Геометрия моими глазами

Евклидова и неевклидова геометрия

*Выполнил ученик **10** В класса*
Ильющенко Дмитрий

Научный руководитель
Зяпарова Ирина Алексеевна

Кто такой Евклид

Евклид — древнегреческий математик, автор первого из дошедших до нас теоретических трактатов по математике.

Его главная работа «Начала». Содержит изложение планиметрии, стереометрии и ряда вопросов теории чисел; в ней он подвёл итог предшествующему развитию греческой математики и создал фундамент дальнейшего развития математики.

Евклидовая Геометрия

Евклидова геометрия — геометрическая теория, основанная на системе аксиом

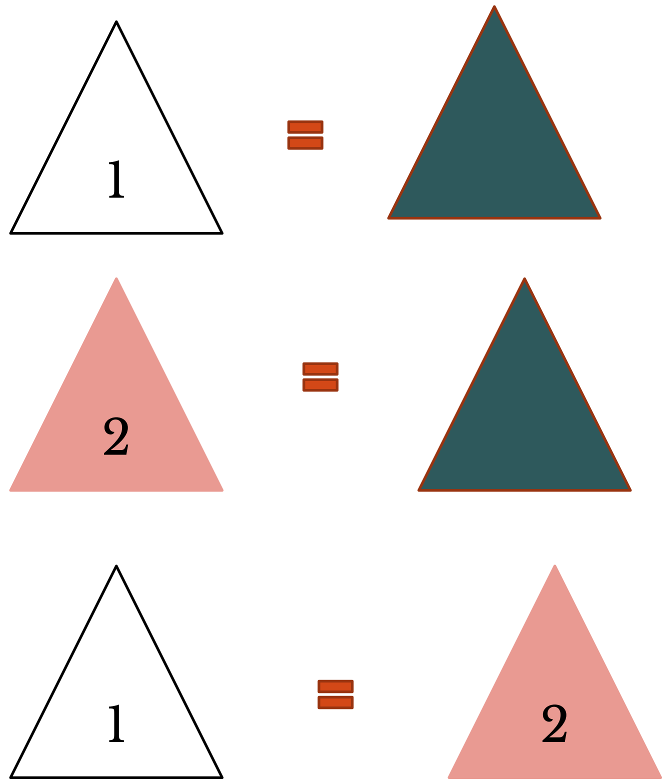
К Евклидовой геометрии относится преобразование инверсии, вопросы сферической геометрии, элементы геометрических построений, теорию измерения геометрических величин и другие вопросы. В Евклидовой геометрии четыре аксиомы и пять постулатов.

Что такое Аксиома

Аксиома — исходное положение какой-либо теории, принимаемое в рамках данной теории истинным без требования доказательства и используемое в основе доказательства других ее положений.

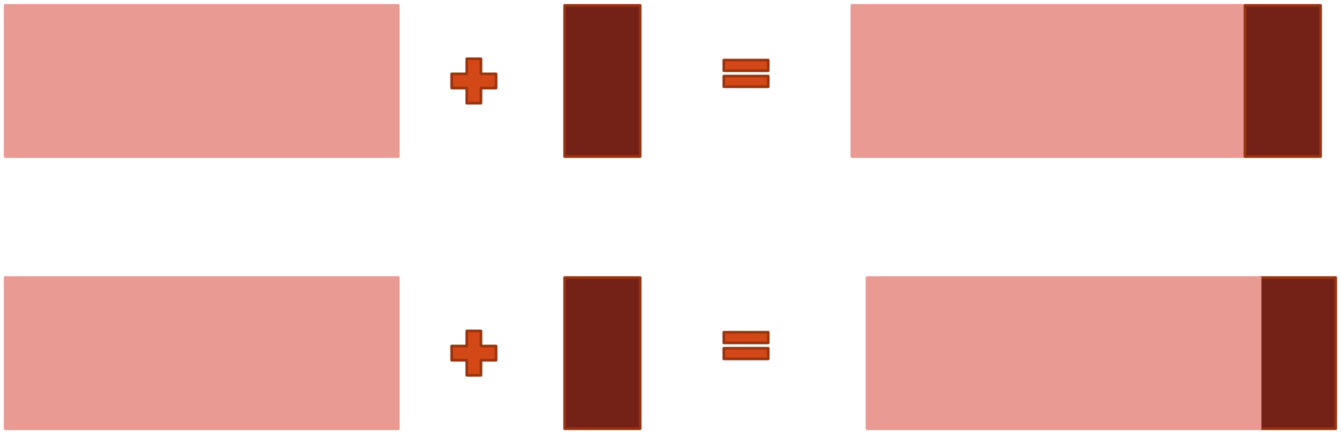
Первая Аксиома

Равные одной и той же, равны между собой.



