

Презентация к уроку

Геометрия 10 класс

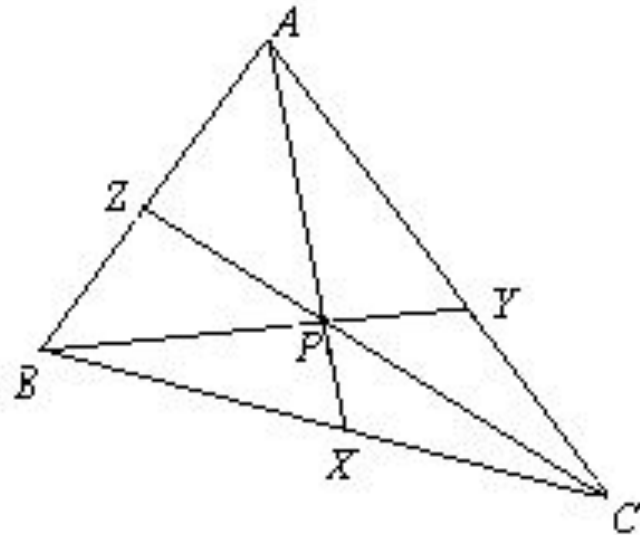
Теоремы Чебы и Менелая

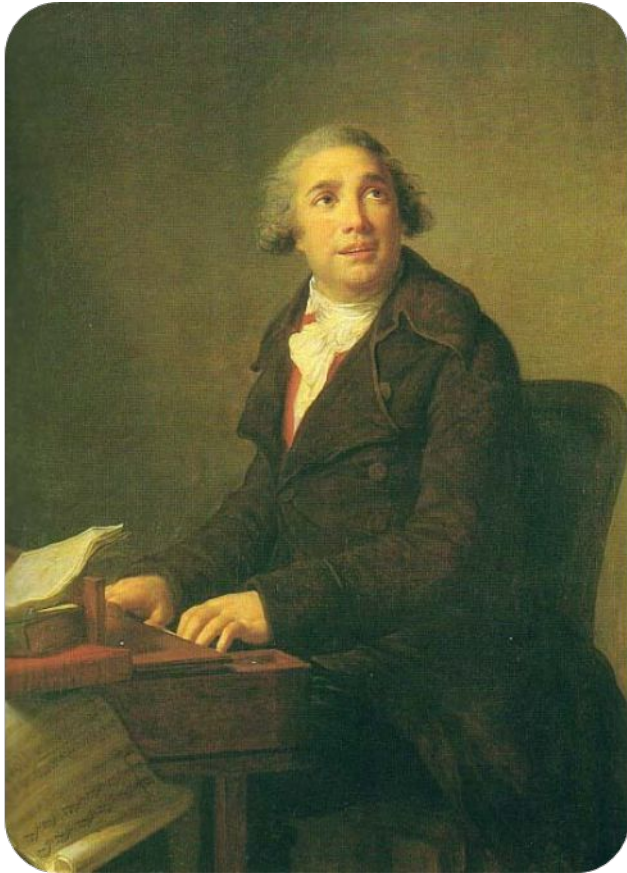
Теоремы Чева и Менелая

«Обладая литературой более обширной, чем алгебра и арифметика вместе взятые, и по крайней мере столь же обширной, как анализ, геометрия в большей степени чем любой другой раздел математики, является богатейшей сокровищницей интереснейших, но полузабытых вещей, которыми спешащее поколение не имеет времени насладиться». **Е. Т. Белл.**

ЧЕВИАНА

- *Отрезок, соединяющий вершину треугольника с некоторой точкой на противоположной стороне, называется **чевианой**.*
- Таким образом, если в треугольнике ABC X , Y и Z - точки, лежащие на сторонах BC , CA , AB соответственно, то отрезки AH , BY , CZ являются чевианами.
- Этот термин происходит от имени итальянского математика *Джованни Чевы*, который в 1687 году опубликовал следующую очень полезную **теорему**





Теорема названа в честь итальянского математика Джованни Чевы, который доказал её в 1678 году.

