Практикум №2 по решению стереометрических задач

(базовый уровень)

Задания №13 и №16 базового уровня с прямоугольным параллелепипедом

ВСПОМНИМ

Параллелепипед- это призма, основания которой – параллелограммы. **Прямоугольный параллелепипед** – это прямой параллелепипед, в основании которого прямоугольник

1) Противоположные грани параллелепипеда параллельны и равны
2) Диагонали пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам
3) Боковые ребра **прямоугольного параллелепипеда** перпендикулярны его основаниям
4) У **прямоугольного параллелепипеда** все грани- прямоугольники
5) У **прямоугольного параллелепипеда** все диагонали равны
6) **$V = a \cdot b \cdot c$; $V = S$ осн.$\cdot h$; S осн.$= a \cdot в$; Sп.пов. $= 2(ab+bc+ac)$;**

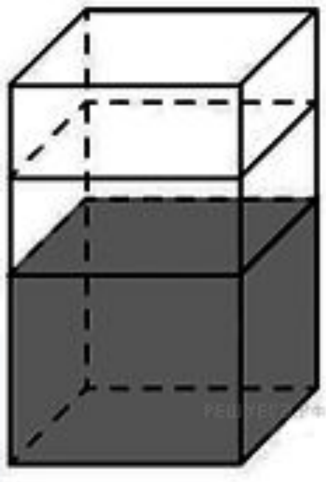
$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$;

Содержание

Задача №1

В бак, имеющий форму правильной четырёхугольной призмы со стороной основания, равной 20 см, налита жидкость. Для того чтобы измерить объём детали сложной формы, её полностью погружают в эту жидкость. Найдите объём детали, если уровень жидкости в баке поднялся на 20 см. Ответ дайте в кубических сантиметрах.

<u>Решение</u>



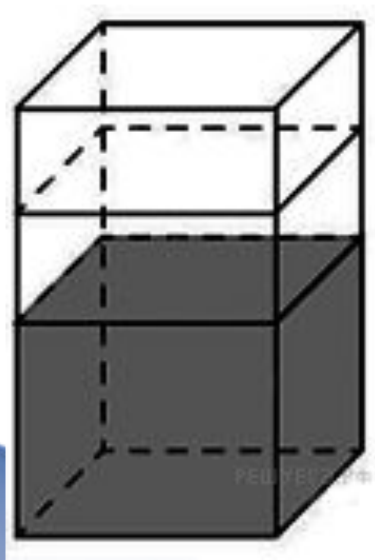
Объем вытесненной жидкости равен объему детали Уровень жидкости поднялся на h=20 см, сторона основания a=20 см, значит вытесненный объем будет равен $V = a^2 \cdot h = 8000\,\text{см}^3$.

Найденный объём является объёмом детали.

Задача №2

В бак, имеющий форму прямой призмы, налито 12 л воды. После полного погружения в воду детали, уровень воды в баке поднялся в 1,5 раза. Найдите объём детали. Ответ дайте в кубических сантиметрах, зная, что в одном литре 1000 кубических сантиметров.

Решение

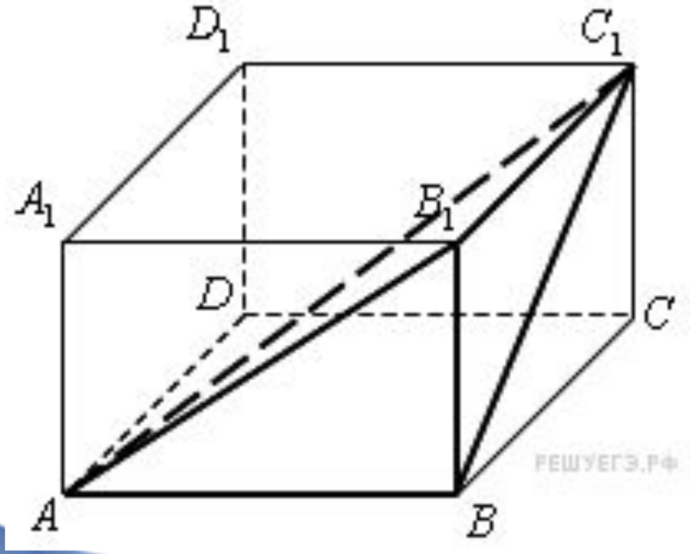


Объем детали равен объему вытесненной ею жидкости. После погружения детали в воду объём стал равен **12 · 1,5 = 18** литров, поэтом объём детали равен **18 − 12 = 6 л = 6000 см³.**

Задача №3

Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A, B,B1,C1 прямоугольного параллелепипеда ABCDA1B1C1D1 , у которого AB=5, AD=3, AA1=4.

Решение



Основанием пирамиды, объем которой нужно найти, является половина боковой грани параллелепипеда, а высотой пирамиды является ребро параллелепипеда B1C1.

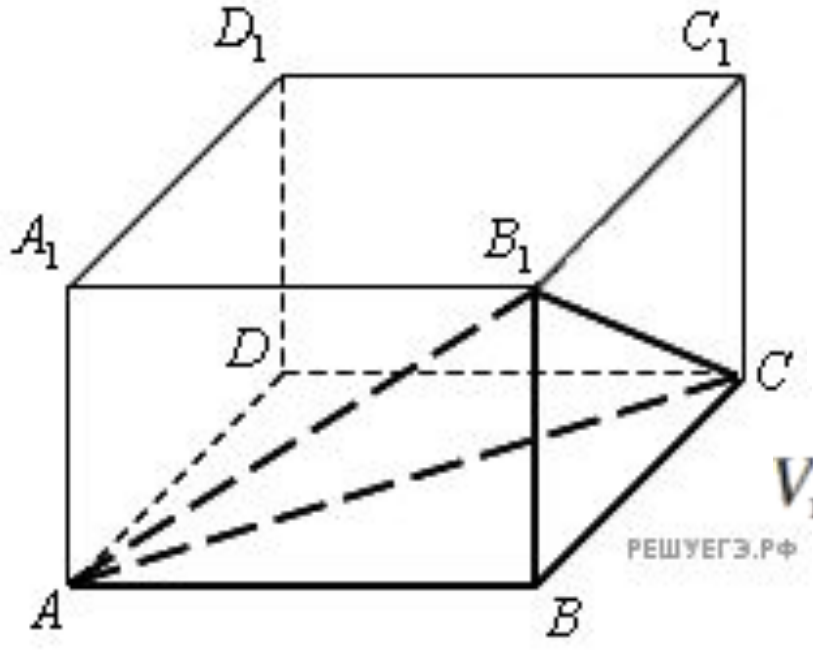
Поэтому

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{3}S_{\text{пир}}h = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}S_{\text{пар}}h = \frac{1}{6}S_{\text{пар}}h = \frac{1}{6}\cdot 4\cdot 3\cdot 5 = 10.$$

Задача №4

Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, B1 прямоугольного параллелепипеда ABCDA1B1C1D1, у которого AB=3, AD=3, AA1=4.

