Лекция 5

Контрольный вопрос

Две частицы обладают одинаковыми кинетическими энергиями. Величины их импульсов соотносятся как:

а) $p_1 < p_2$,

б) $p_1 = p_2$,

в) $p_1 > p_2$,

г) невозможно определить.

$$T = \frac{p^2}{2m}$$

Масса тел неизвестна – г).

Содержание предыдущей лекции

Механическая энергия

- Столкновение тел.

Кинематика и динамика вращательного движения

- Кинематика вращательного движения: угловая скорость и угловое ускорение, их связь с линейной скоростью и ускорением.
- Момент силы. Уравнение моментов.

Содержание сегодняшней лекции

Кинематика и динамика вращательного движения

•Момент инерции. Теорема Штейнера. Кинетическая энергия вращательного движения твердого тела.

•Основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела с закрепленной осью вращения.

•Момент импульса тела. Закон сохранения момента импульса.

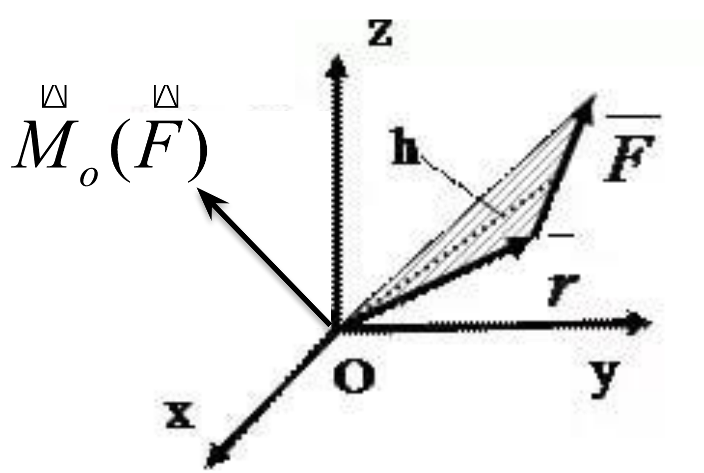
•Гироскопические силы. Гироскопы и их применение в технике.

Релятивистская механика

•Принцип относительности Галилея.

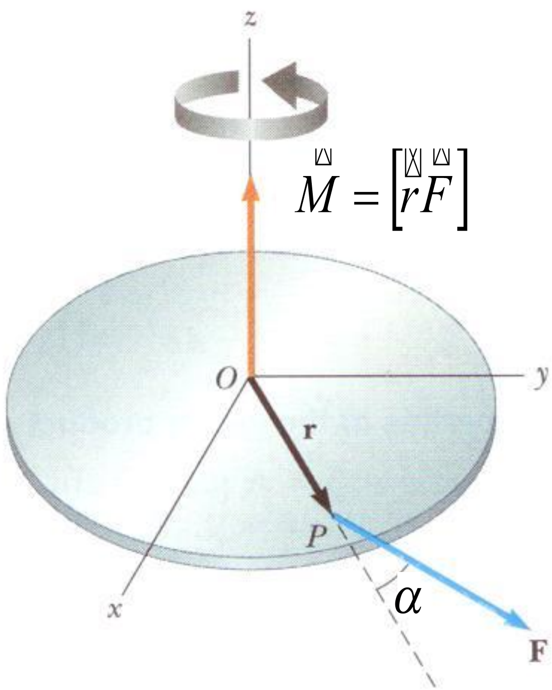
Момент силы относительно точки

Момент силы относительно точки –
характеристика способности силы вращать тело вокруг точки, относительно которой он рассчитывается.



Момент силы относительно оси

Возможность произвольного вращения тела относительно точки *O*.



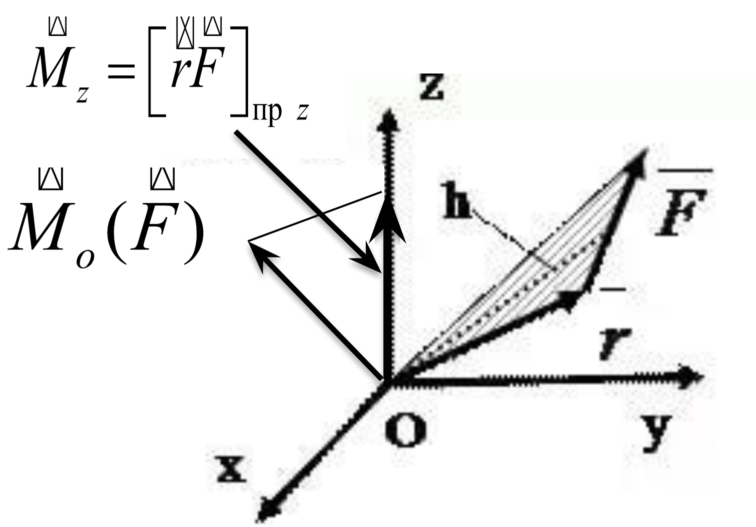
$$\vec{M} = \left[\vec{r}\vec{F}\right]$$

Реальность:
поворот тела под действием силы вокруг оси, перпендикулярной к плоскости, в которой лежат сила *F* и точка *O*, т.е. вокруг оси, совпадающей с направлением момента силы относительно данной точки.