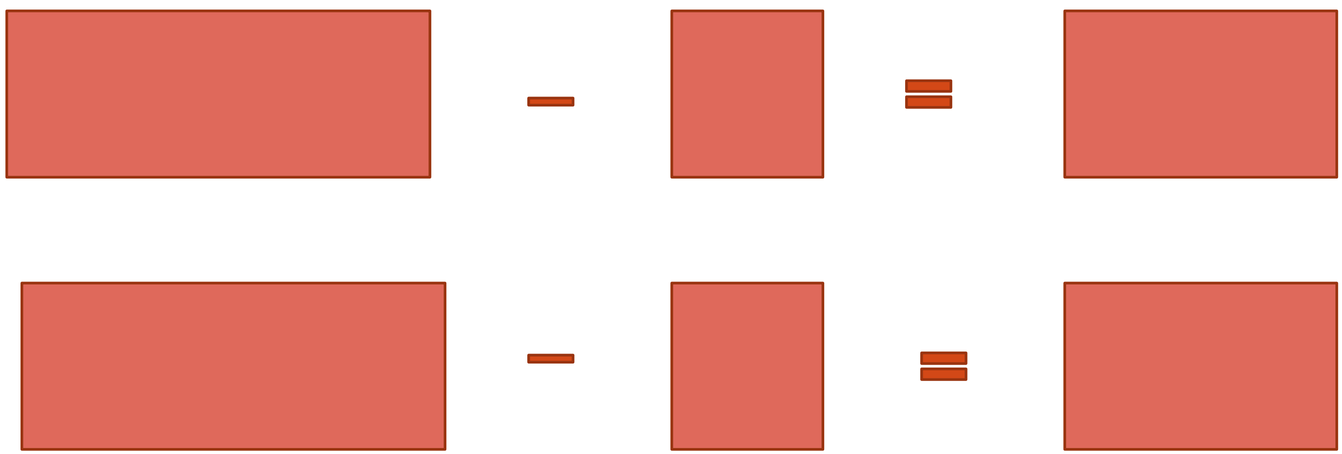
Вторая Аксиома

Если к равным прибавить равные, то получатся равные



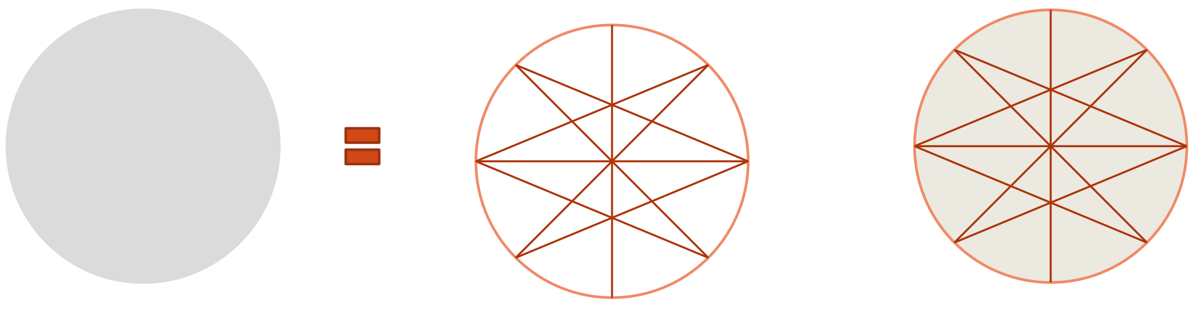
Третья Аксиома

Если от равных отнять равные, то получатся равные.