Решение



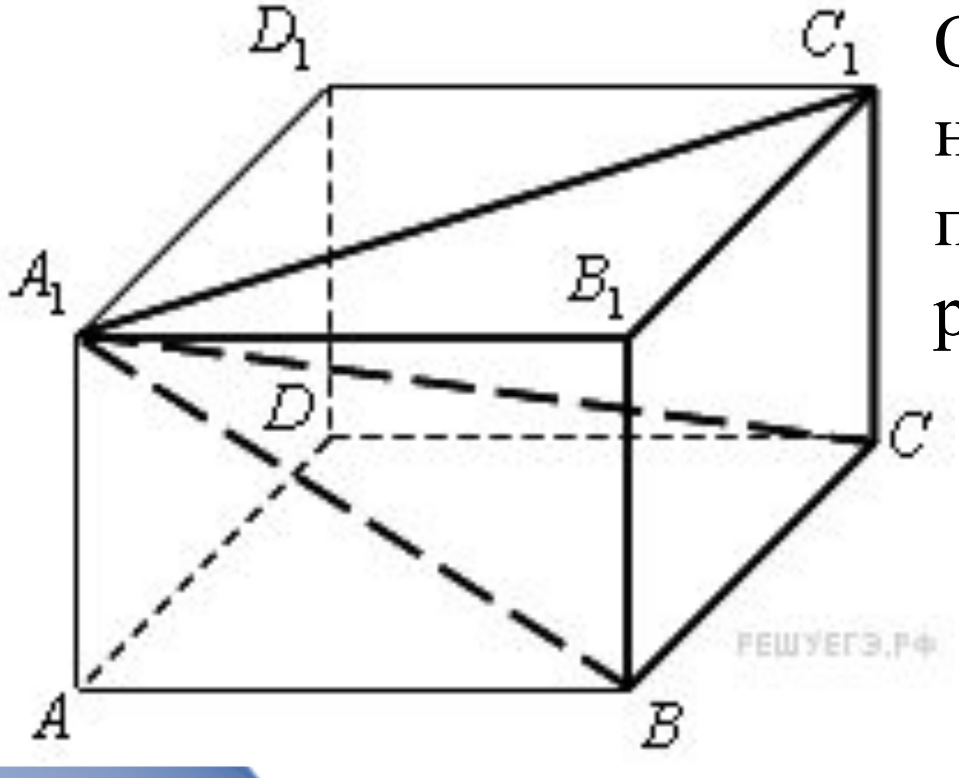
Площадь основания пирамиды в два раза меньше площади основания параллелепипеда, а высота у них общая. Значит

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{3}S_{\text{пир}}h = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}S_{\text{пар}}h = \frac{1}{6}S_{\text{пар}}h = \frac{1}{6}\cdot 3\cdot 3\cdot 4 = 6.$$

Задача №5

Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A1, B, C, C1, B1 прямоугольного параллелепипеда ABCDA1B1C1D1, у которого AB=4, AD=3, AA1=4.

Решение



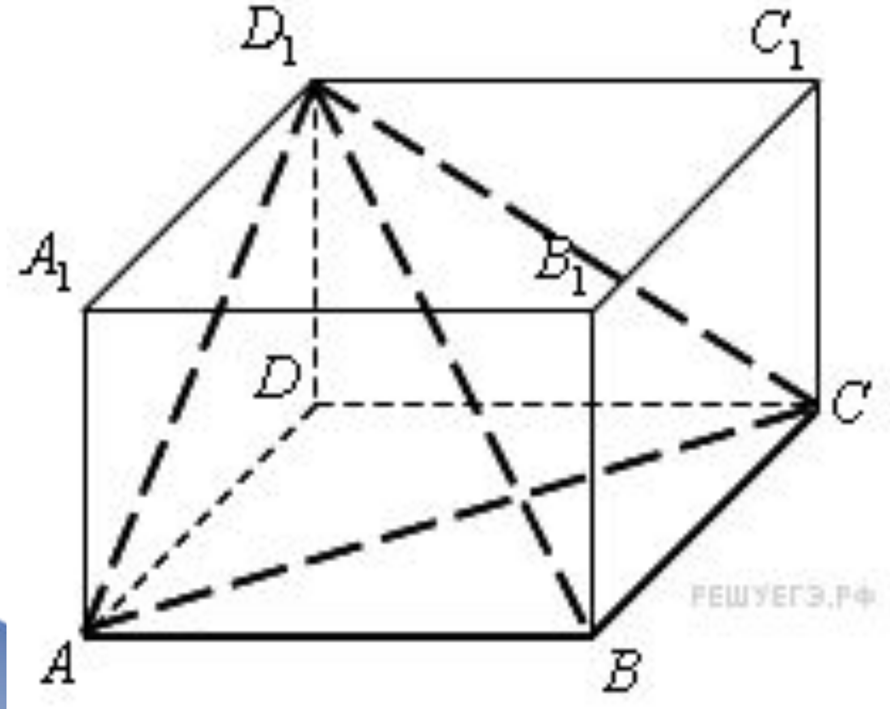
Основанием пирамиды, объем которой нужно найти, является боковая грань параллелепипеда, а ее высотой является ребро A1B1 . Поэтому

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{3}S_{\text{пир}}h = \frac{1}{3}S_{BCB_1C_1}h = \frac{1}{3}\cdot 4\cdot 3\cdot 4 = 16.$$

Задача №6

Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, D1 прямоугольного параллелепипеда ABCDA1B1C1D1, у которого AB=4, AD=3, AA1=4.

Решение



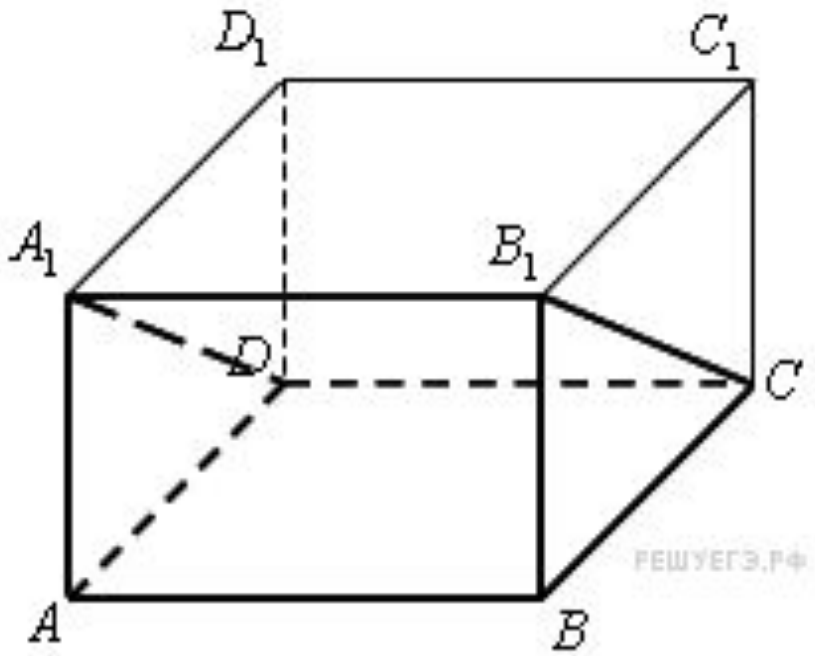
Площадь основания пирамиды в два раза меньше площади основания параллелепипеда, а высота у них общая. Поэтому

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{3} S_{\text{пир}} h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} S_{\text{пар}} h = \frac{1}{6} S_{\text{пар}} h = \frac{1}{6} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4 = 8.$$

Задача №7

Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A, D, A1, B, C, B1 прямоугольного параллелепипеда ABCDA1B1C1D1, у которого AB=3, AD=4, AA1=5.

Решение



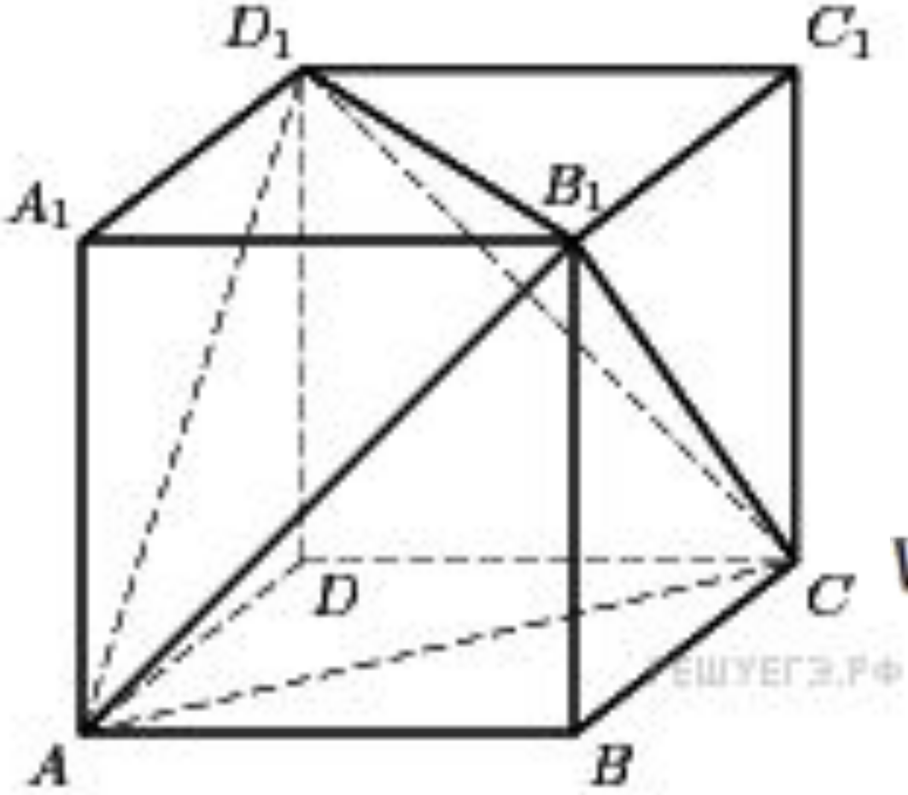
Видно, что многогранник является половиной данного прямоугольного параллелепипеда. Значит объём искомого многогранника