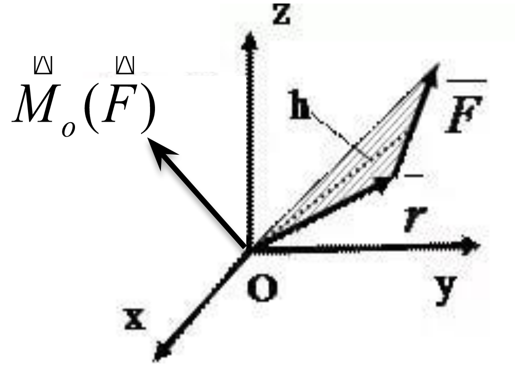
Момент силы относительно оси

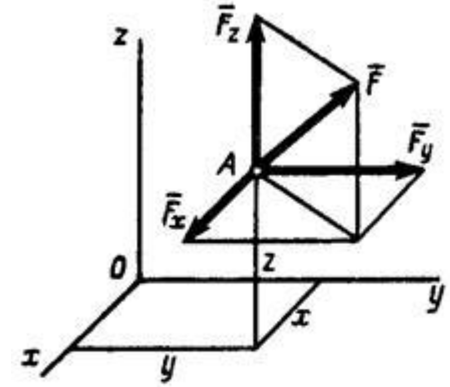
Проекция вектора $\vec{M}$ на некоторую ось, проходящую через точку O, относительно которой определен вектор $\vec{M}$, называется моментом силы относительно этой оси:

$$\vec{M}_z = \left[\vec{r}\vec{F}\right]_{\text{пр } z}.$$

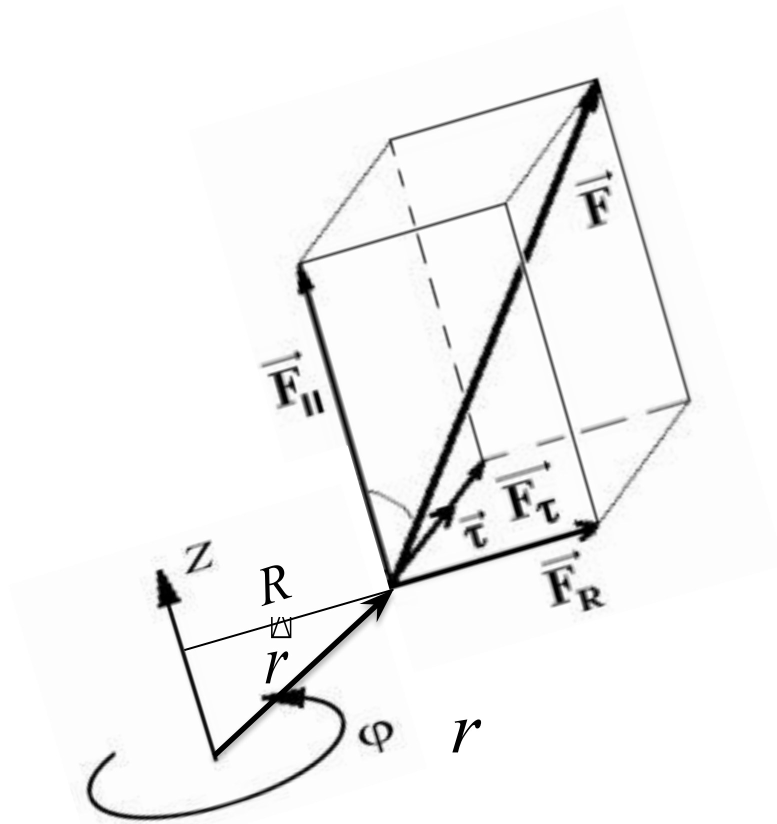


$$\vec{M} = [\vec{r}\vec{F}]$$





Момент силы относительно оси



$$\vec{F} = \vec{F}_{\text{II}} + \vec{F}_R + \vec{F}_\tau$$

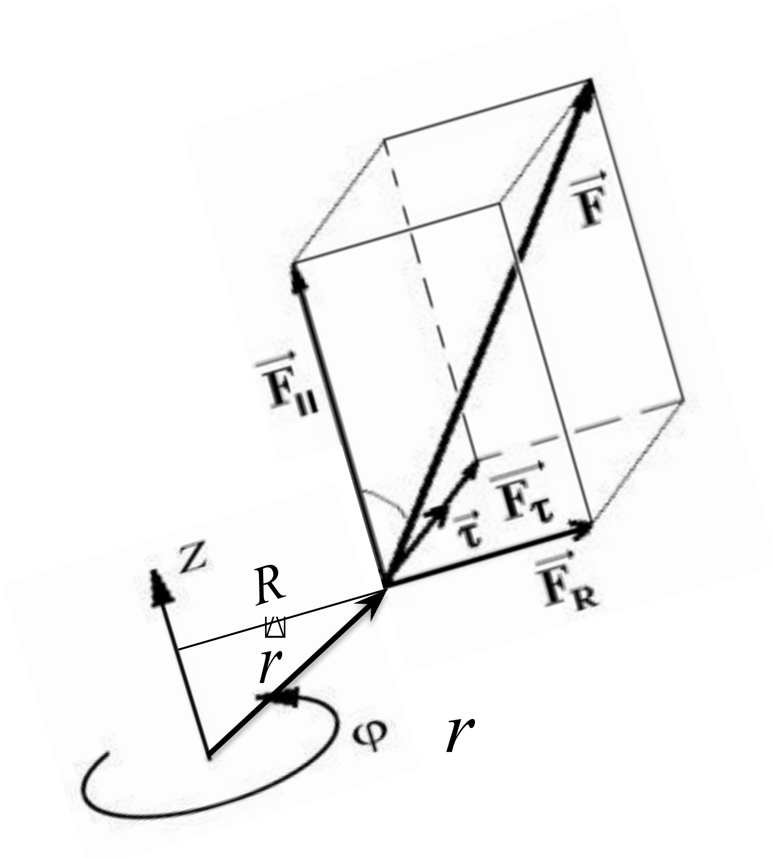
$$\vec{M} = \vec{M}_{\text{II}} + \vec{M}_R + \vec{M}_\tau$$

