

ДИСКРЕТНЫЕ СТРУКТУРЫ ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ СООТВЕТСТВИЯ. ФУНКЦИИ. ОТОБРАЖЕНИЯ

ЛЕКЦИЯ 2

Математический факультет. Кафедра математического
моделирования

Тема: Соответствия. Функции. Отображения

Цель лекции – ознакомиться и овладеть понятием «соответствие», изучить свойства соответствий для применения в задачах компьютерной инженерии

Содержание:

- Понятие упорядоченной пары и вектора
- Декартово произведение множеств
- Определение соответствия
- Свойства соответствий
- Взаимно-однозначное соответствие
- Функции
- Отображения

Литература

- **Горбатов В.А.** Основы дискретной математики. М.: Высш. шк., 1986. 9-12 с.
- **Лавров И.А., Максимова Л.Л.** Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984. 4-10 с.
- **Кузнецов О.П., Адельсон-Вельский Г.М.** Дискретная математика для инженера. М.: Энергия, 1980. 344 с.
- **Богомолов А.М., Сперанский Д.В.** Аналитические методы в задачах контроля и анализа дискретных устройств. Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 1986. 240с.
- **Новиков Ф.А.** Дискретная математика для программистов. С.-П., 2001. С. 4-24.
- **Хаханов В.І., Хаханова І.В., Кулак Е.М., Чумаченко С.В.** Методичні вказівки до практичних занять з курсу "Дискретна математика". Харків, ХНУРЕ. 2001. 87с.

Термины

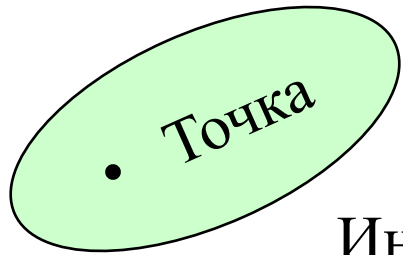
Базовые понятия:

- множество,
- упорядоченная пара,
- подмножество

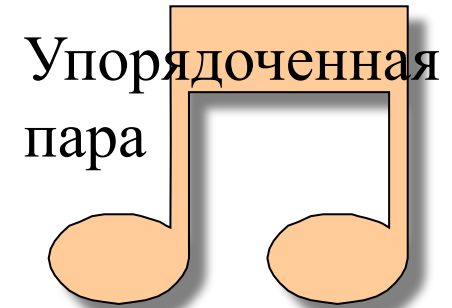
Ключевые слова:

- декартово (прямое) произведение множеств,
- соответствие,
- всюду определенность,
- сюръективность,
- инъективность,
- функциональность,
- биекция (взаимная однозначность)

Основные понятия: упорядоченная пара, вектор



Информация



- Упорядоченная пара является одним из **первичных** понятий в теории множеств
- Под **упорядоченной парой** следует понимать двухэлементное упорядоченное множество
- **Вектор (кортеж)** представляет собой упорядоченный набор элементов

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, где x_i – **координаты (компоненты)**

- **Длина (размерность)** вектора определяется количеством его координат

Проекция вектора на ось



Два вектора x, y одинаковой размерности **равны**, если их соответствующие компоненты равны:

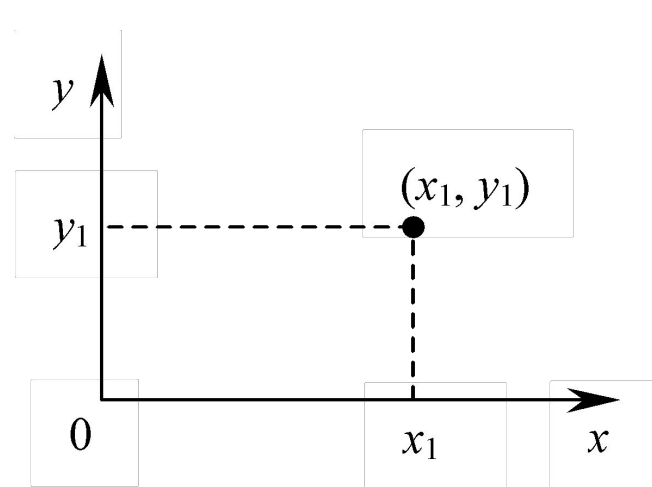
$$x=y \Leftrightarrow \forall i \quad x_i=y_i$$

