

Исследование функции и **построение ее графика**

**При построении графика функции
необходимо провести ее
предварительное исследование.**

**Примерная схема исследования
функции с целью построения ее**

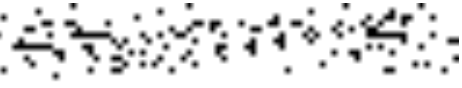
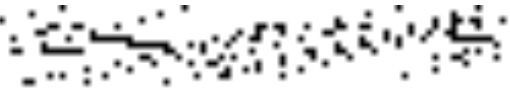
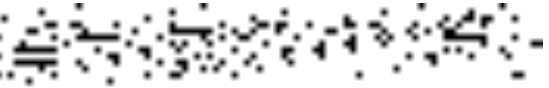
графика имеет следующую структуру:

- Область определения $D(y)$ и область допустимых значений $E(y)$ функции.
- Четность, нечетность функции.
- Точки пересечения с осями.
- Асимптоты функции.
- Экстремумы и интервалы монотонности.
- Точки перегиба и промежутки выпуклости, вогнутости.
- Сводная таблица и график функции.

Область определения $D(y)$ и область допустимых значений $E(y)$ функции

- Множество всех значений, которые принимает аргумент функции (независимая переменная x), называется областью определения функции $D(y)$
- Множество всех значений, которые принимает значение функции (зависимая переменная y), называется областью определения функции $E(y)$

Четность, нечетность функции

- Если  , то функция четная (симметрична относительно оси OY);
- Если  , то функция нечетная (симметрична относительно начала координат);
- Если  , то функция общего вида.

Точки пересечения с осями

- с осью $Ox : y = 0$
- с осью $Oy : x = 0$

Асимптоты функции

а) вертикальные

Прямая $x = x_0$ называется **вертикально й асимптотой** графика функции $y = f(x)$, если хотя бы одно из предельных значений $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x)$ или $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$ равно $+\infty$ или $-\infty$.

Замечание. Прямая $x = x_0$ не может быть вертикальной асимптотой, если функция непрерывна в точке $x = x_0$. Поэтому вертикальные асимптоты следует искать в точках разрыва функции (те значения x , при которых функция не определяется).

Асимптоты функции

б) горизонтальные

Прямая $y = y_0$ называется **горизонтальной асимптотой** графика функции $f(x)$, если хотя бы одно из предельных значений или $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ равно $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ y_0

Замечание. График функции может иметь только правую горизонтальную асимптоту или только левую.

Асимптоты функции

в) наклонные

Прямая $y = kx + b$ называется **наклонной асимптотой** графика функции $y = f(x)$,

если $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx - b] = 0$

Теорема (условия существования наклонной асимптоты). Если для функции $y = f(x)$ существуют пределы $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = k$ и $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx] = b$, то функция $y = kx + b$ при $x \rightarrow \infty$ имеет наклонную асимптоту $k \neq 0$.

Замечание. Горизонтальная асимптота является частным случаем наклонной при

Экстремумы и интервалы МОНОТОННОСТИ

Необходимое условие экстремума: Если функция экстремум в точке x_0 , то ее производная $f'(x_0)$ либо равна нулю, либо не существует.

Точки, в которых производная равна нулю: $f'(x) = 0$, называются **стационарными точками функции**.

Точки, в которых выполняется необходимое условие экстремума для непрерывной функции, называются **критическими точками** этой функции. То есть **критические точки** — это либо стационарные точки (решения уравнения $f'(x) = 0$), либо это точки, в которых производная не существует.

Экстремумы и интервалы МОНОТОННОСТИ

- Функция называется *строго убывающей* на промежутке, если большему значению аргумента из этого промежутка соответствует меньшее значение функции.
- Функция называется *строго возрастающей* на промежутке, если большему значению аргумента из этого промежутка соответствует большее значение функции.
- Функция строго возрастающая или строго убывающая на промежутке называется *монотонной* на этом промежутке.