$$M_z = M_{z\,\text{II}} + M_{z\,R} + M_{z\,\tau}$$

$$M_z = 0 + 0 + M_{z\,\tau} = RF_\tau$$

$$M_z = RF_\tau$$

$$M_z = RF_\tau$$

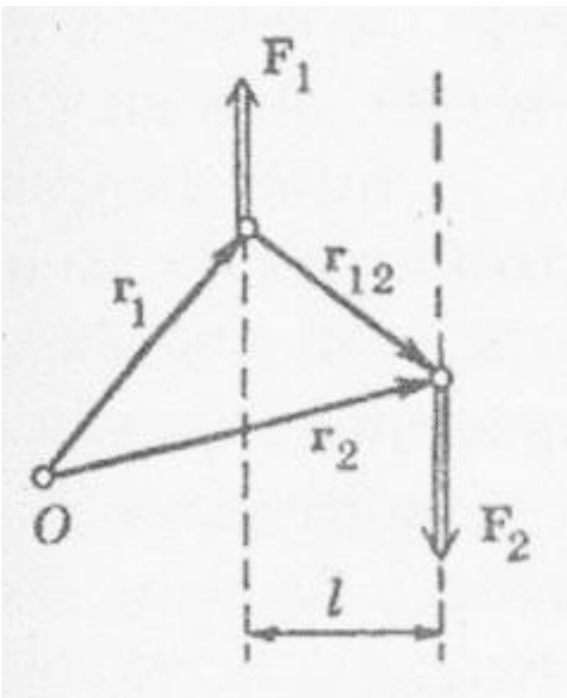


Момент силы относительно оси

Момент силы относительно оси *z* – характеристика способности силы вращать тело вокруг этой оси.

Поворот тем успешнее, чем больше тангенциальная составляющая силы $\vec{F}_\tau$ и плечо *R*.

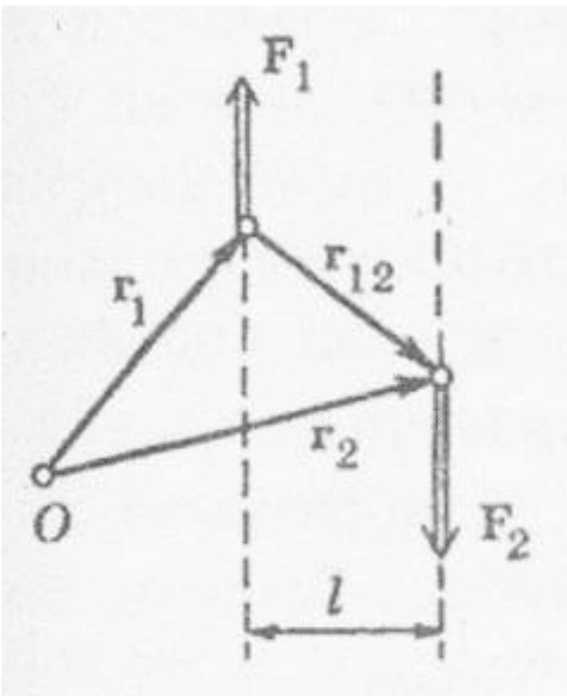
Пара сил



Пара сил – две равные по модулю, но противоположно направленные силы, не действующие вдоль одной прямой.

Плечо пары сил –
расстояние *l* между прямыми,
вдоль которых действуют силы.

Уравнение моментов



Суммарный момент образующих пару сил $\vec{M} = [\vec{r}_1 \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \vec{F}_2]$.

