример.
R_1 — “пересекаться с” на множестве отрезков,
R_2 — “быть отцом” на множестве людей.

Операции над отношениями

Так как отношение – это множество, то над отношениями выполняются все теоретико–множественные операции.

Пример.

$A=\{a,b,c\}$, $B=\{1,2,3\}$

$R_1=\{(a,1),(a,3),(b,2),(c,3)\}$, $R_2=\{(a,2),(a,3)\}$

$R_1 \cap R_2=\{(a,3)\}$

$R_1 \cup R_2=\{(a,1),(a,2),(a,3),(b,2),(c,3)\}$

$R_1 \setminus R_2=\{(a,1),(b,2),(c,3)\}$

□$R_1=\{(a,2),(b,1),(b,3),(c,1),(c,2)\}$

$$\underbrace{(A\times B)\cap C}_{X}=\underbrace{(A\cap C)\times(B\cap C)}_{Y}$$

$$X=Y \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X\subseteq Y \\ Y\subseteq X \end{array}\right.$$

Нехай $x\in X \Rightarrow x\in(A\times B)\cap C \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x\in A\times B \\ x\in C \end{array}\right. \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} (a,b)\in A\times B \\ (a,b)\in C \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} a\in A \\ b\in B \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} a\in C \\ b\in C \end{array}\right. \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a\in A\cap C \\ b\in B\cap C \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a,b)\in(A\cap C)\times(B\cap C)$$

Аналітичне доведення тотожностей

$$\underbrace{(A\times B)\cap C}_{X}=\underbrace{(A\cap C)\times(B\cap C)}_{Y}$$

$$X=Y \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X\subseteq Y \\ Y\subseteq X \end{array}\right.$$

Нехай $(a,b)\in Y \Rightarrow (a,b)\in (A\cap C)\times(B\cap C) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a\in A\cap C \\ b\in B\cap C \end{array}\right. \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} a\in A \\ a\in C \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} b\in B \\ b\in C \end{array}\right. \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} (a,b)\in A\times B \\ a\in C \\ b\in C \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} (a,b)\in C \\ A\times B \end{array}\right. \Rightarrow$$

$(a,b)\in C$

$\Rightarrow (a,b)\in (A\times B)\cap C$

$$\left[\begin{array}{l} (A\times B)\cap C \subseteq (A\cap C)\times(B\cap C) \\ (A\cap C)\times(B\cap C) \subseteq (A\times B)\cap C \end{array}\right. \Rightarrow (A\times B)\cap C=(A\cap C)\times(B\cap C)$$

Обратное отношение

Пусть R – бинарное отношение.

Обратное отношение к R обозначается R^{-1}.

Упорядоченная пара (y,x) принадлежит R^{-1} тогда и только тогда, когда (x,y) принадлежит R.

Если $R \subseteq X^2$, то $R^{-1} \subseteq X^2$, где X – некоторое множество.

Если бинарное отношение задано на двух множествах X и Y – $R \subseteq X \times Y$, то $R^{-1} \subseteq Y \times X$.

Обратное отношение

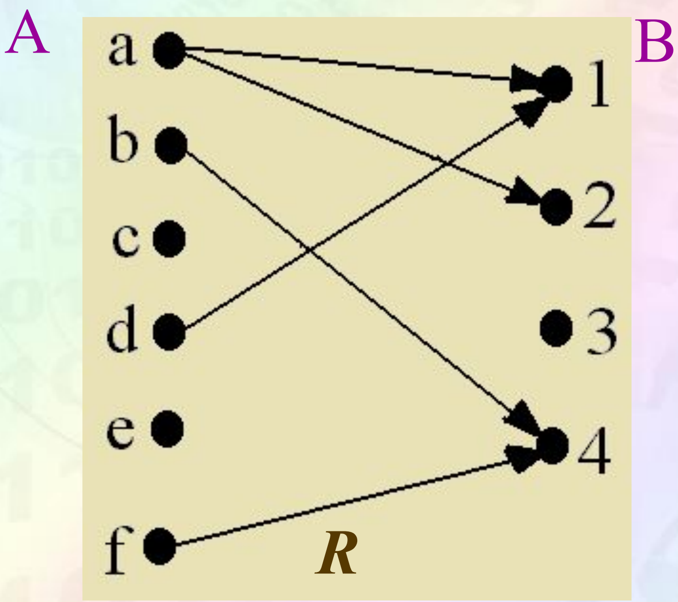
ример.