Точки перегиба и промежутки выпуклости, вогнутости

Теоремы о выпуклости функции и точках

перегиба: Пусть функция $f(x)$ определена на интервале $(a; b)$ и имеет непрерывную, не равную нулю в точке $x_0 \in (a; b)$ производную. Тогда, если $f'(x) > 0$ всюду на интервале $(a; b)$, то функция имеет *вогнутость* на этом интервале, если $f'(x) < 0$, то функция имеет *выпуклость*.

Точкой перегиба графика функции называется точка $M(x_1; f(x_1))$, разделяющая промежутки выпуклости и вогнутости.

Точки перегиба и промежутки выпуклости, вогнутости

График функции $y=f(x)$, дифференцируемой на интервале (a,b) , является на этом интервале **выпуклым**, если график этой функции в пределах интервала лежит не выше любой своей

касательной

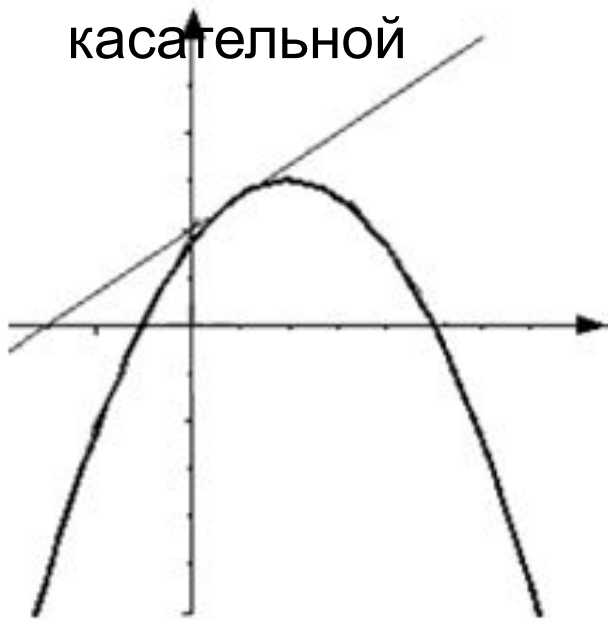


рис 1

График функции $y=f(x)$, дифференцируемой на интервале (a,b) , является на этом интервале **вогнутым**, если график этой функции в пределах интервала лежит не ниже любой своей

касательной

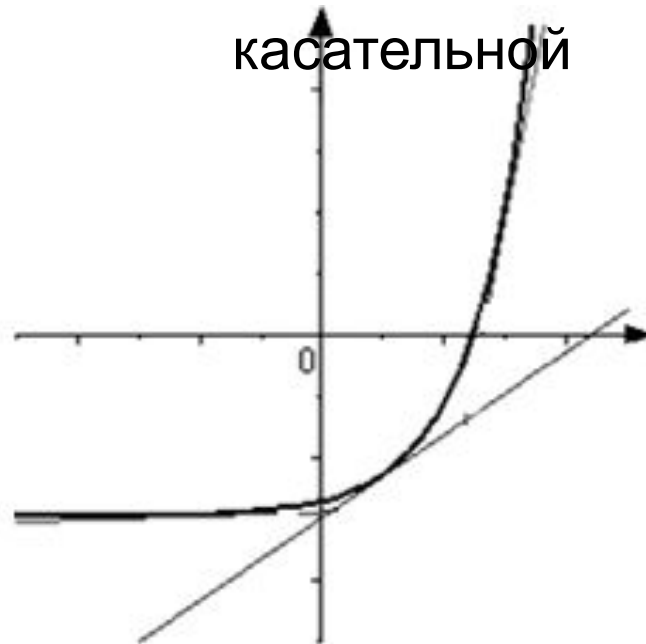


рис 2

Пример. Исследовать функцию $y = \frac{x^3 - x + 1}{x - 1}$ и построить ее график

Решение:

- Область определения: $x \neq 1$; функция непрерывна в области определения; $x = 1$ – точка разрыва (т.к. знаменатель не может быть равен нулю)

- Четность\нечетность:

$$y(-x) = \frac{(-x)^3 - (-x) + 1}{-x - 1} = \frac{-x^3 + x + 1}{-x - 1} \neq \pm \frac{x^3 - x + 1}{x - 1};$$

т.е. функция общего вида.