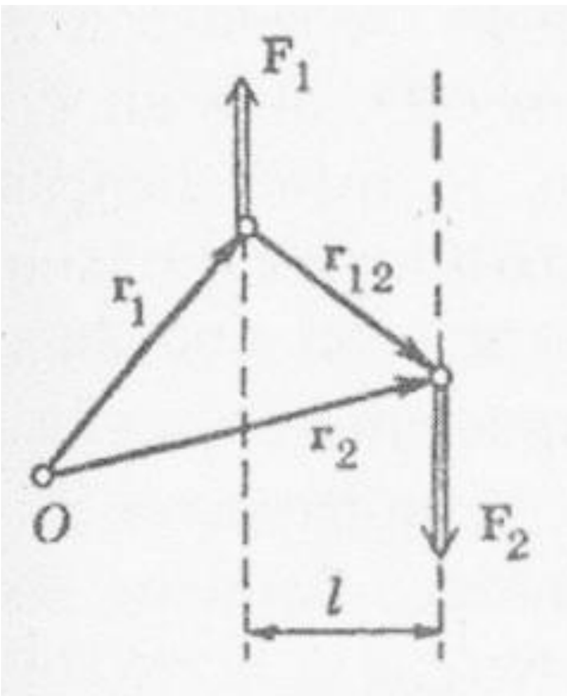
$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2.$$

$$\vec{M} = -[\vec{r}_1 \vec{F}_2] + [\vec{r}_2 \vec{F}_2] = [(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)\vec{F}_2] = [\vec{r}_{12} \vec{F}_2].$$

$$\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

- вектор, проведенный из точки приложения силы $\vec{F}_1$ в точку приложения силы $\vec{F}_2$.

Уравнение моментов



Независимость выражения

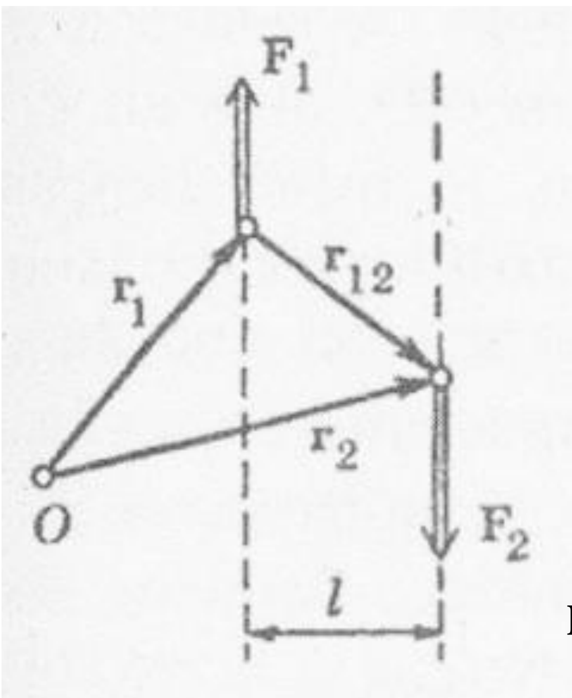
$$\vec{M} = \left[\vec{r}_{12}\vec{F}_2\right]$$

от выбора точки *O*.

Следствие:
момент пары сил относительно любой точки одинаков.

$$\vec{M} = [\vec{r}_{12}\vec{F}_2]$$

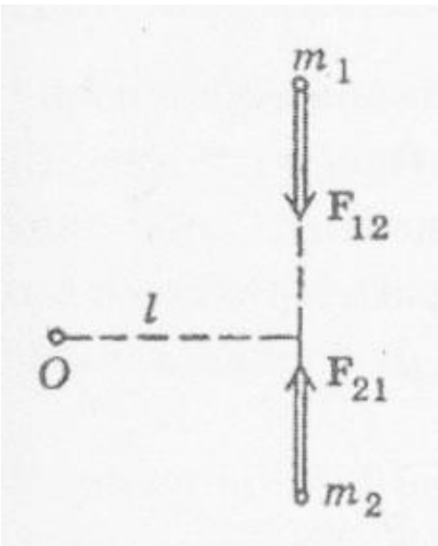
Уравнение моментов



Направление вектора момента пары сил - перпендикулярно плоскости, в которой лежат силы.

Равенство численного значения вектора момента пары сил произведению модуля любой из сил на плечо.

Уравнение моментов



Действие сил взаимодействия между частицами вдоль одной и той же прямой.

Равенство по модулю и противоположное направление вдоль одной и той же прямой моментов сил взаимодействия относительно произвольной точки *O*.

Уравновешивание моментов внутренних сил друг другом, в частности, для твердого тела

$$\sum \vec{M}_{\text{внутр}} = 0.$$

Момент инерции

Абсолютно твердое тело – система частиц (материальных точек) с неизменным расстоянием между ними.

Момент инерции тела относительно некоторой оси – величина, равная сумме произведений элементарных масс, из которых состоит данное тело, на квадраты их расстояний от некоторой оси,

$$I = \sum \Delta m_i R_i^2.$$

Равенство момента инерции тела сумме моментов инерции его частей.