День рождения: 07.12.1647 года

Дата смерти: 15.06.1734 года

Гражданство: Италия



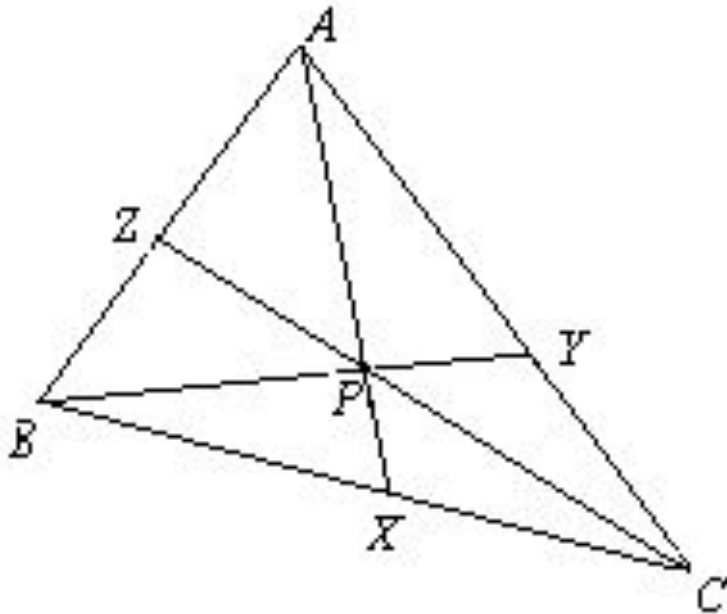
Джованни Чева родился в 1647 году в Италии. Он окончил иезуитский колледж в Милане, после чего стал студентом Университета в Пизе, где позже и стал работать профессором математики.

С 1686 года Чева работал в Университете в Мантуе, оставаясь на этом посту до самого конца своей жизни.



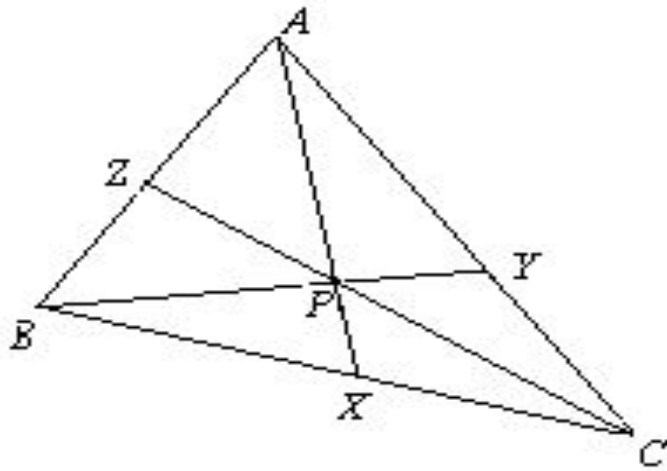
Университет Пизы .Университетом учебное заведение было признано в 1343 году декретом Папы Климента VI.

Теорема Чебы



- **Если три чевианы $AХ, ВУ, СZ$ (по одной из каждой вершины) треугольнка ABC конкурентны, то**

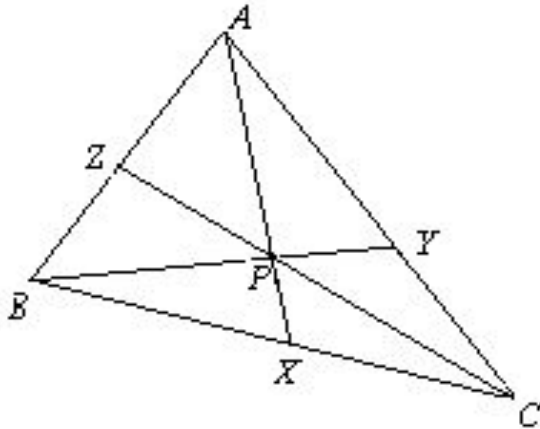
$$\frac{|BX|}{|XC|} \cdot \frac{|CY|}{|YA|} \cdot \frac{|AZ|}{|ZB|} = 1$$