$$V_{\text{многогр}} = \frac{1}{2}V_{\text{паралл}} = \frac{1}{2}AB \cdot AD \cdot AA_1 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 30.$$

Задача №8

Объем параллелепипеда ABCDA1B1C1D1 равен 4,5. Найдите объем треугольной пирамиды AD1CB1 .

Решение



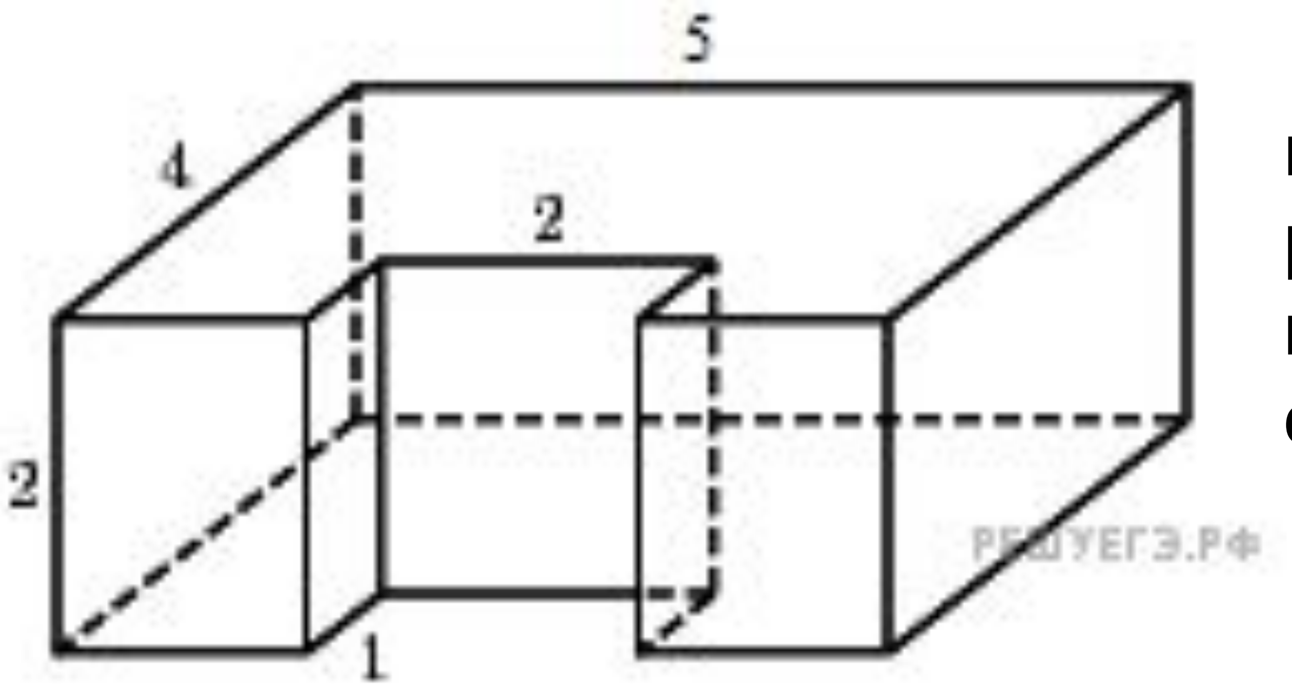
Искомый объем равен разности объемов параллелепипеда со сторонами **a, b** и **c** и четырех пирамид, основания которых являются гранями данной треугольной пирамиды:

$$V = abc - 4\left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}abc\right)\right) = \left(\frac{1}{3}\right)abc = 1{,}5.$$

Задача №9

Найдите объем многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).

Решение



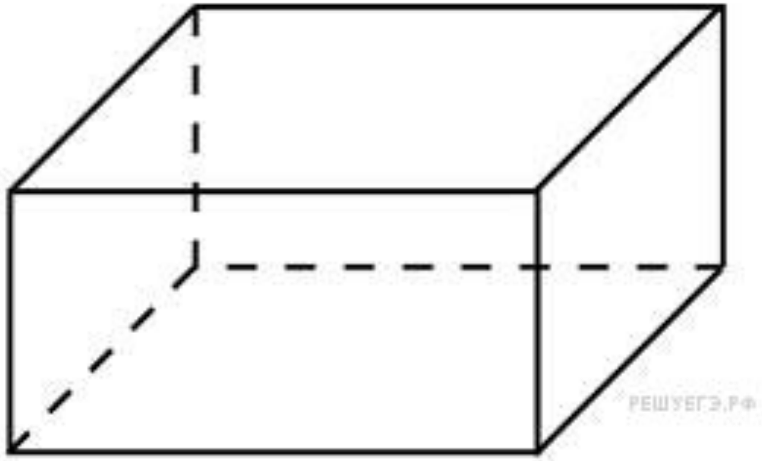
Объем данного многогранника равен разности объемов параллелепипедов со сторонами **5, 2, 4** и **1, 2, 2:**

$$V = V_1 - V_2 = 5 \cdot 2 \cdot 4 - 4 = 36$$

Задача №10

Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 2 и 6. Объем параллелепипеда равен 48. Найдите третье ребро параллелепипеда, выходящее из той же вершины.

Решение

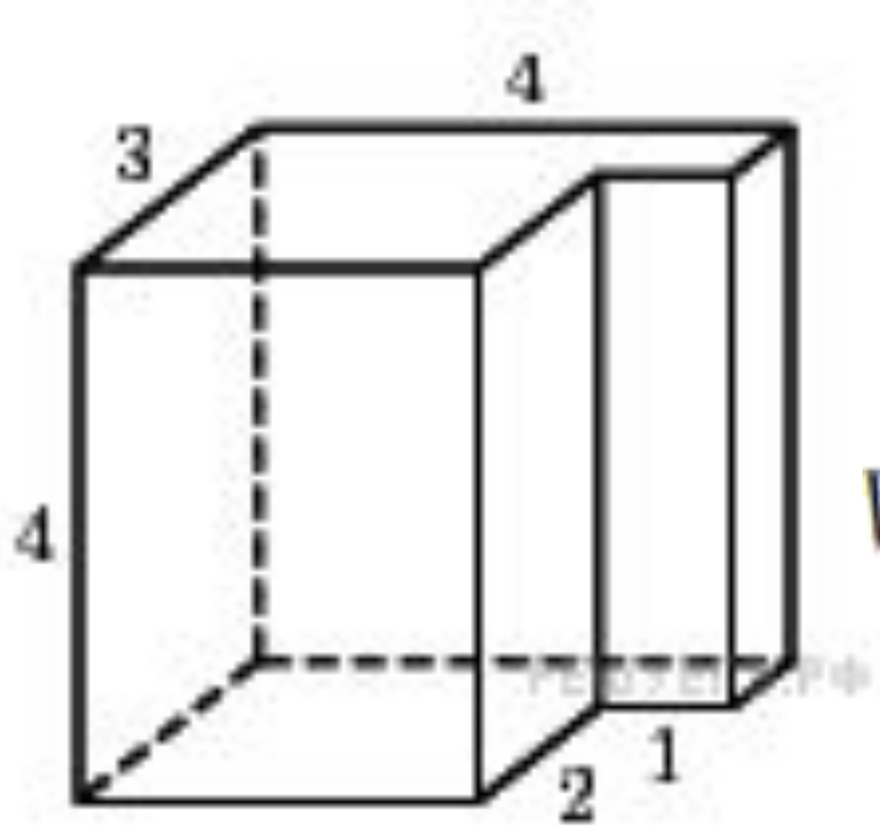


Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению его измерений. Поэтому, если x — искомое ребро, то $\mathbf{2 \cdot 6 \cdot x = 48}$, откуда $\mathbf{x = 4}$.