Момент инерции

Плотность однородного тела –
характеристика распределения массы m в его объеме V,

$$\rho = m / V.$$

Плотность неоднородного тела

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV}.$$

$$I = \sum \Delta m_i R_i^2.$$

Момент инерции

$$\Delta m_i = \rho_i \Delta V_i.$$

$$I = \sum \rho_i R_i^2 \Delta V_i.$$

Если $\rho = \text{const}$, **то** $I = \rho \sum R_i^2 \Delta V_i.$

Наиболее точное решение - $I = \int R^2 dm = \int \rho R^2 dV.$

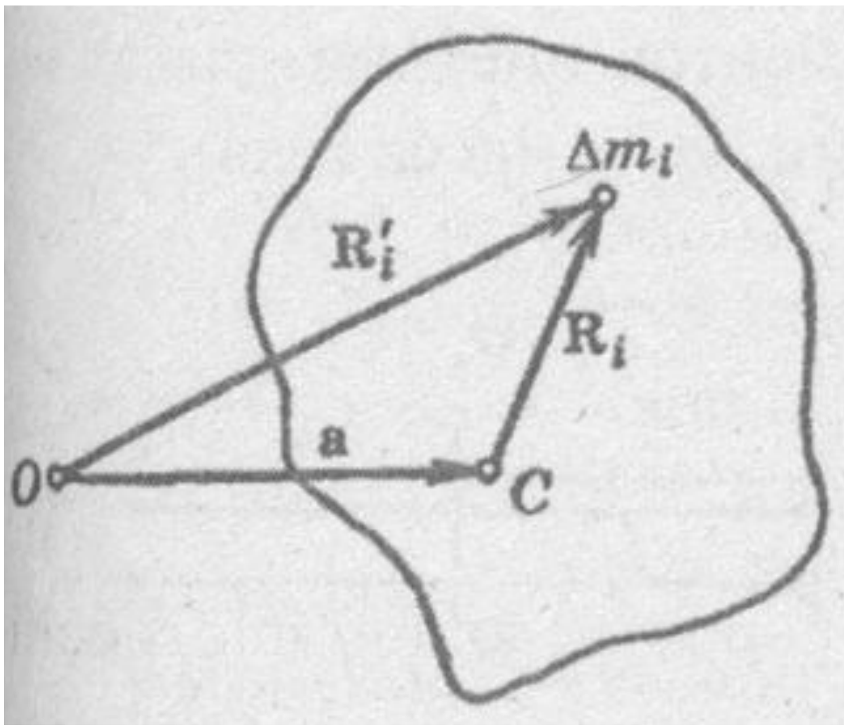
Теорема Штейнера

Момент инерции I **тела относительно произвольной оси равен сумме моментов инерции** I_C **данного тела относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс тела, и произведения массы тела** m **на квадрат расстояния** a **между осями:**

$$I = I_C + ma^2.$$

Теорема Штейнера

<u>Доказательство</u>



<u>Предположение</u>:

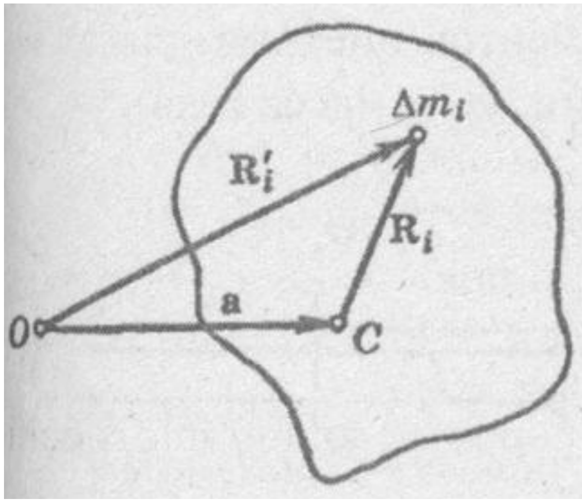
Ось C проходит через центр масс тела.

Ось O параллельна оси C.

Оси перпендикулярны к плоскости экрана.

a – расстояние между осями.

Теорема Штейнера



$$\vec{R}'_i = \vec{a} + \vec{R}_i$$

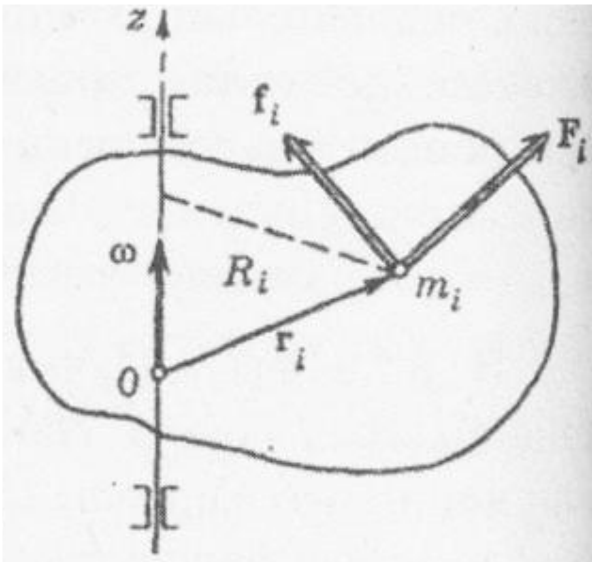
$$R_i'^2 = \left(\vec{a} + \vec{R}_i\right)^2 = a^2 + 2\vec{a}\vec{R}_i + R_i^2$$

$$I = \sum \Delta m_i R_i'^2 = a^2 \sum \Delta m_i + 2\vec{a} \sum \Delta m_i \vec{R}_i + \sum \Delta m_i R_i^2$$

$2\vec{a} \sum \Delta m_i \vec{R}_i = 0$ **- ось** C **проходит через центр масс.**

$$I = ma^2 + I_C$$

Кинетическая энергия вращательного движения твердого тела



Вращение тела вокруг неподвижной оси *z*.