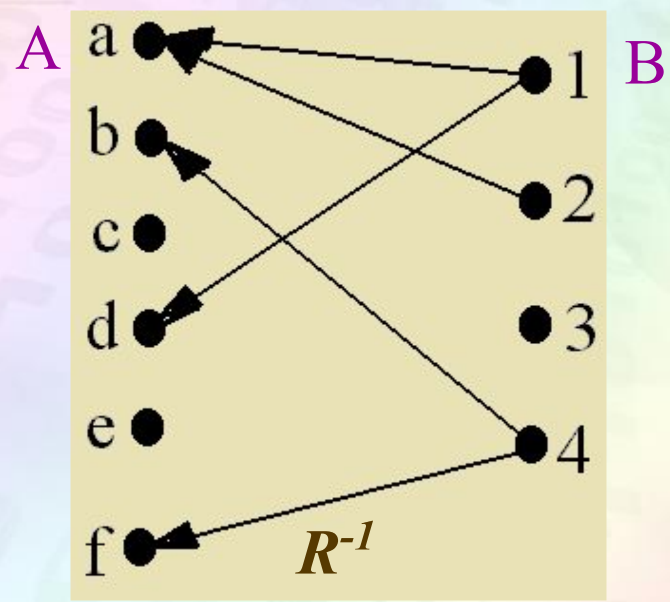
$A=\{a,b,c,d,e,f\}$, $B=\{1,2,3,4\}$

$R \subseteq A \times B=\{(a,1),(a,2),(a,3),(a,4),(b,1),(b,2),(b,3),(b,4),(c,1),(c,2),(c,3),$
$(c,4),(d,1),(d,2),(d,3),(d,4),(e,1),(e,2),(e,3),(e,4),(f,1),(f,2),(f,3),(f,4)\}$;

$R=\{(a,1),(a,2),(b,4),(d,1),(f,4)\}$;

$R^{-1}=\{(1,a),(2,a),(4,b),(1,d),(4,f)\}$.





Композиция отношений

Пусть R и S – отношения, $R \subseteq X \times Y$, $S \subseteq Y \times Z$, где X, Y, Z – некоторые множества.

Композицией отношений R и S называется отношение, состоящее из упорядоченных пар (x,z), $x \in X$, $z \in Z$, для которых существует элемент $y \in Y$ такой, что выполняются условия $(x,y) \in R$, $(y,z) \in S$.

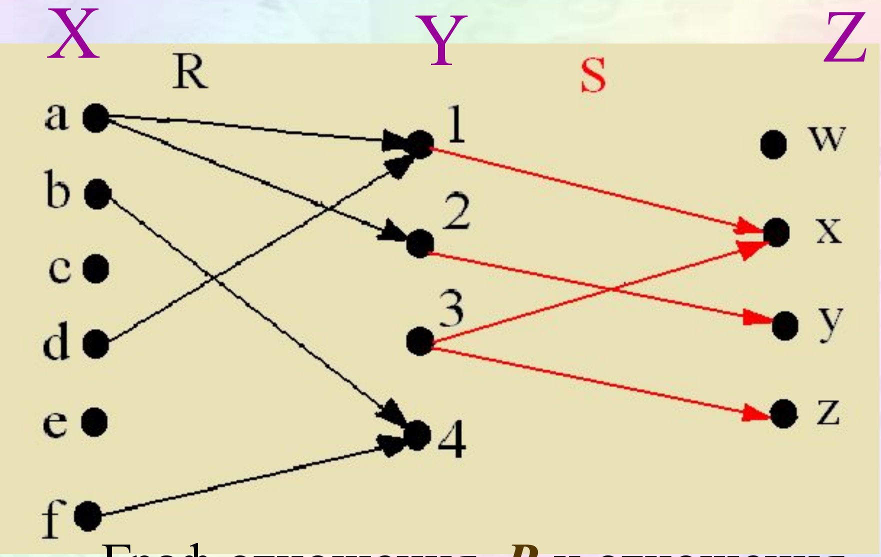
Композиция отношений R и S обозначается $S \circ R$.

Пример.

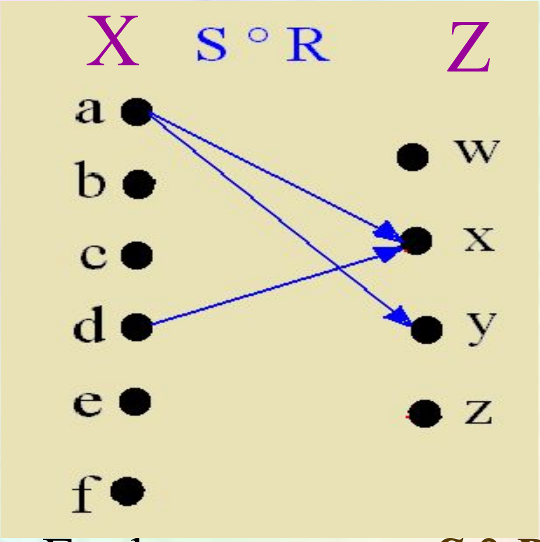
$X=\{a,b,c,d,e,f\}$, $Y=\{1,2,3,4\}$, $Z=\{w,x,y,z\}$.