Def: проекцией вектора $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ на i -ю ось называется его i -й компонент $\Pr_i x = x_i$

Def: пусть V – множество векторов одинаковой длины, тогда проекцией множества V на i -ю ось называется множество проекций всех векторов из V :

Примеры

- Координаты точки плоскости образуют упорядоченную пару: на первой позиции – абсцисса, на второй – ордината. Они являются проекциями на первую и вторую оси соответственно



- Дано множество V векторов размерности 3:

$$V = \{ (a, b, c), (c, b, d), (b, b, d) \}$$

Можно найти проекции множества V на оси

$$\text{Pr}_1 V = \{a, c, b\}$$

$$\text{Pr}_2 V = \{b\}$$

$$\text{Pr}_3 V = \{c, d\}$$

Декартово (прямое) произведение множеств 1

- **Def:** прямое (декартово) произведение множеств A и B есть множество всех упорядоченных пар (a,b) таких, что $a \in A, b \in B$:

$$A \times B = \{ (a,b) \mid a \in A, b \in B \}$$



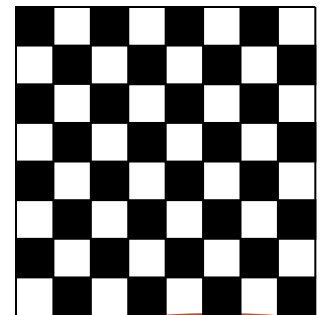
- **Примеры**

1. Декартово произведение множеств $A=\{1,2\}, B=\{3,4,5\}$ есть

$$A \times B = \{ (1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5) \}$$

2. $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}, B=\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$

$A \times B$ – обозначение клеток шахматной доски



Декартово (прямое) произведение множеств 2

- Декарту принадлежит координатное представление точек плоскости
- Множество точек плоскости $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ есть множество пар вида (a, b) , $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{R}^2 = \{(a, b) \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$$

- Декартов квадрат ($A=B$):

$$A \times A = A^2 = \{(a, b) \mid a \in A, b \in A\}$$

- **Def:** прямое произведение n множеств

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in A_i, i=1, n\}$$

- Мощность декартова произведения множеств:

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots \cdot |A_n|$$



Рене Декарт
XVI-XVII вв.



Соответствия



- **Def: соответствие** – подмножество декартова произведения двух множеств:

$$G \subseteq A \times B$$

- **A – область определения (множество отправления)** соответствия G :

$$Pr_1 G = \{ x \mid (x, y) \in G \}$$

- **B – область значений (множество прибытия)** соответствия G :

$$Pr_2 G = \{ y \mid (x, y) \in G \}$$

Образы и прообразы

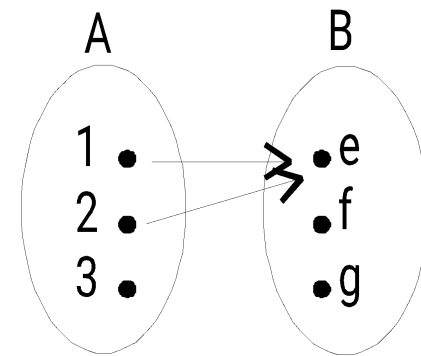


- **Def:** множество всех элементов $y \in B$, соответствующих элементу $x \in A$, называется **образом** элемента x в множестве B при соответствии G .
- **Def:** множество всех элементов $x \in A$, которым соответствует элемент $y \in B$, называется **прообразом** элемента y в множестве A при соответствии G .