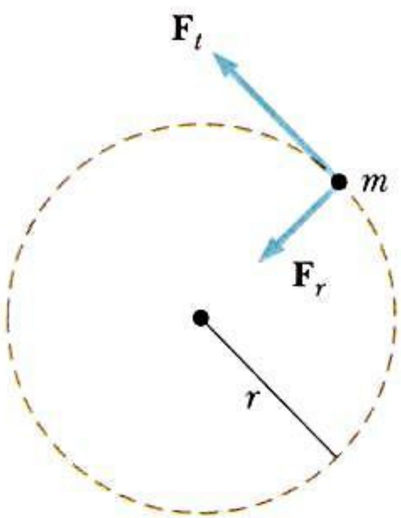
Кинетическая энергия *i*-й элементарной массы

$$T_i = \frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{1}{2} m_i \omega^2 R_i^2 .$$

Кинетическая энергия тела вращающегося вокруг неподвижной оси

$$T = \sum T_i = \frac{1}{2} \omega^2 \sum m_i R_i^2 = I\omega^2 / 2.$$

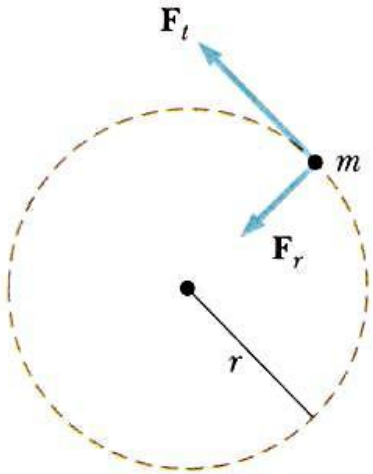
Основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела с закрепленной осью вращения



Аналогия со вторым законом Ньютона для поступательного движения частицы.

Частица массы m движется по окружности радиуса r под действием касательной силы $\vec{F}_t$ и радиальной силы $\vec{F}_r$.

Основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела с закрепленной осью вращения



Связь между модулями касательного ускорения $\vec{a}_t$ частицы и вызвавшей это ускорение касательной силой $\vec{F}_t$

$$F_t = ma_t.$$

Момент действующей на частицу касательной силы относительно центра окружности

$$M = F_t r = (ma_t) r.$$

$$M = F_t r = (m a_t) r.$$

Основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела с закрепленной осью вращения

Связь между модулями касательного ускорения и углового ускорения

$$a_t = r\varepsilon.$$

Момент действующей на частицу касательной силы относительно центра окружности

$$M = F_t r = m a_t r = (m r \varepsilon) r = (m r^2)\varepsilon = I\varepsilon.$$

$I = mr^2$ - **момент инерции частицы относительно оси *z*, проходящей через центр окружности.**

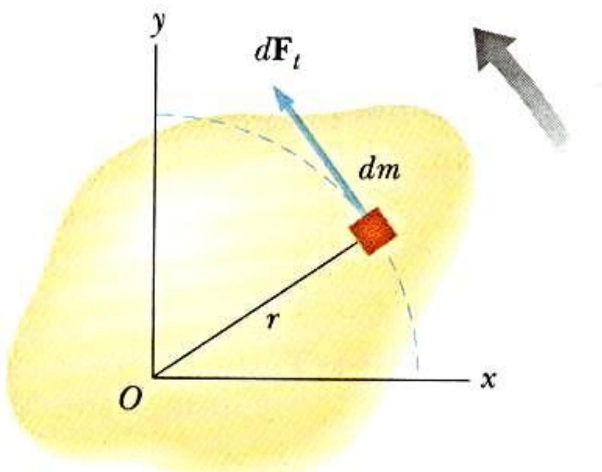
Основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела с закрепленной осью вращения

Момент действующей на частицу касательной силы относительно центра окружности прямо пропорционален ее угловому ускорению

$$M = I\varepsilon.$$

Основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела с закрепленной осью вращения

Бесконечно большое количество материальных точек (частиц) массы dm и бесконечно малого размера – аналог твердого тела произвольной формы.



Действие на частицу тела, вращающегося относительно фиксированной оси, касательной силы

$$dF_t = (dm)a_t.$$

Основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела с закрепленной осью вращения

Момент касательной силы, действующий относительно оси вращения и связанный с касательной силой dF_t,

$$dM = rdF_t = a_t rdm.$$

$$a_t = r\varepsilon$$

Равенство углового ускорения ε для всех частиц.

$$dM = \varepsilon r^2 dm.$$

Основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела с закрепленной осью вращения