Задача №11

Найдите объем многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).

Решение



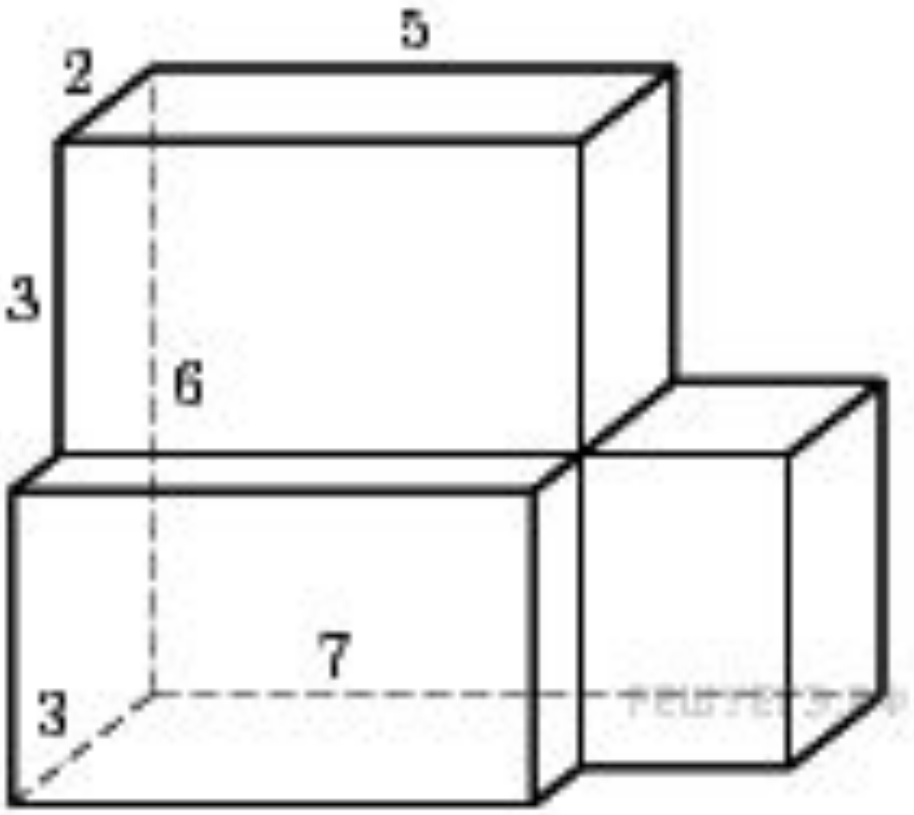
Объем данного многогранника равен сумме объемов параллелепипедов с ребрами **3, 3, 4** и **1, 1, 4.** Значит

$$V = V_1 + V_2 = 3 \cdot 3 \cdot 4 + 1 \cdot 1 \cdot 4 = 36 + 4 = 40$$

Задача №12

Найдите объем многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).

Решение



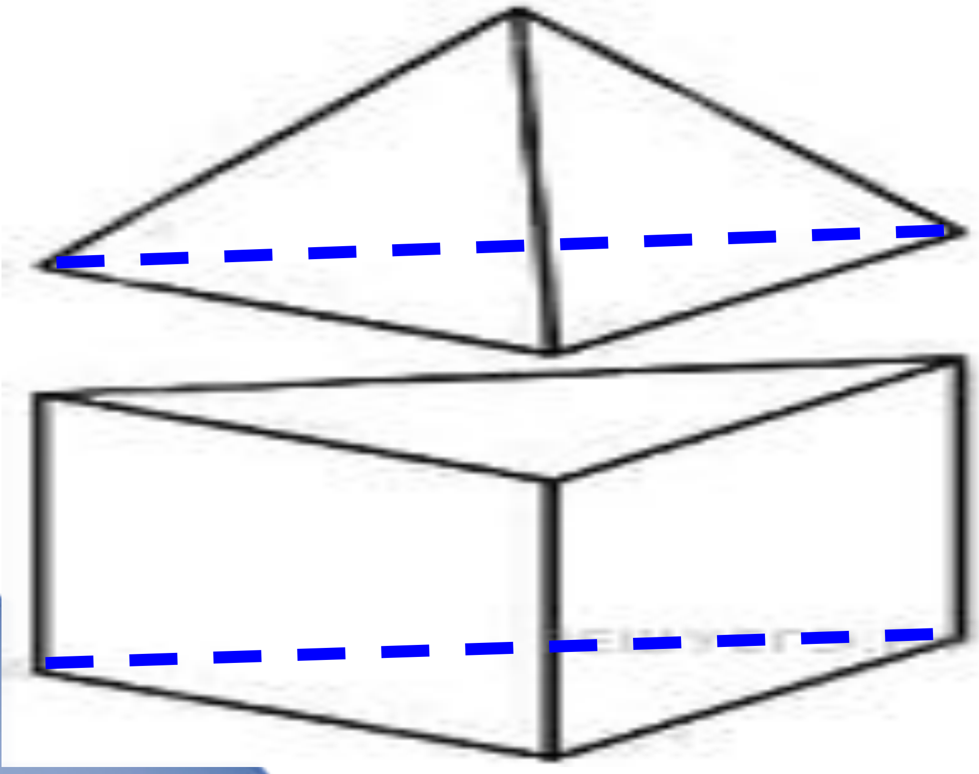
Объем многогранника равен сумме объемов параллелепипедов со сторонами **(5, 3, 2), (3, 3, 5)** и **(2, 3, 2).** Значит:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = 5 \cdot 3 \cdot 2 + 5 \cdot 3 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 2 = 30 + 45 + 12 = 87$$

Задача №13

К правильной треугольной призме со стороной основания 1 приклеили правильную треугольную пирамиду с ребром 1 так, что основания совпали. Сколько граней у получившегося многогранника (невидимые ребра на рисунке не обозначены)?