- **Пример**

$$A = \{1, 2, 3\}, B = \{e, f, g\}$$

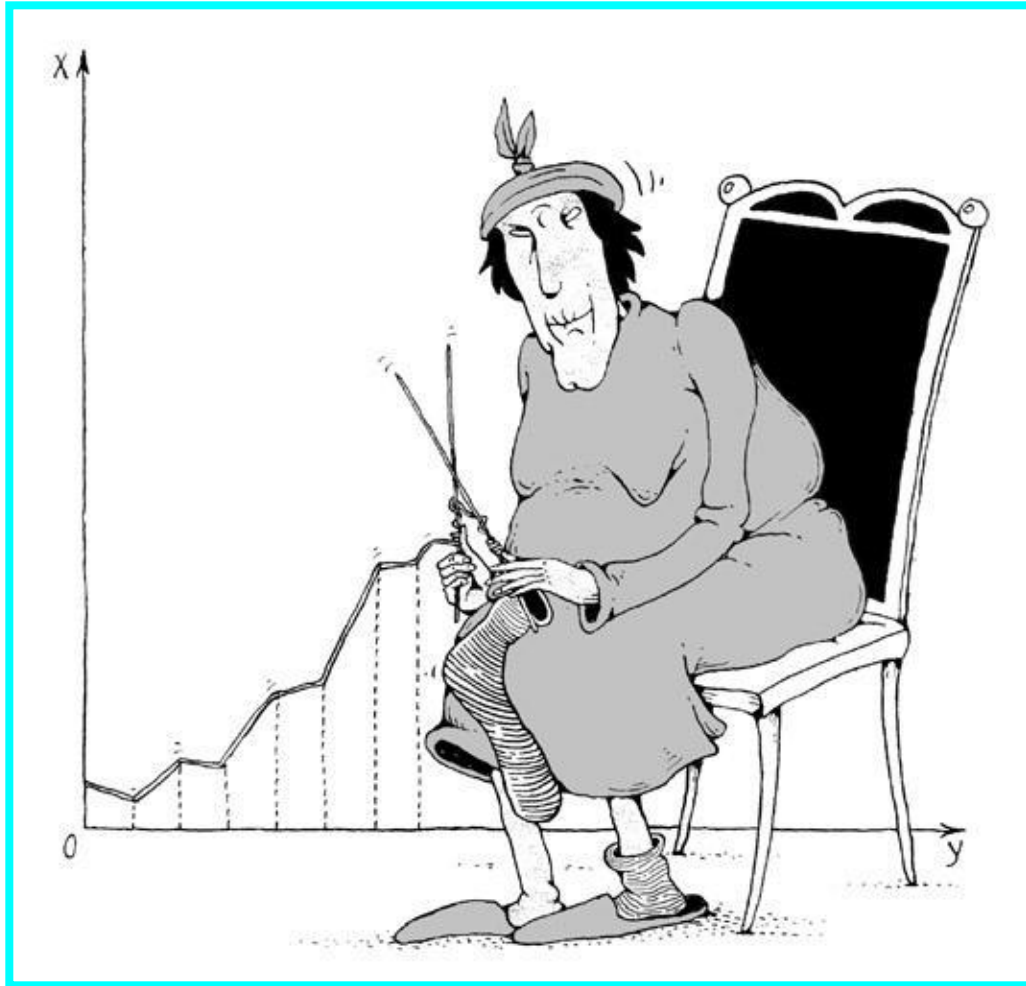
$$G = \{(1, e), (2, e)\} \subseteq A \times B$$



G

прообразы образы

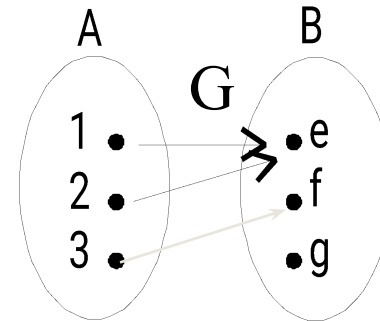
Time Out



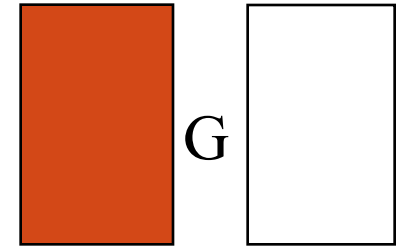
Свойства соответствий. 1



- Всюду определенность: $\text{Pr}_1 G = A$

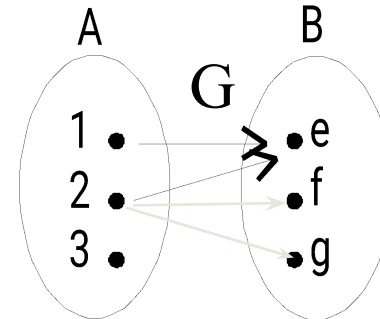


Пример

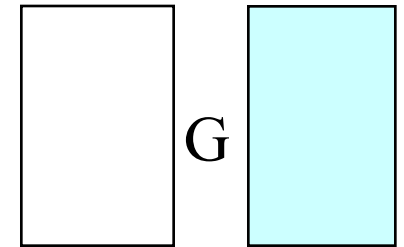


Схема

- Сюръективность: $\text{Pr}_2 G = B$



Пример

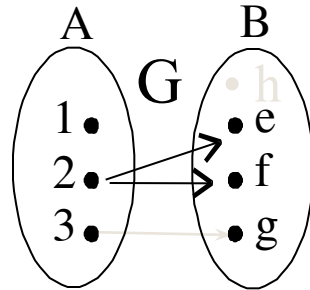


Схема

Свойства соответствий. 2



- **ИНЪЕКТИВНОСТЬ:** $\text{in } G : A \rightarrow B \Leftrightarrow \forall y \in \text{Pr}_2 G \subset B \exists !x \in \text{Pr}_1 G \subset A$