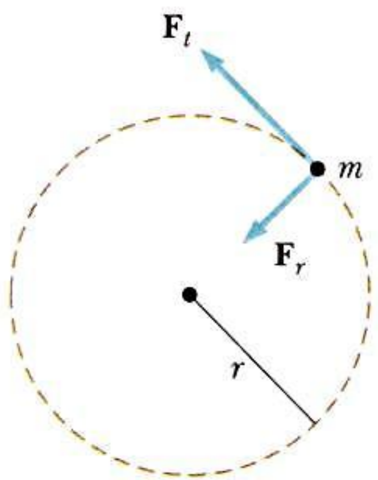
Момент касательной силы,
действующий относительно оси вращения на тело в целом,

$$M = \int \varepsilon r^2 dm = \varepsilon \int r^2 dm.$$

Момент инерции тела относительно оси вращения,
проходящей через точку *O,*

$$I = \int r^2 dm.$$

Основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела с закрепленной осью вращения

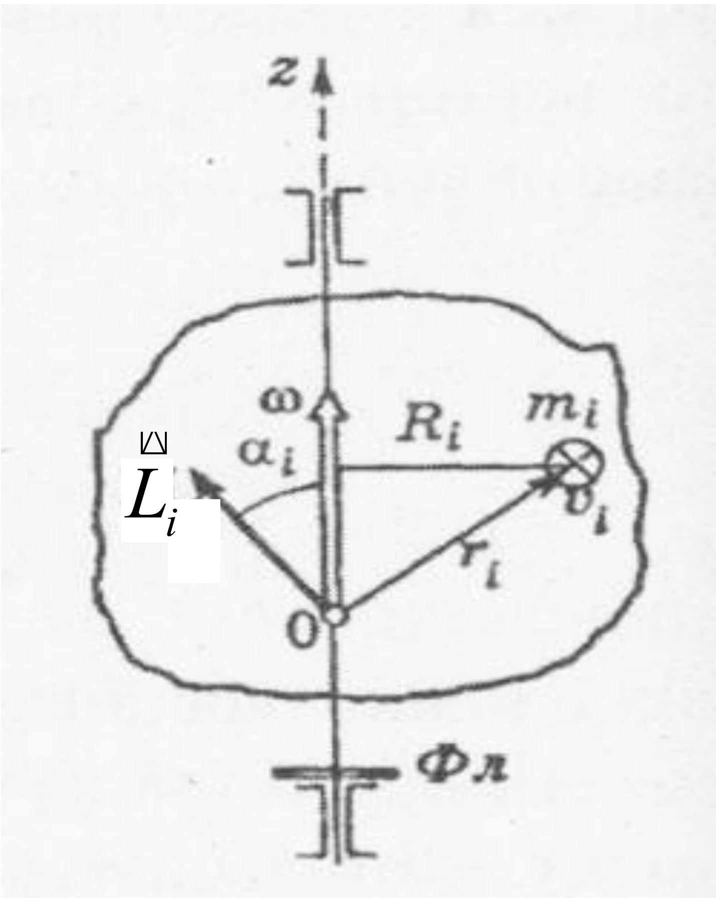


Прохождение линии действия радиальной силы через ось вращения тела.

Равенство нулю плеча и момента радиальной силы.

Справедливость выражения $M = I\varepsilon.$ **с учетом как касательных, так и радиальных компонент силы.**

Момент импульса тела



Момент импульса отдельно взятой i-ой частицы относительно точки O, лежащей на оси вращения,

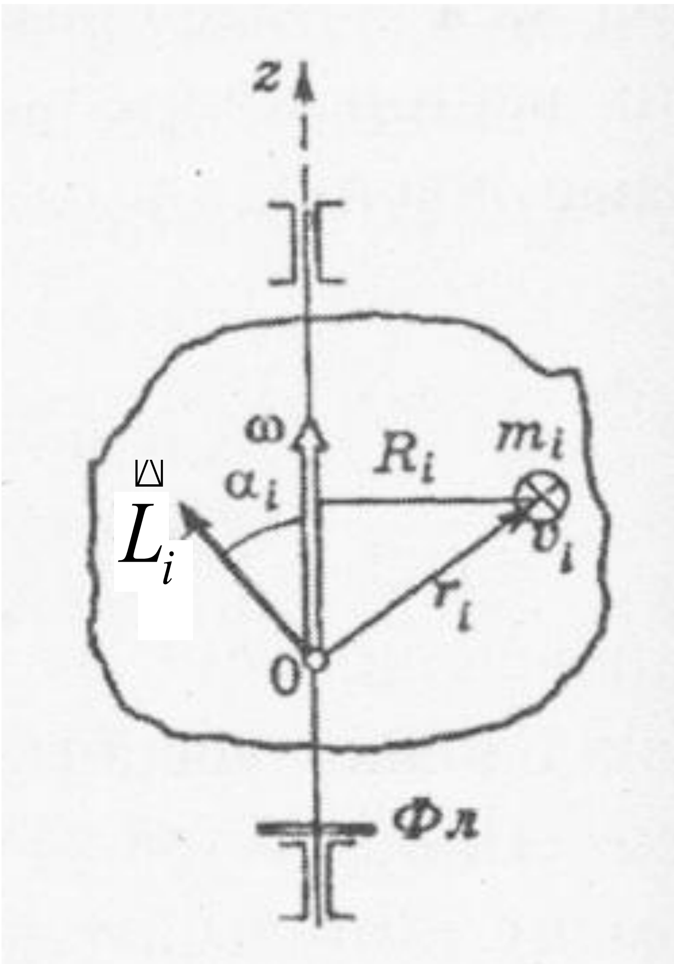
$$\vec{L}_i = [\vec{r}_i \vec{p}_i] = [\vec{r}_i m_i \vec{v}_i].$$