- Находим точки пересечения графика с осью **OY**: полагаем, что **$x=0$** , тогда **$y(0)=-1$** , т.е. график функции пересекает ось в точке (0;-1). Находим точки пересечения графика с осью **OX** (нули функции): полагаем **$y=0$** , тогда

$$\frac{x^2 - x + 1}{x - 1} = 0 \quad \text{или} \quad x^2 - x + 1 = 0$$

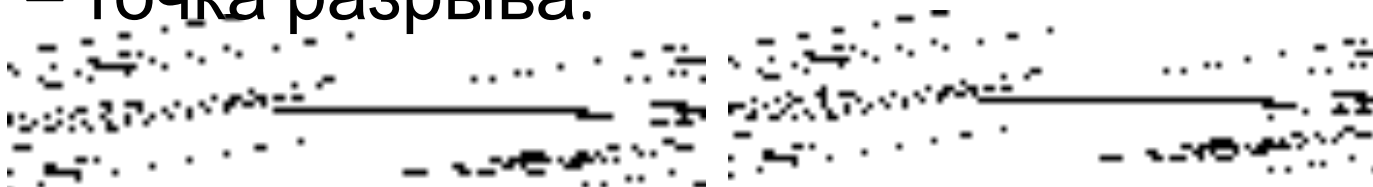
Найдем корни квадратного уравнения в числителе (они станут координатами точек пересечения графика с осью). Но дискриминант квадратного уравнения меньше нуля, значит корней (нулей функции) не существует.

Тогда границей интервалов знакопостоянства является точка $x=1$, где функция не существует.

- Найдем асимптоты функции:

– точка разрыва.

Тогда



– вертикальная асимптота.

Находим наклонные и горизонтальные асимптоты:

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(x^2 - x + 1)}{x^2 - x} = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (y - kx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2 - x + 1}{x - 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x - 1} = 0$$

Тогда $y=x$ – наклонная асимптота.

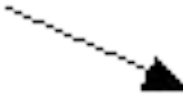
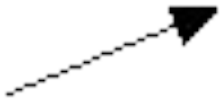
- Выясняем наличие критических точек

$$y' = \frac{(x-1)'(x^2-x+1) - (x-1)'(x^2-x+1)}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

Критические точки (где производная равна нулю или не существует) находим из равенств

Получаем: $x_1=1, x_2=0, x_3=2$

Составим вспомогательную таблицу

	$(-\infty; 0)$	$x_1=1$	$(0; 1)$	$x_2=0$	$(1; 2)$	$x_3=2$	$(2; +\infty)$
		0	Не сущ.	0		+	
y		-1 max		Не сущ.		3 min	

В первой строке записываются критические точки и интервалы, на которые делят эти точки ось Ox .

Во второй строке указываются значения производной в критических точках и знаки на интервалах. (определяются методом частных значений).

В третьей строке указываются значения функции $y(x)$ в критических точках и показывается поведение функции – возрастание или убывание на соответствующих интервалах числовой оси

- Находим интервалы выпуклости и вогнутости функции: $y'' = \frac{2}{(x-1)^3}$

Строим таблицу как делали ранее, только во второй строке записываем знаки второй производной, а в третьей указываем вид выпуклости.

Т.к. ~~только одна~~, то критическая точка одна $x=1$.

Значит, точка $x=1$ является точкой перегиба

x	$(-\infty; 1)$	1	$(1; +\infty)$
y''	—	Не сущ.	+
y		Не сущ.	

- По полученным данным строим график функции