Четвертая Аксиома

Совмещаемые друг с другом равны друг другу



Что такое постулаты

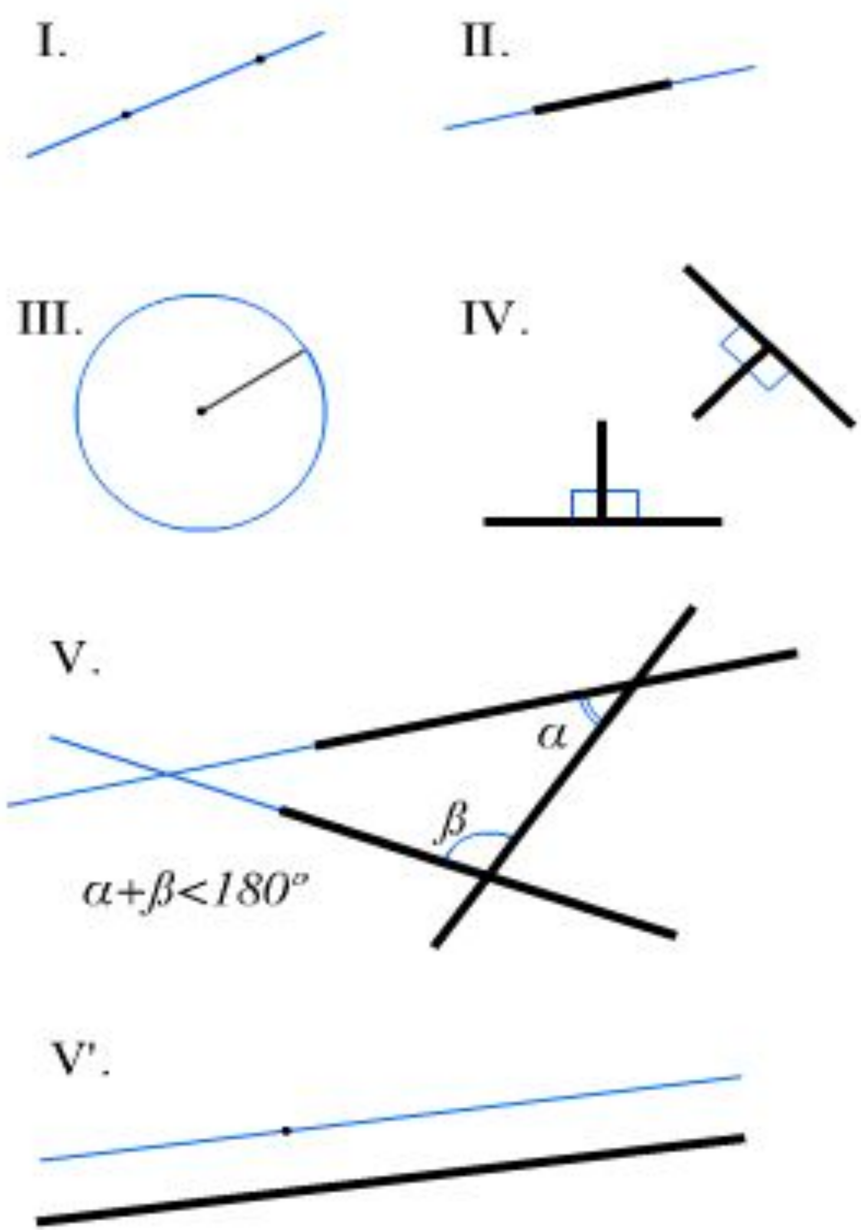
Постулат -это утверждение которое берут в основу теории.

Постулат можно было бы считать равноценным аксиоме, но на самом деле есть отличие: само слово означает, что это - утверждение, базовое утверждение для какой-то гипотезы.

Это отличие - общепринятое обозначение тех утверждений, которые пока еще не очевидны эмпирически. Если на основе постулата строится непротиворечивая теория, описывающая свою абстракцию реальности, то есть основания попытаться найти такие условия в действительности, в которых этот постулат окажется равноценным аксиоме: т.е. можно будет доказать его объективную достоверность. Не раз случалось, что постулированное оказывалось неадекватным развиваемой теории, и от такого постулата отказывались.

О чем говорят постулаты

- От всякой точки до всякой точки можно провести прямую.
- Ограниченную прямую можно непрерывно продолжать по прямой.
- Из всякого центра всяким раствором может быть описан круг.
- Все прямые углы равны между собой.
- Если прямая, пересекающая две прямые, образует внутренние односторонние углы, меньшие двух прямых, то, продолженные неограниченно, эти две прямые встретятся с той стороны, где углы меньше двух прямых.