Пример

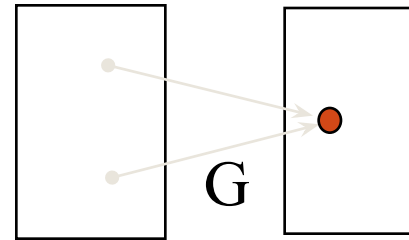
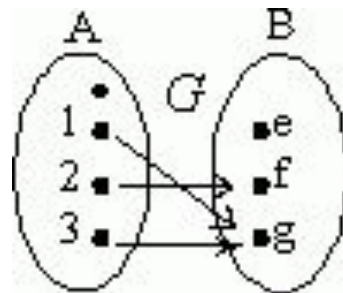


Схема (контрпример)

- **ФУНКЦИОНАЛЬНОСТЬ:** $G : A \rightarrow B \Leftrightarrow \forall x \in \text{Pr}_1 G \subset A \exists !y \in \text{Pr}_2 G \subset B$



Пример

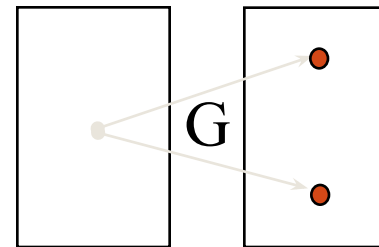
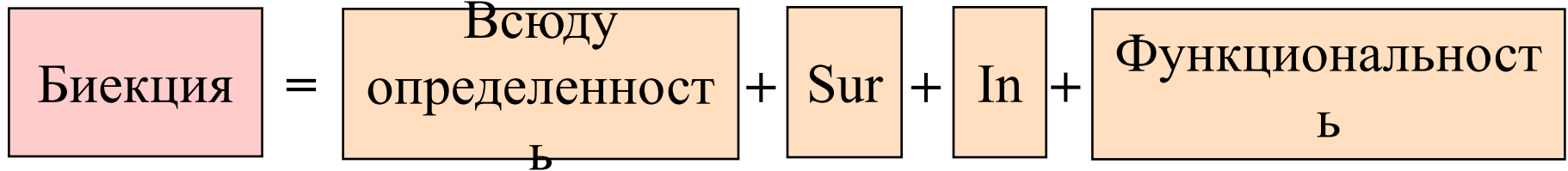
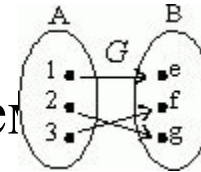


Схема (контрпример)

Взаимно-однозначное соответствие (биекция). Функция. Отображение



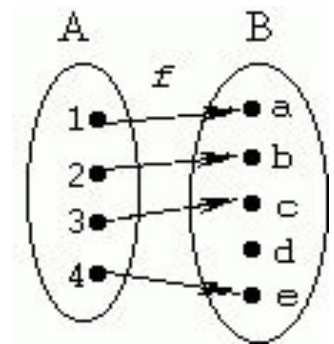
- Соответствие **взаимно-однозначно (биективно)**, если оно обладает одновременно всеми названными свойствами