$R \subseteq X \times Y$ $R=\{(a,1),(a,2),(b,4),(d,1),(f,4)\}$,

$S \subseteq Y \times Z$ $S=\{(1,x),(2,y),(3,x),(3,z)\}$.



Граф отношения *R* и отношения
$S=\{(1,x),(2,y),(3,x),(3,z)\}$



Граф отношения $S \circ R$

$S \circ R = \{(a,x),(a,y),(d,x)\}$

Отношение эквивалентности

Бинарное отношение называется ***отношением эквивалентности*** (обозначается ~), если оно

1) рефлексивно;

2) симметрично;

3) транзитивно.

Пример.

R_1 — “=” на любом множестве.

R_2 — “учиться в одной группе” на множестве студентов университета.

Отношение порядка

Бинарное отношение называется ***отношением частичного порядка*** (обозначается $\leq$), если оно

1) рефлексивно;

2) антисимметрично;

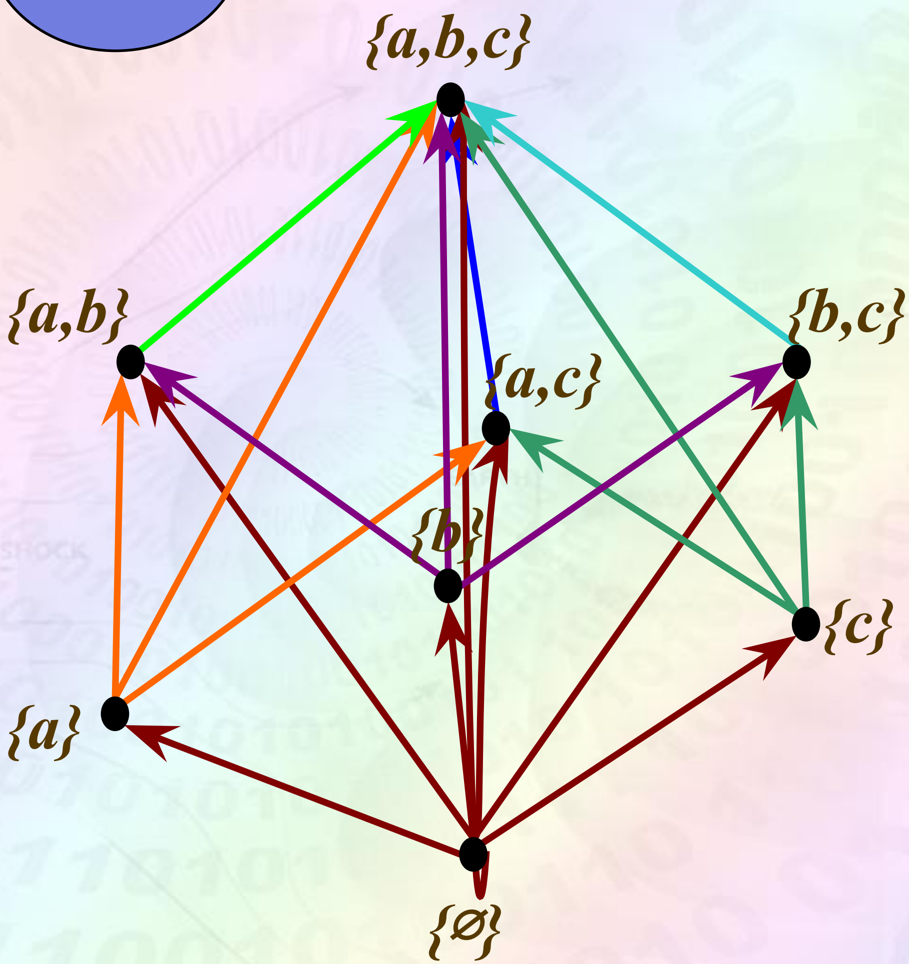
3) транзитивно.

Пример.

R_1 — “являться нестрогим включением”, заданное на системе множестве.