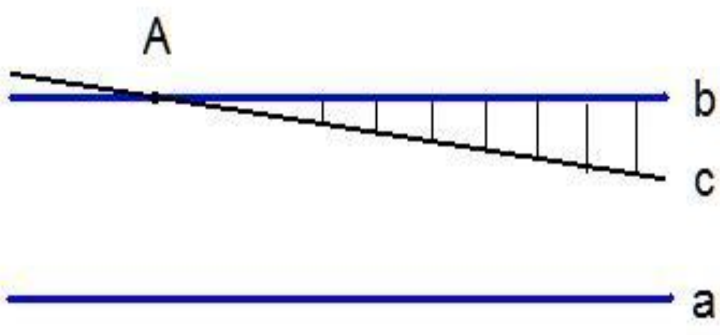
Графический пример всех постулатов

Вскоре многие люди пытались доказать пятый постулат Евклида.

Пятый постулат чрезвычайно сильно отличается от других постулатов Евклида, простых и интуитивно очевидных. Поэтому в течение двух тысячелетий не прекращались попытки исключить его из списка аксиом и вывести как теорему. Все эти попытки окончились неудачей. Несмотря на отрицательный результат, эти поиски не были напрасны, так как в конечном счёте привели к полному пересмотру научных представлений о геометрии Вселенной.

Попытки доказательства

Клавдий Птолемей, критикует его доказательство и предлагает своё собственное.



Его можно описать так:

Пусть прямая проходит через заданную точку параллельно прямой ; докажем, что любая другая прямая , проведенная через ту же точку, пересекается с прямой. Расстояние между прямыми от точки их пересечения возрастает неограниченно (ещё раз подчеркнём, что доказательство этой теоремы не опирается на V постулат). Но тогда в конце концов расстояние между и превысит расстояние между параллельными прямыми, то есть прямые и пересекутся.

Приведенное доказательство опирается на допущение, что расстояние между двумя параллельными прямыми постоянно (или, по крайней мере, ограничено). Впоследствии выяснилось, что это допущение равносильно V постулату.

Посидоний

Учёный I века до н. э. Посидоний предложил определить параллельные как прямые, на всём протяжении равноудалённые друг от друга. Из такого определения легко выводится пятый постулат. Однако определение Посидония некорректно: ниоткуда не следует, что линия, равноудалённая от данной прямой, есть прямая.

Сабит ибн Курра

Сабит ибн Курра (IX век) дал два доказательства;

В первом он опирается на предположение, что если две прямые удаляются друг от друга с одной стороны, они обязательно приближаются с другой стороны.

Во втором, как и Посидоний, он исходит из существования равноотстоящих прямых, причём этот факт ибн Курра пытается вывести из представления о «простом движении», т. е. о равномерном движении на фиксированном расстоянии от прямой (ему представляется очевидным, что траектория такого движения — тоже прямая).

Каждое из двух упомянутых утверждений Ибн Курры эквивалентно V постулату.

Омар Хайям

Поэт и математик Омар Хайям подверг критике попытки ввести в геометрию механическое движение.

Он предложил заменить V постулат на другой, более простой: две сходящиеся прямые пересекаются, и невозможно, чтобы две сходящиеся прямые расходились в направлении схождения. Каждая из двух частей этого утверждения равносильна постулату Евклида.

Таким образом, в конце XIX века проблема параллелей оставалась нерешенной.

В 1826г. Лобачевский дал окончательное, но совсем неожиданное решение проблемы.

Он создал новую геометрию, заменив Евклидов постулат более общей аксиомой параллельности и сохранив прочие аксиомы и постулаты.

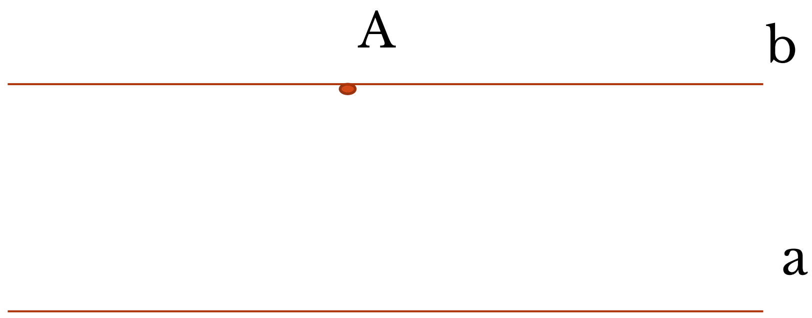
Николай Иванович Лобачевский

(20 ноября (1 декабря) 1792г.
— 12 (24) февраля 1856г.

Русский математик, создатель неевклидовой геометрии, в течение 40 лет преподавал в Казанском университете, в том числе 19 лет руководил им в должности ректора.