Решение

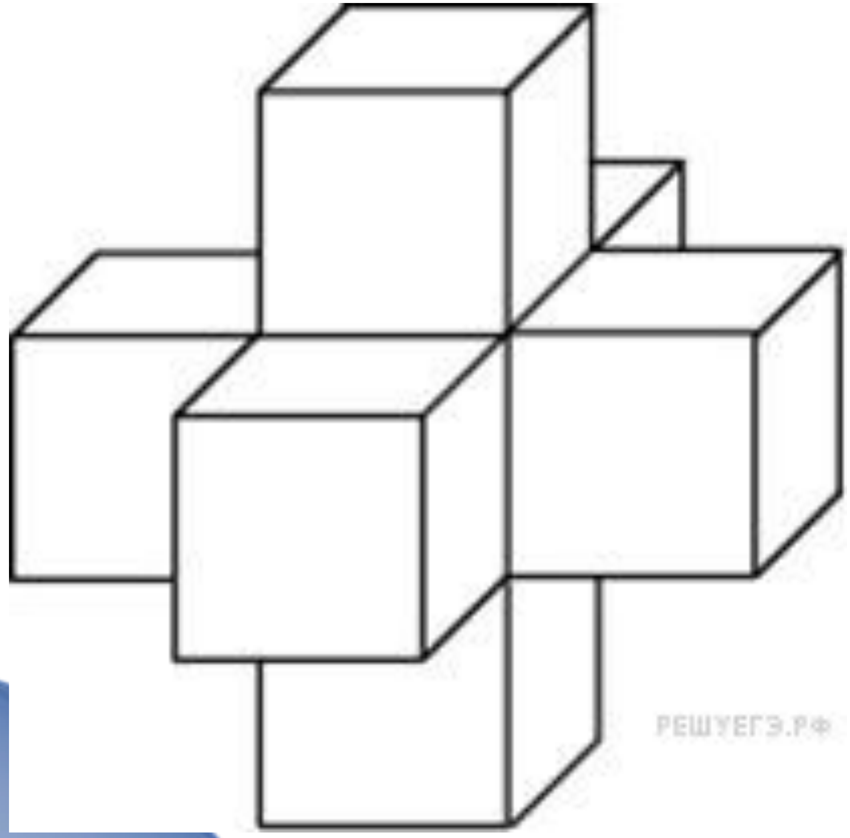


Зная, что в треугольной призме 5 граней, а в треугольной пирамиде 4 граней, но так как две грани совпадают получаем: **5 + 4 − 2 = 7.**

Задача №14

Найдите объем пространственного креста, изображенного на рисунке и составленного из единичных кубов.

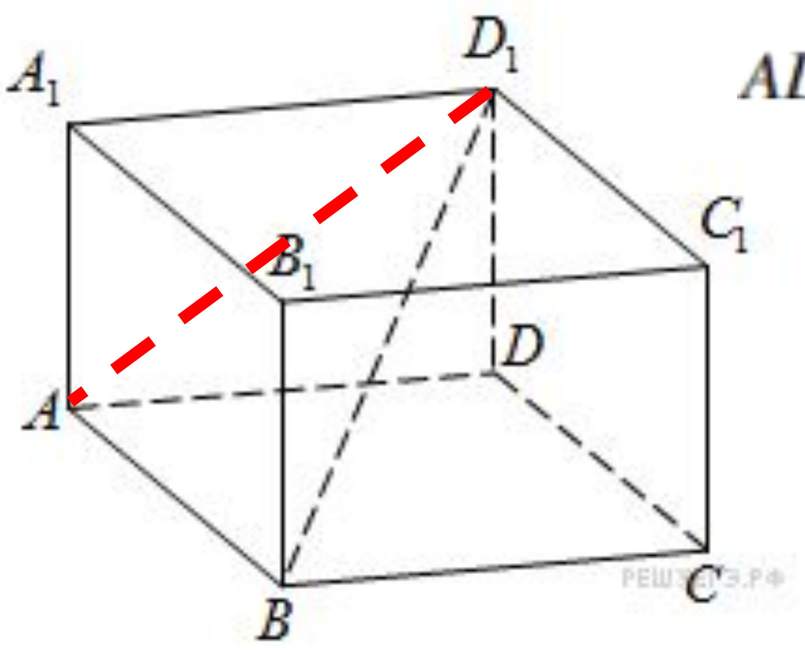
Решение



Крест состоит из 7 одинаковых кубов, поэтому его объем в 7 раз больше объема одного куба, а т.к. куб единичный, то его объём равен 1. Значит объём кресте равен **7** .

Задача №15

В прямоугольном параллелепипеде **ABCDA1B1C1D1** известно, что B**D1=5; CC1=3; B1C1=√7.** Найдите длину ребра AB .



$$AD_1=\sqrt{AA_1^2+A_1D_1^2}=\sqrt{CC_1^2+B_1C_1^2}=\sqrt{9+7}=4.$$

$$AB=\sqrt{BD_1^2-AD_1^2}=\sqrt{25-16}=3.$$

Задача №16

Найдите квадрат расстояния между вершинами *C* и *A*1 прямоугольного параллелепипеда, для которого *AB* = 5, *AD* = 4, *AA*1=3.

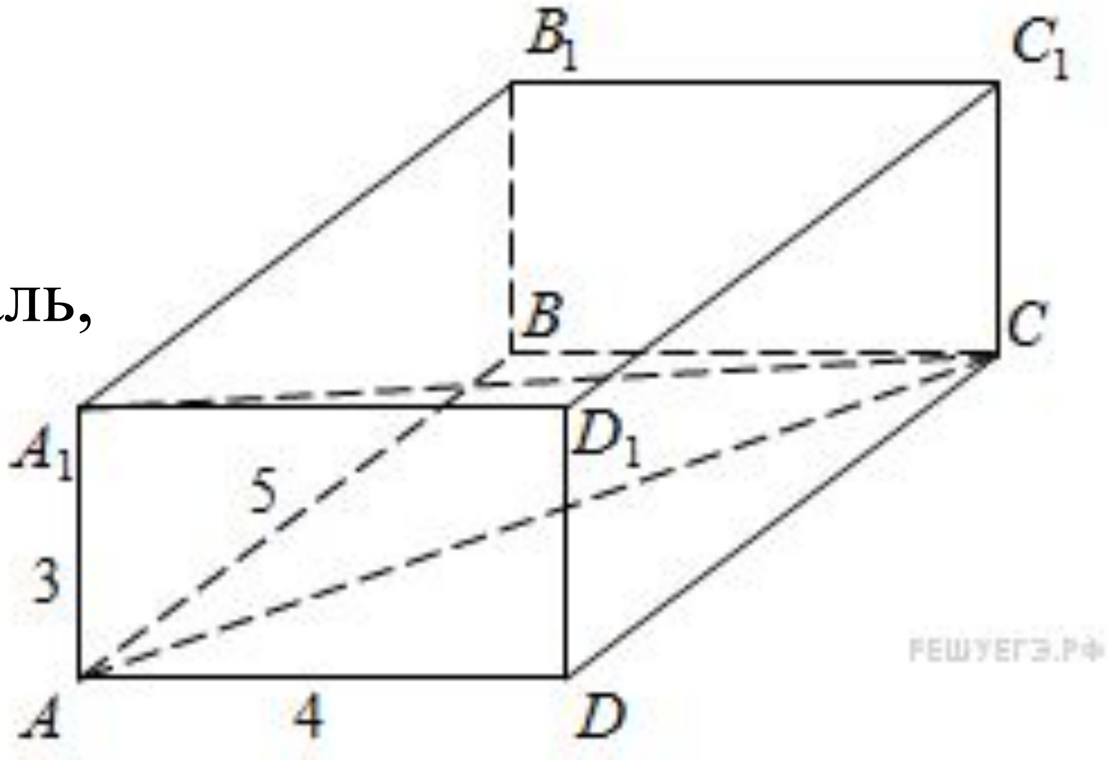
Решение.