- **Функция** – функциональное соответствие

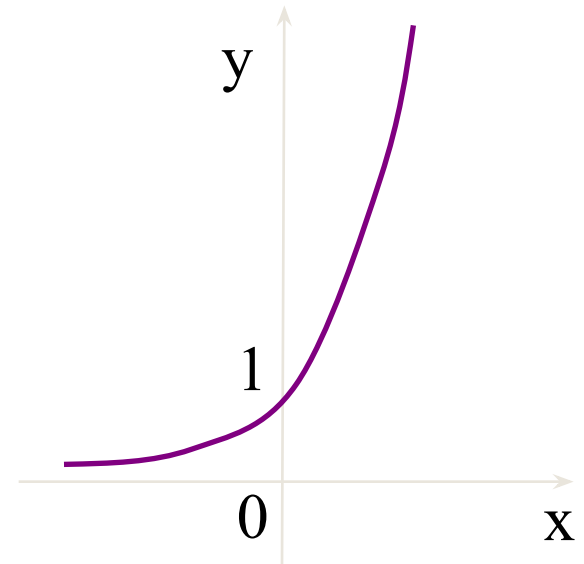
$f : A \rightarrow B \Leftrightarrow \forall x \in Pr_1 \subset A \exists ! y \in Pr_2 \subset B : f(x) = y$
X – аргумент, Y – значение функции

- **Отображение** – всюду определенная функция



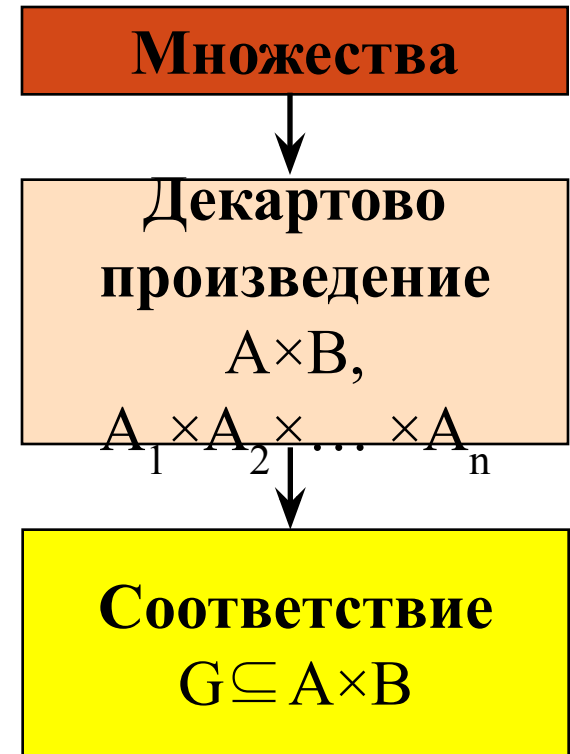
Пример

- Соответствие $G = \{ (x, y) \mid y = \exp x \} \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}$
- всюду определено: $\text{Pr}_1 G = (-\infty; \infty) = \mathbf{R}$
- не **sur**: $\text{Pr}_2 G = (0; \infty) \neq \mathbf{R}$
- **in**: образ имеет единственный прообраз
- функционально: каждому прообразу соответствует единственный образ
- не является **bi**



Выводы

- Соответствие представляет собой произвольное подмножество декартова произведения двух множеств
- Если множества имеют одинаковое количество элементов, то между ними можно установить взаимно-однозначное соответствие
- Классификация соответствий применяется в задачах компьютерной инженерии и управления



Тест-вопросы. 1

1. Могут ли повторяться компоненты вектора?

- а) да;
- б) нет.

2. Длина вектора определяется:

- а) числом различных элементов;
- б) числом координат.

3. Какое из соответствий называется взаимно-однозначным:

- а) сюръективное, инъективное и функциональное?
- б) сюръективное и инъективное?
- в) всюду определенное, сюръективное, инъективное и функциональное?

Тест-вопросы. 2

4. Является ли отображение биективным, если оно сюръективно и инъективно?
а) да;
б) нет.

5. Отображение A в B это:
а) частично определенная функция;
б) всюду определенная функция;
в) сюръективное соответствие;
г) инъективное соответствие.

Тест-вопросы. 3

6. Верно ли: $\forall A, B \quad A \times B = B \times A$?

а) да;

б) нет.

7. Указать проекцию

множества $A = \{(3,3,5), (3,3,6), (3,5,5), (3,5,6), (8,3,5), (8,3,6), (8,5,5), (8,5,6)\}$

на третью ось

а) $\text{ПРА} = \{3,8\}$,

б) $\text{ПРА} = \{3,5\}$,

в) $\text{ПРА} = \{5,6\}$.

8. Верно ли: $|A^n| = |A|^n$?

а) да

б) нет.

9. Соответствие является подмножеством

а) объединения двух множеств;

б) пересечения двух множеств;

в) теоретико-множественной разности двух множеств;

г) декартова произведения нескольких множеств;

д) декартова произведения двух множеств.