Евклидова аксиома о параллельных гласит:

Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит не более одной прямой, лежащей с данной прямой в одной плоскости и не пересекающей её.



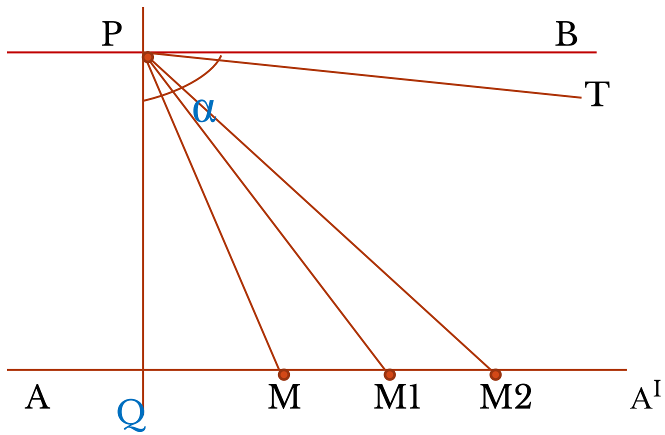
В геометрии Лобачевского, вместо неё принимается следующая аксиома:

Через точку, не лежащую на данной прямой, проходят по крайней мере две прямые, лежащие с данной прямой в одной плоскости и не пересекающие её.

Попробуем понять смысл аксиомы

Рассмотрим на плоскости

AA^I- произвольная прямая
P-точка вне прямой
PQ-перпендикуляр к прямой AA^I
M-переменная точка на луче QA



При движении точки M по лучу QA от точки Q к точке A прямая PM поворачивается против часовой стрелки. Таким образом имеется какое-то предельное положение (луч PT) к которому приближается луч PM, когда M неограниченно удаляется по лучу QA.

Выводы

1. Если допустить, что PT совпадает с PB, мы получим постулат параллельности Евклида.

2. Можно сделать более общее допущение (оно и было принято Лобачевским)

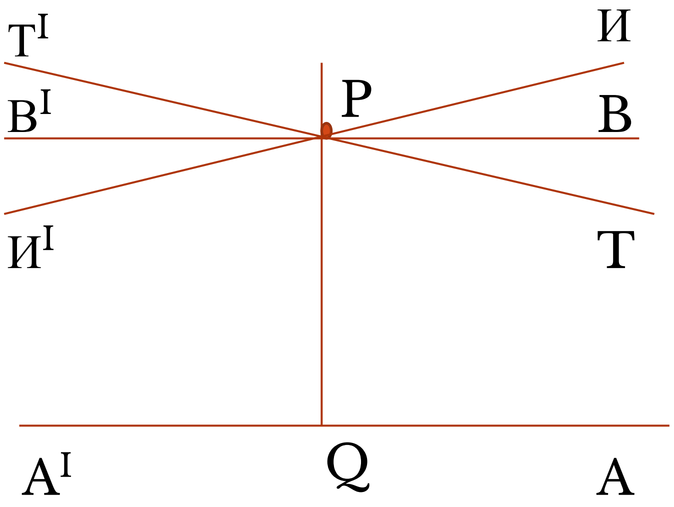
Аксиома Лобачевского:

Луч PT образует с PQ некоторый угол $\alpha < 90^0$. Этот угол Лобачевский назвал углом параллельности для отрезка PQ.

Прямая PT названа Лобачевским параллелью к

AA^I в точке P в направлении AA^I

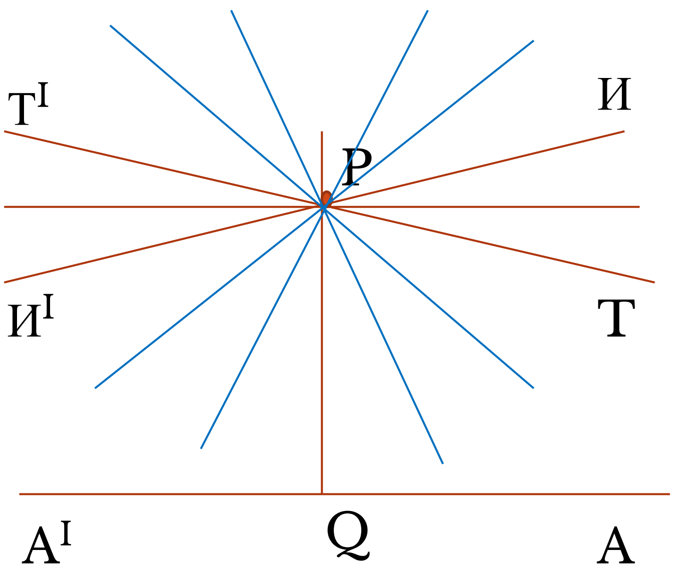
Параллели в точке P к прямой AA^{I} в двух направлениях