$$A_1C^2 = AA_1^2 + AC^2.$$

В прямоугольнике ABCD AC–диагональ, AB =CD. Значит,

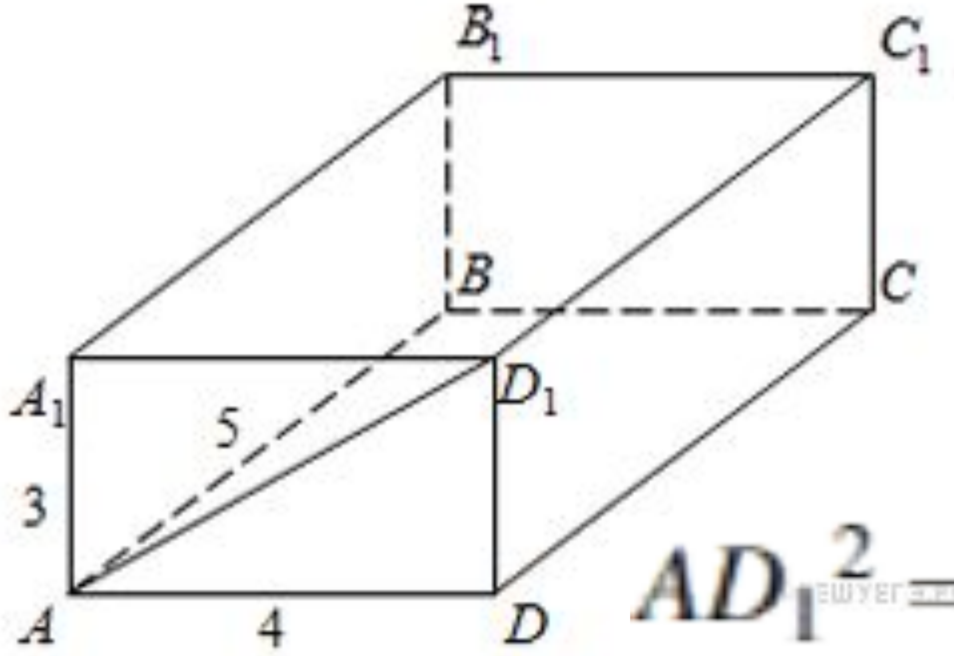
$$AC^2 = AD^2 + CD^2 = 16 + 25 = 41,$$

$$A_1C^2 = 9 + 41 = 50.$$



Задача №17

Найдите расстояние между вершинами *A* и *D* прямоугольного параллелепипеда, для которого *AB* =



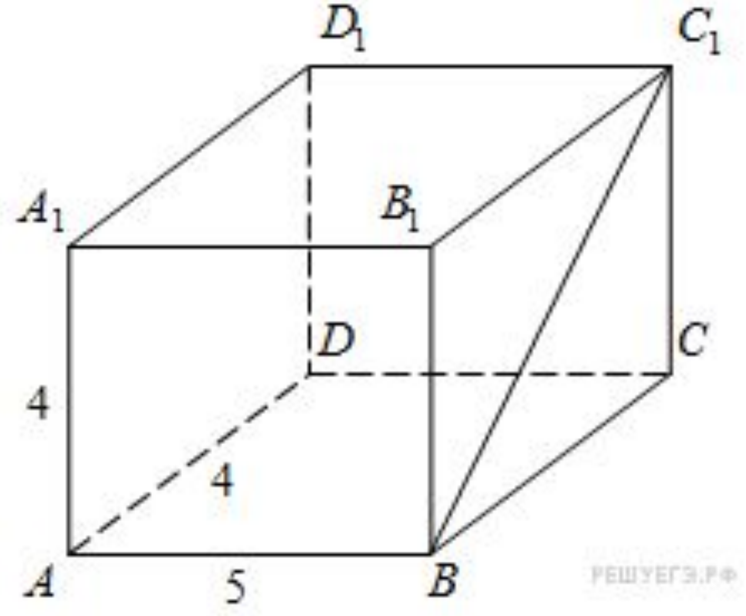
По теореме Пифагора:

$$AD_1^{\,2} = AA_1^{\,2} + A_1D_1^{\,2} = 9 + 16 = 25.$$

Задача №18

Найдите угол C1BC прямоугольного параллелепипеда, для которого *AB* = 5, *AD* = 4, *AA1*=4.

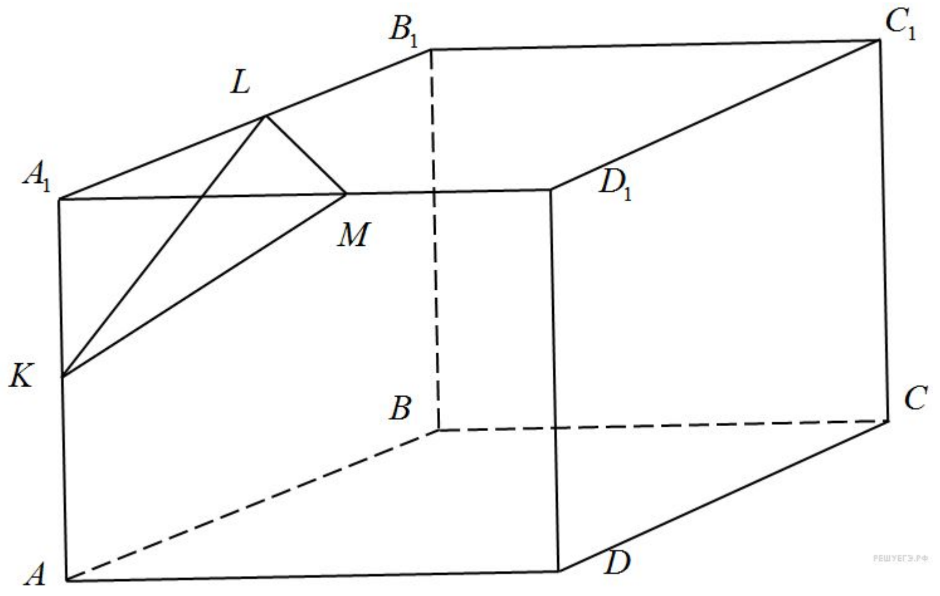
адусах.



Грань BB1C1C является квадратом со стороной 4,
а BC1 – диагональ этой грани, значит,
угол C1BC равен **45°**

Задача №19

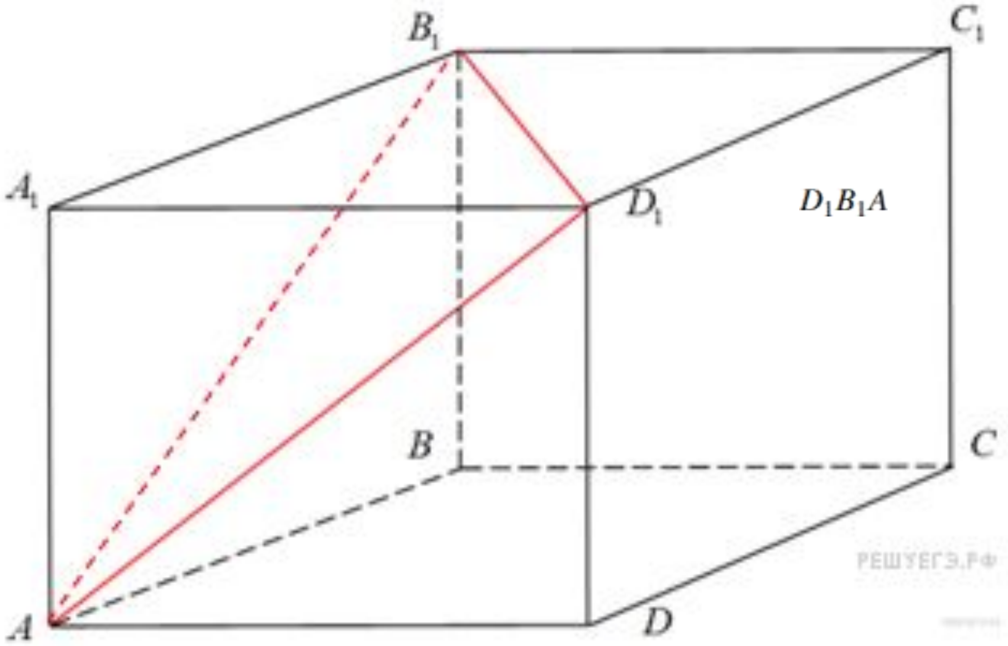
В кубе ABCDA1B1C1D1 точка К— середина ребра AA1 , точка L — середина ребра A1B1 , точка M— середина ребра A1D1 . Найдите угол MLK . Ответ дайте в градусах.