Если на множестве задано отношение частичного порядка, то это множество называется ***частично упорядоченным.***

Отношение порядка. Отношение включения множеств



Граф отношения включения множеств

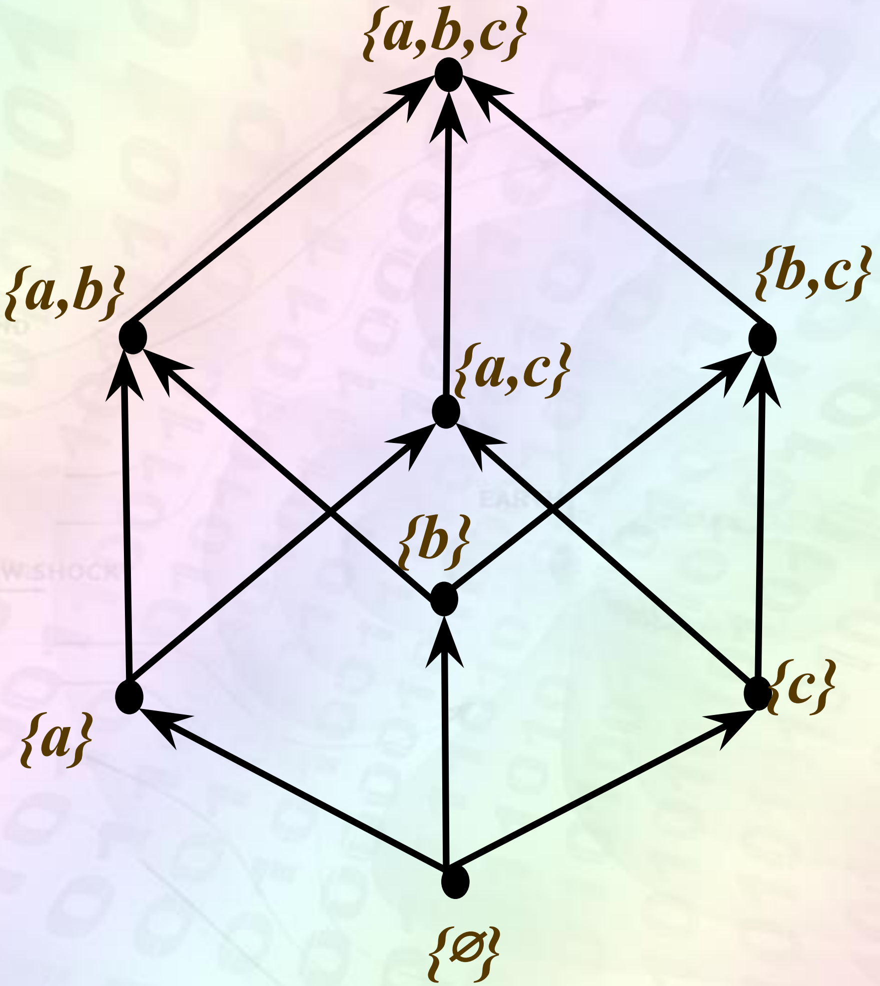


Диаграмма Хассе отношения включения множеств

Отношение порядка

Элементы ***a*** и ***b*** называются ***сравнимыми*** в отношении частичного порядка ***R***, если выполняется хотя бы одно из соотношений **aRb** или **bRa**.

Множество ***A***, на котором задано отношение частичного порядка ***R*** и для которого любые два элемента этого множества сравнимы, называется ***линейно упорядоченным*** или ***полностью упорядоченным.***

Отношение порядка

Отношение частичного порядка также называется ***отношением нестрогого порядка***.

В отличии от него ***отношение строгого порядка*** (обозначается $<$):

1) антирефлексивно (если $a<b$, то $a\neq b$)

2) асимметрично (если $a<b$ то не верно $b<a$)

3) транзитивно (если $a<b$ и $b<c$, то $a<c$).

***Пример*.**

R_1 — “>” на любом множестве.

R_2 — “жить в одном городе” на множестве жильцов района.

Отношение толерантности

Отношение называется ***отношением толерантности***, если оно:

1) рефлексивно;
2) симметрично;
3) антитранзитивно.

Пример.

$A=\{1,2,3,4\}$;

$R \subseteq A^2$;

$R=\{(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(3,3),(4,1),(4,4)\}$

Применение свойств бинарных отношений

$A=\{1,2,3,4\};$
$R_1 \subseteq A^2;$
$R_2 \subseteq A^2.$

$R_1=\{(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(3,3),(4,1),(4,2),(4,4)\};$

$R_2=\{(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3)\}.$

	R_1	R_2
Рефлексивность	+	-
Антирефлексивность	-	+
Симметричность	-	-
Асимметричность	-	+
Антисимметричность	-	-
Транзитивность	+	+
Антитранзитивность	-	-
Эквивалентности	-	-
Толерантности	-	-
Частичного порядка	-	-
Строгого порядка	-	+