Рассмотрев симметрию с осью PQ видно, что $ИИ^{I}$, симметричная $T^{I}T$, также проходит через точку P и не имеет общих точек с QA. Эти две прямые $T^{I}T$ и $ИИ^{I}$ названы параллелями в точке P к прямой AA^{I} в двух ее направлениях соответственно AA^{I} и $A^{I}A$.

С помощью этих прямых все прямые, проходящие через точку P разбиваются на 2 класса:

I класс:



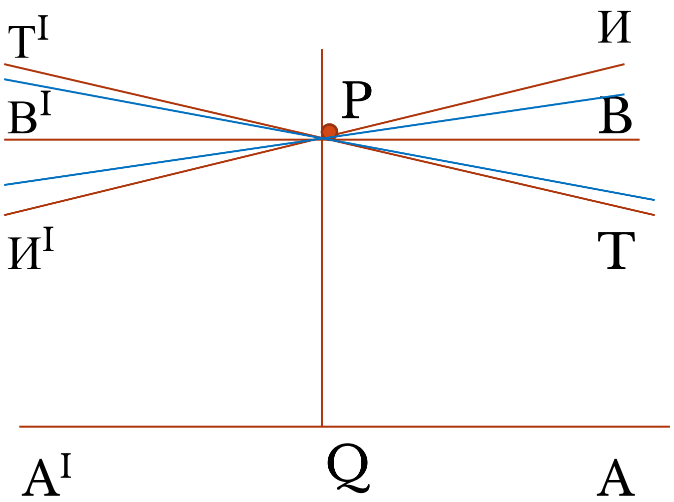
Прямые, пересекающие $A^I A$

(это прямые, содержащиеся объединении двух вертикальных углов

$И^I PT$ и $ИPT^I$.

Множеству таких прямых принадлежит прямая PQ).

II класс:



- Прямые, не пресекающие A^IA (параллели T^IT и $ИИ^I$, а также все прямые, содержащиеся в объединении вертикальных углов ТРИ и $И^IPT$; этот класс содержит и прямую B^I B).

Прямые этого класса, отличные от параллелей, Лобачевский назвал разводными. Теперь их называют расходящимися или сверхпараллелями к прямой A^IA.

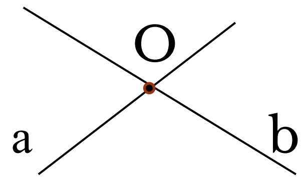
Основные факты геометрии Лобачевского
(отличия от геометрии Евклида)

- 1. Сумма углов треугольника меньше 180^0 и может быть неодинакова у различных треугольников.
- 2. Нет подобных фигур

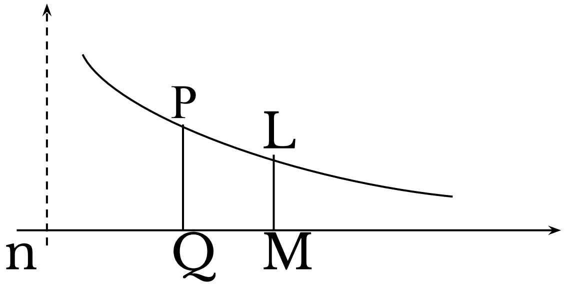
  (т.к. все теоремы о подобии выводятся только с помощью Евклидовой теории параллелей).
- 3. Появился признак равенства треугольников по трем углам.

- 4. Две различные прямы на плоскости могут образовать пару только одного из трех типов.

1) Пересекающиеся прямые

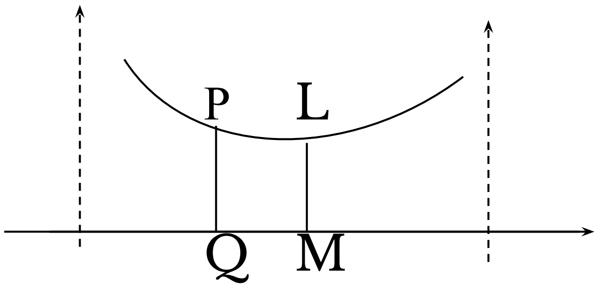


2) Параллельные прямые



В направлении параллельности они неограниченно сближаются, аналогично тому, как гипербола приближается к своей асимптоте. Иначе говоря, расстояние от точек одной прямой до другой прямой делается сколь угодно малым, в направлении противоположном это расстояние неограниченно возрастает.