Когда мы говорим, что три прямые (или отрезка) **конкурентны**, то мы имеем в виду, что все они проходят через одну точку, которую обозначим через P.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

- Для доказательства **теоремы Чебы** вспомним, что площади треугольников с равными высотами пропорциональны основаниям треугольников.
- ♦ Ссылаясь на рисунок, мы имеем



$$\frac{|BX|}{|XC|} = \frac{S_{ABX}}{S_{AXC}} = \frac{S_{BPX}}{S_{XPC}} = \frac{S_{ABX} - S_{BPX}}{S_{AXC} - S_{XPC}} = \frac{S_{ABP}}{S_{CPA}}$$

$$\frac{|BX|}{|XC|} = \frac{S_{ABX}}{S_{AXC}} = \frac{S_{BPX}}{S_{XPC}} = \frac{S_{ABX} - S_{BPX}}{S_{AXC} - S_{XPC}} = \frac{S_{ABP}}{S_{CPA}}$$

$$\frac{|AZ|}{|ZB|} = \frac{S_{ACZ}}{S_{BCZ}} = \frac{S_{APZ}}{S_{ZPB}} = \frac{S_{ACZ} - S_{APZ}}{S_{BCZ} - S_{ZPB}} = \frac{S_{ACP}}{S_{BCP}}$$

- *Теперь, если мы перемножим их, то получим*

- $$\frac{|BX|}{|XC|} \cdot \frac{|CY|}{|YA|} \cdot \frac{|AZ|}{|ZB|} = \frac{S_{ABP}}{S_{CPA}} \cdot \frac{S_{CPB}}{S_{ABP}} \cdot \frac{S_{ACP}}{S_{BCP}} = 1$$

Рассмотрим доказательство некоторых следствий теоремы Чебы.



Задача 1: Доказать, что биссектрисы углов треугольника пересекаются в одной точке.

Доказательство:

Пусть AA_1 , BB_1 , CC_1 – биссектрисы треугольника ABC .

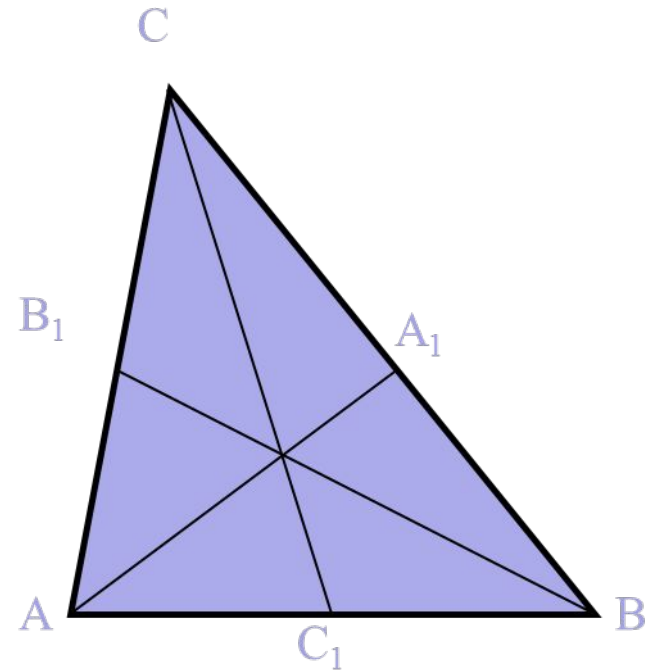
Так как биссектриса угла треугольника делит противоположную сторону на отрезки, длины которых пропорциональны противолежащим сторонам, то

$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{AC}{CB}; \quad \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{AB}{AC}; \quad \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{BC}{AB}.$$

Перемножив полученные равенства, получим:

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{AC}{CB} \cdot \frac{AB}{AC} \cdot \frac{BC}{AB} = 1.$$

Следовательно, по теореме Чебы, биссектрисы пересекаются в одной точке.