Стороны сечения ***KM, KL,*** и ***LM*** равны как гипотенузы равных прямоугольных треугольников ***AKM, KLA***, и ***LAM***, которые равны друг другу по двум катетам. Значит, треугольник ***LKM*** является равносторонним. Поэтому угол ***MLK* равен 60°.**

Задача №20

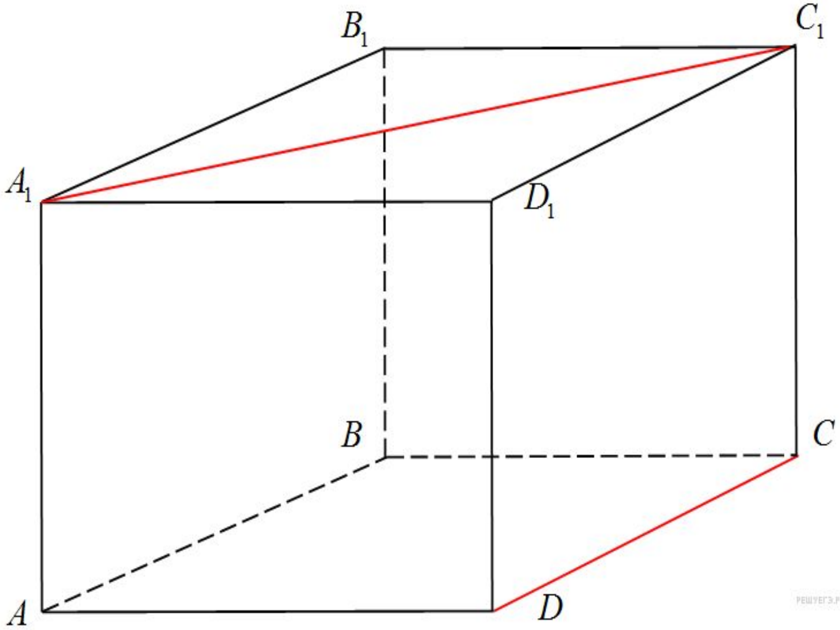
В кубе ABCDA1B1C1D1 найдите угол между прямыми AD1 и B1D1. Ответ дайте в градусах.



Каждая грань куба является квадратом. Диагонали этих квадратов равны, т.е. D1B1=B1A=AD1. Тогда треугольник D1B1A—равносторонний, значит, искомый угол **равен 60°.**

Задача №21

В прямоугольном параллелепипеде *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 известны длины рёбер *AB* = 8, *AD* = 6, *AA*1 = 21. Найдите синус угла между



.. Отрезки ***DC*** и ***D*1*C*1** лежат на параллельных прямых, поэтому искомый угол между прямыми ***A*1*C*1** и ***DC*** равен углу между прямыми ***A*1*C*1** и ***D*1*C*1**.

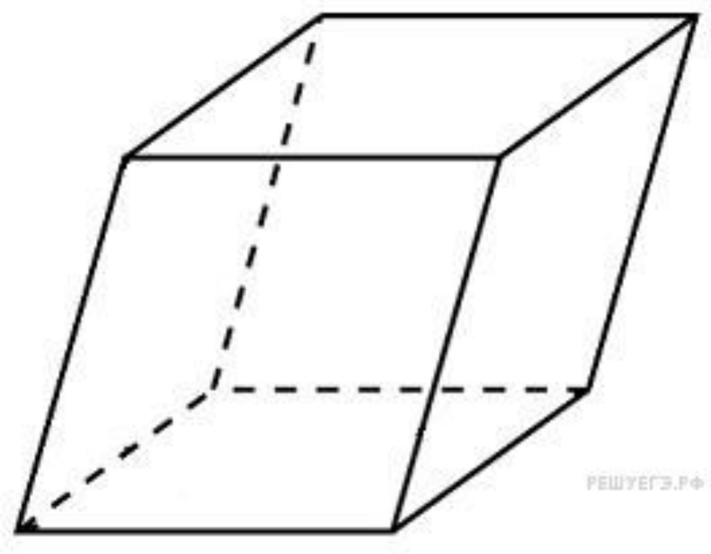
▲ ***A*1*C*1*D*1**- прямоугольный =>:

$$A_1C_1 = \sqrt{(D_1C_1)^2 + (A_1D_1)^2} = \sqrt{64+36} = 10.$$

Значит: $\sin A_1C_1D_1 = \dfrac{A_1D_1}{A_1C_1} = \dfrac{6}{10} = 0,6.$

Задача №22

Гранью параллелепипеда является ромб со стороной 1 и острым углом 60° . Одно из ребер параллелепипеда составляет с этой гранью угол в 60° и равно 2. Найдите объем параллелепипеда.



Объем параллелепипеда $V=Sh=SL\sin\alpha$, где S– площадь одной из граней, а L– длина ребра, составляющего с этой гранью угол α . Площадь ромба с острым углом в 60° равна двум площадям равностороннего треугольника

$$V=\frac{\sqrt{3}}{2}2\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{2}$$

Задачи

для самостоятельного решения

Задача №1 Решите самостоятельно

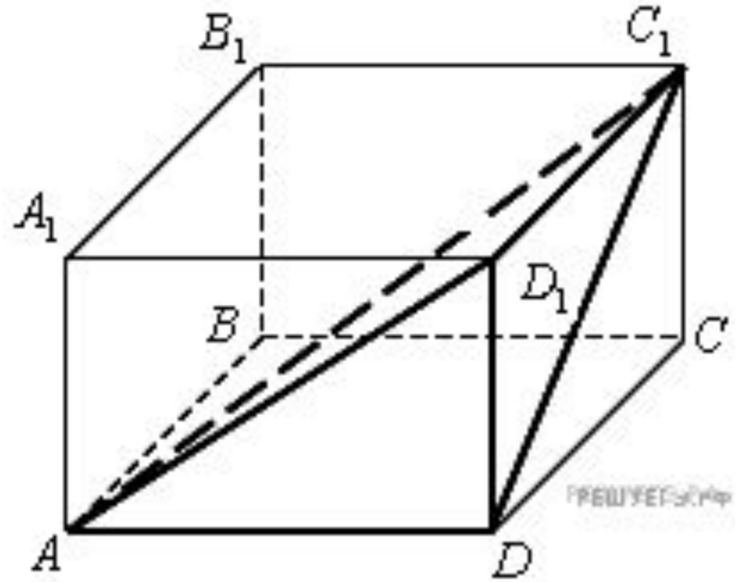
1. В бак, имеющий форму правильной четырёхугольной призмы со стороной основания, равной **40 см**, налита жидкость. Чтобы измерить объём детали сложной формы, её полностью погружают в эту жидкость. Найдите объём детали, если после её погружения уровень жидкости в баке поднялся на **2 см.** Ответ дайте в кубических сантиметрах.

Задача №2 Решите самостоятельно

2. В бак, имеющий форму прямой призмы, налито **5 л** воды. После полного погружения в воду детали уровень воды в баке поднялся **в 2,6 раза.** Найдите объём детали. Ответ дайте в кубических сантиметрах. В одном литре 1000 кубических сантиметров.

Задача №3 Решите самостоятельно

3. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A, D, C1, D1 прямоугольного параллелепипеда ABCDA1B1C1D1 , у которого AB=5, AD=7, AA1=6.



Задача №3 Решите самостоятельно

4. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A, B, A1, D1 прямоугольного параллелепипеда ABCDA1B1C1D1 , у которого AB=3, AD=3, AA1=6.