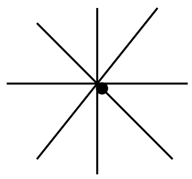
3) Расходящиеся прямые



Они имеют один общий перпендикуляр.

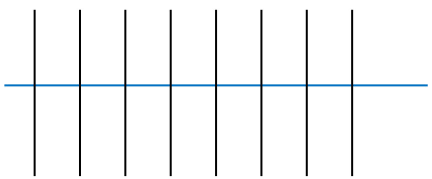
По обе стороны перпендикуляра прямые расходятся, и притом неограниченно.

Трем типам пар прямых на плоскости соответствуют три типа пучков прямых, покрывающих всю плоскость



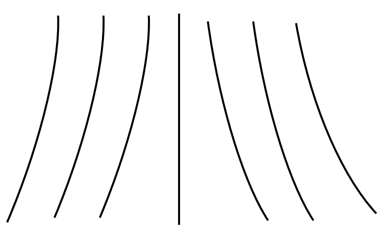
- Пучок 1-го рода

  Множество всех прямых, проходящих через одну точку.



- Пучок 2-го рода

  Множество всех прямых плоскости, перпендикулярных к одной прямой, которая называется базой пучка.



- Пучок 3-го рода

  Множество всех прямых плоскости, параллельных одной прямой в заданном направлении; любые две прямые такого пучка параллельны между собою в направлениях, соответствующих заданному.

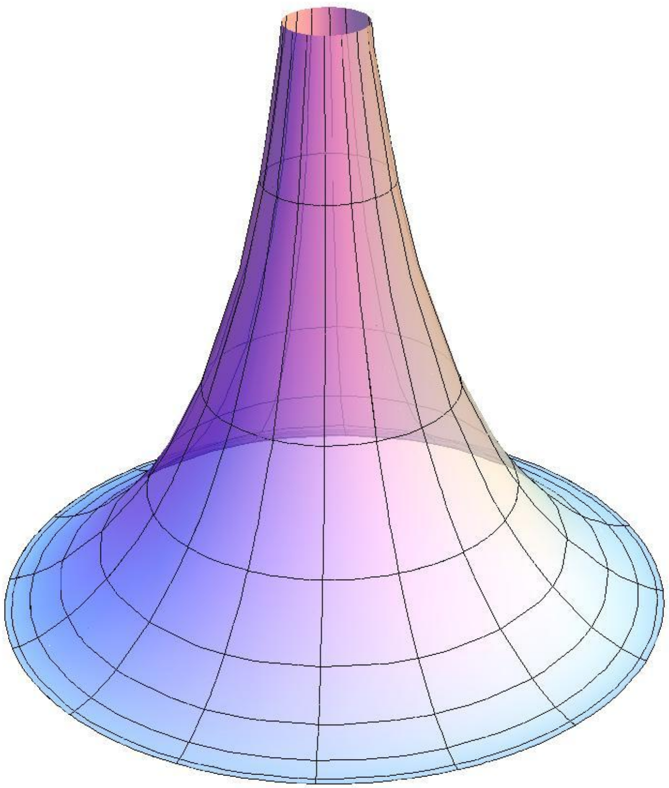
Лобачевский подверг глубокой разработке проблемы своей геометрии; в частности, он находил с помощью методов дифференциального и интегрального исчисления площади фигур, ограниченные криволинейными контурами и объемы тел.

Лобачевский умер, а его геометрия еще не получила признания, оно пришло лишь через 12-15 лет после его смерти.

Основную роль в признании идей Лобачевского сыграли исследования итальянского ученого Е. Бельтрами, немца Ф. Клейна, француза А. Пуанкаре.