Задача 2: Докажите, что медианы треугольника пересекаются в одной точке.

Доказательство.

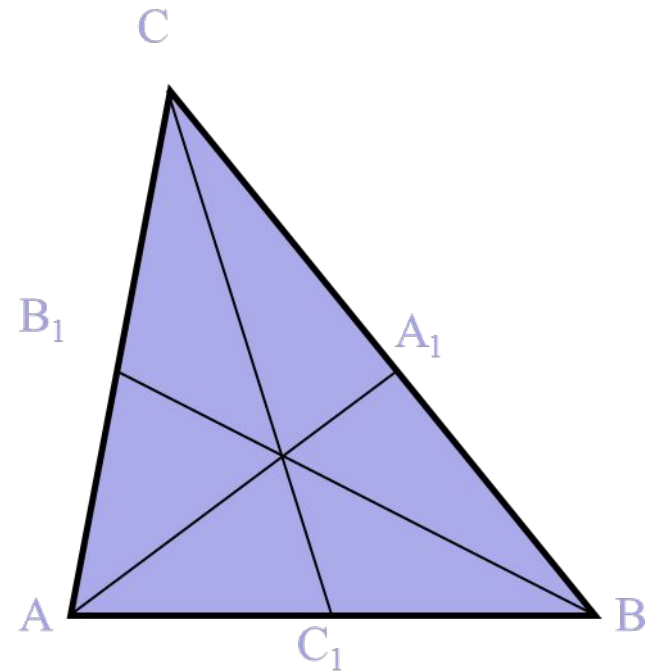
Так как точки A_1 , C_1 , B_1 лежат на сторонах треугольника, достаточно доказать, что выполняется равенство :

$$\frac{\overline{AB_1}}{\overline{B_1C}} \cdot \frac{\overline{CA_1}}{\overline{A_1B}} \cdot \frac{\overline{BC_1}}{\overline{C_1A}} = 1.$$

Так как BB_1 , CC_1 , AA_1 медианы, то:

$$\frac{AB_1}{B_1C} = 1; \frac{CA_1}{A_1B} = 1; \frac{BC_1}{C_1A} = 1.$$

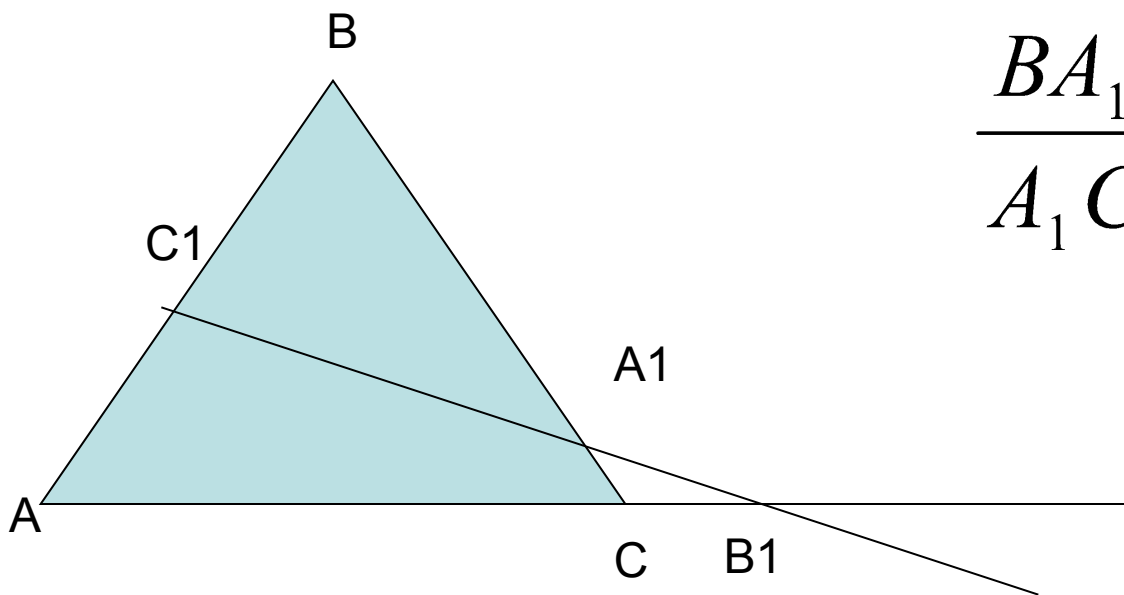
Тогда в силу теоремы Чебы прямые BB_1 , CC_1 , AA_1 пересекаются в одной точке. Ч. т.д.