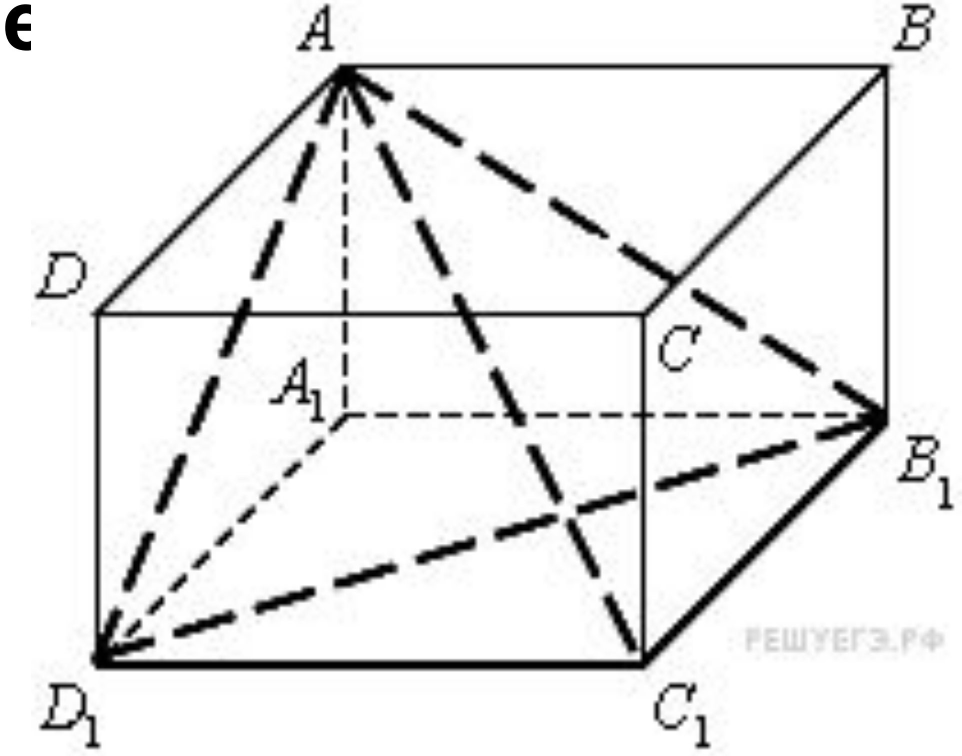
AA1=8.

Задача №4 Решите самостоятельно

5. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A, A_1, B_1, D_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB=5$, $AD=10$, $AA_1=9$.

Задача №6 Решите самостоятельно

6. **Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A, B1, C1, D1 прямоугольного параллелепипе… …торого AB=2, AD=10, AA1=6.**



Задача №7 Решите самостоятельно

7. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, D, A1, B1 прямоугольного параллелепипеда ABCDA1B1C1D1, у которого AB=8, AD=10, AA1=3.

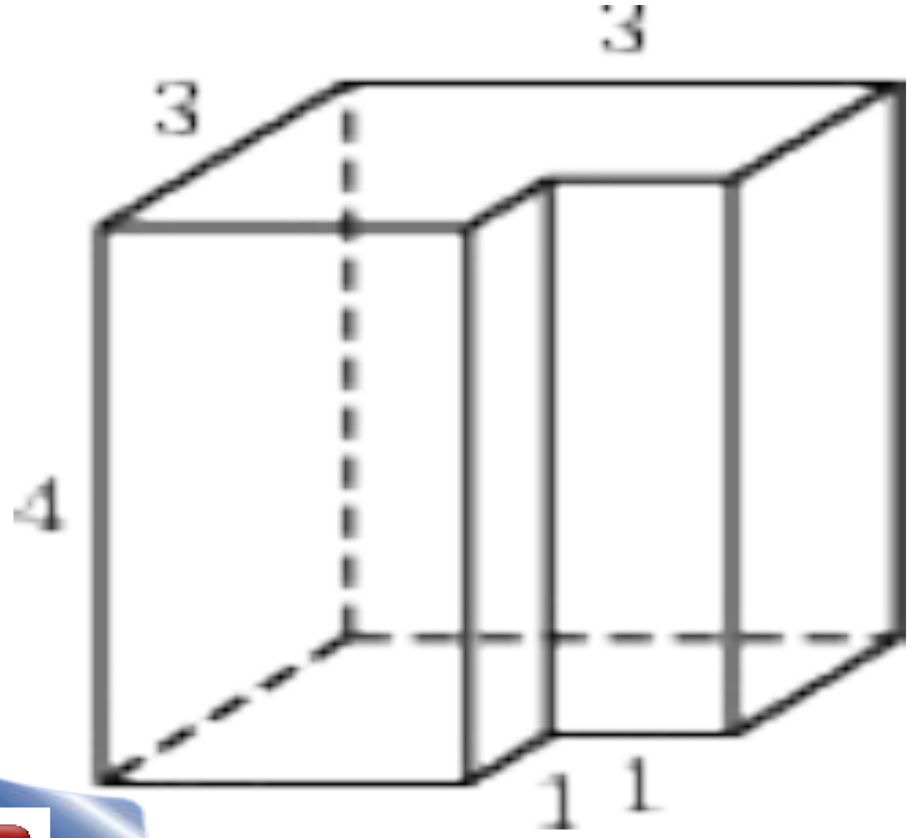
Задача №8 Решите самостоятельно

8. Объем параллелепипеда ABCDA1B1C1D1 равен 2,7. Найдите объем треугольной пирамиды AD1CB1 .

.

Задача №9 Решите самостоятельно

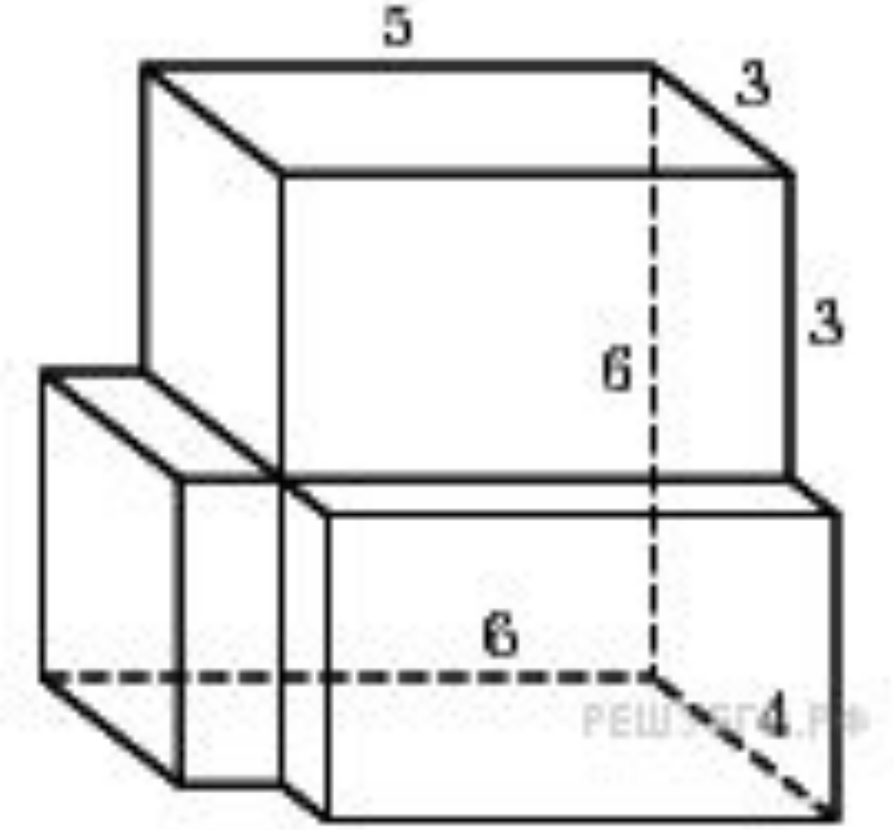
9. Найдите объем многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).



Задача №10 Решите самостоятельно

10. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 7 и 2. Объем параллелепипеда равен 112. Найдите третье ребро параллелепипеда, выходящее из той же вершины.

Задача №11 Решите самостоятельно



Задача №12 Решите самостоятельно

12. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что $CA_1=\sqrt{38}$; $DD_1=5$; $BC=3$. Найдите длину ребра BA.

Задача №13 Решите самостоятельно

13. Найдите квадрат расстояния между вершинами B и $D1$ прямоугольного параллелепипеда, для которого $AB = 5$, $AD = 5$, $AA1=3$. Ответ: 59

Задача №14 Решите самостоятельно

14. Найдите расстояние между вершинами B и A1 прямоугольного параллелепипеда, для которого *AB* = 12, *AD* = 7, *AA1*= 5

Задача №15 Решите самостоятельно

15. Найдите угол BB1C прямоугольного параллелепипеда, для которого *AB* = 5, *AD* = 6, *AA1*=6. Ответ дайте в градусах.