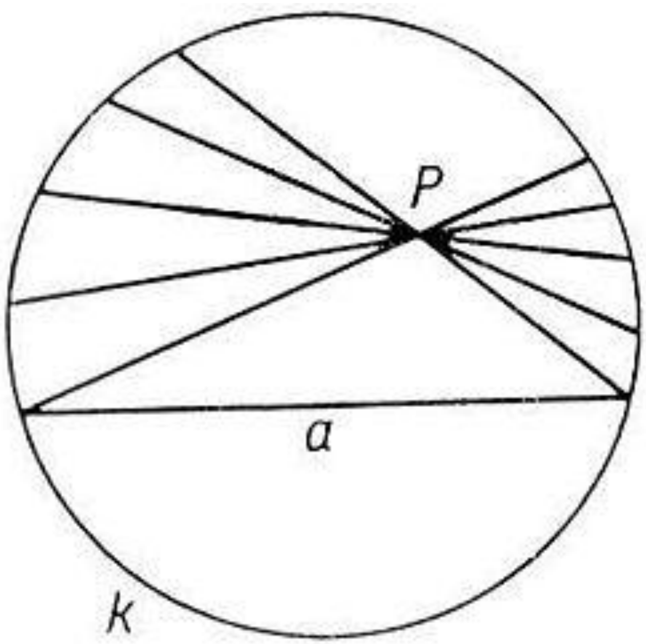
Псевдосфера

Итальянский математик Э. Бельтрами в 1868 году заметил, что геометрия на куске плоскости Лобачевского совпадает с геометрией на поверхностях постоянной отрицательной кривизны, простейший пример которых представляет псевдосфера.



Если точкам и прямым на конечном куске плоскости Лобачевского сопоставлять точки и кратчайшие линии
(геодезические) на псевдосфере и движению в плоскости
Лобачевского сопоставлять перемещение фигуры по псевдосфере с изгибанием, то есть деформацией, сохраняющей длины, то всякой теореме геометрии Лобачевского будет отвечать факт, имеющий место на псевдосфере.
При этом длины, углы,
площади понимаются в смысле естественного измерения их на псевдосфере.

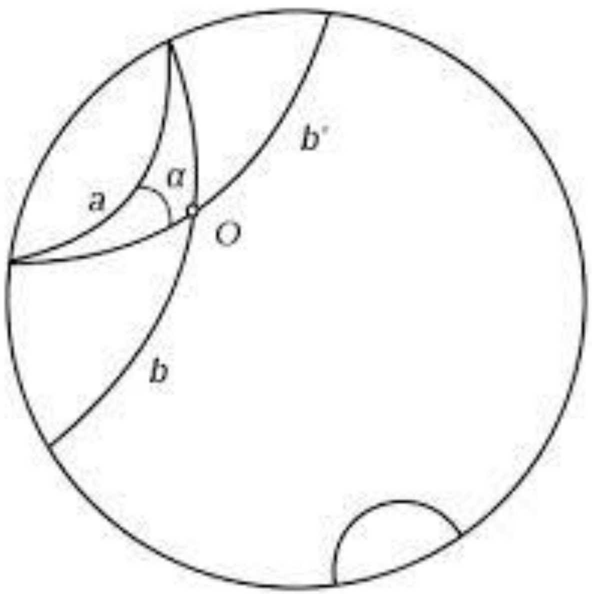
Модель Клейна



В 1871 году Клейн предложил первую полноценную модель плоскости Лобачевского.

Плоскостью служит внутренность круга, прямой — хорда круга без концов, а точкой — точка внутри круга. «Движением» назовём любое преобразование круга в самого себя, которое переводит хорды в хорды. Соответственно, равными называются фигуры внутри круга, переводящиеся одна в другую такими преобразованиями. Тогда оказывается, что любой геометрический факт, описанный на таком языке, представляет теорему или аксиому геометрии Лобачевского.
Иными словами, всякое утверждение геометрии Лобачевского на плоскости есть не что иное, как утверждение евклидовой геометрии, относящееся к фигурам внутри круга, лишь пересказанное в указанных терминах.
Евклидова аксиома о параллельных здесь явно не выполняется, так как через точку , не лежащую на данной хорде a (то есть «прямой»), проходит сколько угодно не пересекающих её хорд («прямых»)

Модель Пуанкаре



Позже Пуанкаре, в связи с задачами теории функций комплексного переменного дал другую модель.

За плоскость Лобачевского принимается внутренность круга, прямыми считаются дуги окружностей, перпендикулярных окружности данного круга, и его диаметры, движениями — преобразования, получаемые комбинациями инверсий относительно окружностей, дуги которых служат прямыми.

Модель Пуанкаре замечательна тем, что в ней углы изображаются обычными углами.

Благодарю за внимание!