Теорема Менелая:

- Пусть точка A_1 лежит на стороне BC треугольника ABC , точка C_1 – на стороне AB , точка B_1 – на продолжении стороны AC за точку C . Точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$



$$\frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{AC_1}{C_1B} = 1$$

$$\frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} \cdot \frac{AB_1}{B_1C} = 1.$$

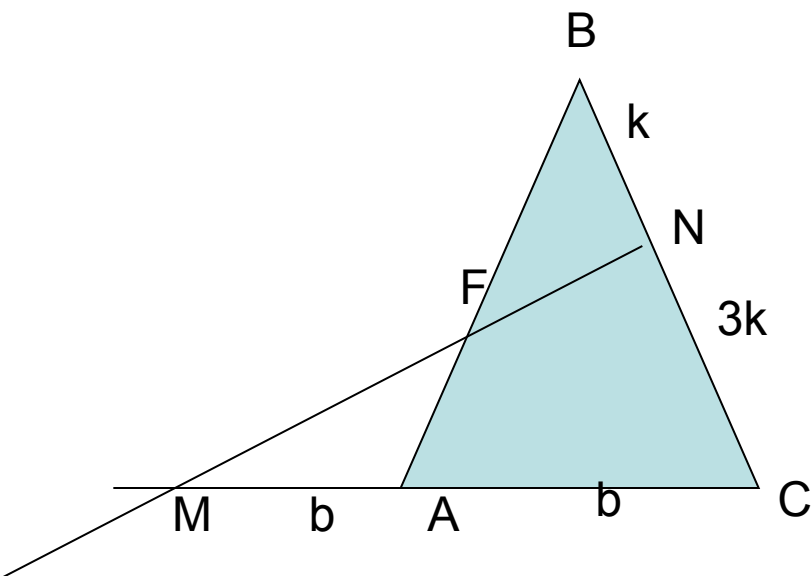
Эта теорема Входит в золотой фонд древнегреческой математики. Она дошла до нас в арабском переводе книги «Сферика» Менелая Александрийского. Равенство Менелая можно записывать, начиная с любой вершины треугольника, в любом направлении (по часовой стрелке, против часовой стрелки).

Задача 1.

В треугольнике ABC на стороне BC взята точка N так, что $NC = 3BN$; на продолжении стороны AC за точку A взята точка M так, что $MA = AC$. Прямая MN пересекает сторону AB в точке F.

Найдите: отношение $\frac{BF}{FA}$

Решение



- По условию задачи $MA = AC$, $NC = 3BN$. Пусть $MA = AC = b$,
- $BN = k$, $NC = 3k$. Прямая MN пересекает две стороны треугольника ABC и продолжение третьей. По теореме Менелая

$$\frac{CN}{NB} \cdot \frac{BF}{FA} \cdot \frac{AM}{MC} = 1, \frac{3_k}{k} \cdot \frac{BF}{FA} \cdot \frac{b}{2_b} = 1, \frac{BF}{FA} \cdot \frac{3}{2} = 1, \frac{BF}{FA} = \frac{2}{3}.$$

Ответ: 2:3.