$$\vec{r}_i \perp \vec{v}_i$$

$$L_i = m_i r_i v_i = m_i r_i \omega R_i.$$

$$L_i = m_i r_i v_i = m_i r_i \omega R_i$$

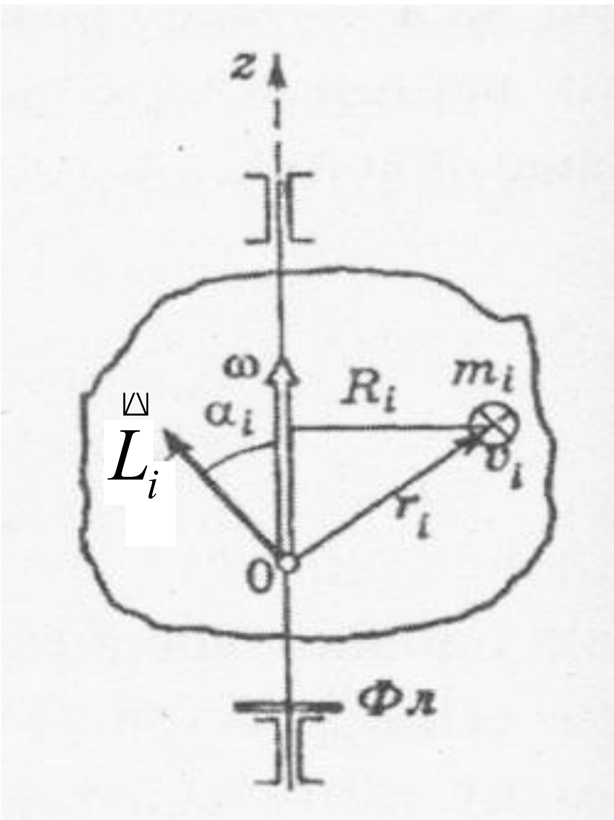
Момент импульса тела



Угол α_i –
острый для любой частицы тела.

$$L_{zi} = L_i \cdot \cos\alpha_i = m_i r_i \omega R_i \cos\alpha_i =$$
$$= m_i \left(r_i \cos\alpha_i \right) R_i \omega = m_i R_i^2 \omega_i .$$

Момент импульса тела



Для всего тела

$$L_z = \sum L_{zi} = \sum m_i R_i^2 \omega_z = \omega_z \sum m_i R_i^2.$$

$$I = \sum \Delta m_i R_i^2.$$

$$L_z = I\omega_z.$$

Аналогия: $p_z = mv_z.$

Закон сохранения момента импульса

$$\vec{M} = \sum_i \vec{M}_i = \sum_i \left[\vec{r}_i \vec{F}_i\right]$$

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i \left[\vec{r}_i \vec{p}_i\right]$$

$$\sum \vec{M}_{\text{внутр}} = 0$$

Для всякой системы частиц (тела) $\dfrac{d}{dt}\vec{L} = \sum \vec{M}_{\text{внешн}}.$

$$\frac{d}{dt}\vec{L} = \sum \vec{M}_{\text{внешн}}. \qquad L_z = I\omega_z.$$

Закон сохранения момента импульса

$$\frac{d}{dt}L_z = \sum M_{z\,\text{внешн}}$$

$$I\varepsilon_z = \sum M_{z\,\text{внешн}}$$

ε_z **- проекция углового ускорения на ось *z*.**

Аналогия: $m\omega_z = \sum F_z.$

Закон сохранения момента импульса

Однородное тело, симметричное относительно оси вращения, - совпадение по направлению момента импульса относительно точки O, лежащей на оси вращения, и вектора $\vec{\omega}$.

$$\vec{L} = I\vec{\omega}.$$

Общий случай несимметричного тела - невыполнение данного уравнения.

Закон сохранения момента импульса

$$\frac{d}{dt}\vec{L} = \sum \vec{M}_{\text{внешн}}.$$

Если $\sum \vec{M}_{\text{внешн}} = 0,$ **то** $\frac{d}{dt}\vec{L} = 0$ **и** $\vec{L}$ **постоянен.**

Постоянство во времени момента импульса замкнутой системы материальных точек.

Закон сохранения момента импульса

$$\frac{d}{dt}L_z = \sum M_{z\,\text{внешн}}$$

Если $\sum M_{z\,\text{внешн}} = 0$, **то** $\frac{d}{dt}L_z = 0$ **и** L_z **постоянна.**

Постоянство во времени проекции момента импульса замкнутой системы материальных точек на некоторую ось.

Контрольный вопрос

Труба и цилиндр, обладающие одинаковыми радиусами, массой и длиной (высотой), вращаются относительно их продольных центральных осей с одинаковой угловой скоростью.

Большей вращательной кинетической энергией обладает:

а) полая труба,

б) сплошной цилиндр,

в) они обладают одинаковыми значениями вращательной кинетической энергии,

г) невозможно определить.