Динамика

Динамика - раздел теоретической механики, в котором изучаются движение тел под действием приложенных сил

Законы динамики.

1) I-ый закон Ньютона

Если на тело не действуют силы, то оно находится либо в состоянии покоя либо сохраняет состояние равномерного прямолинейного движения.

2) II-ой закон Ньютона

Ускорение движения тела пропорционально действующей на него силе

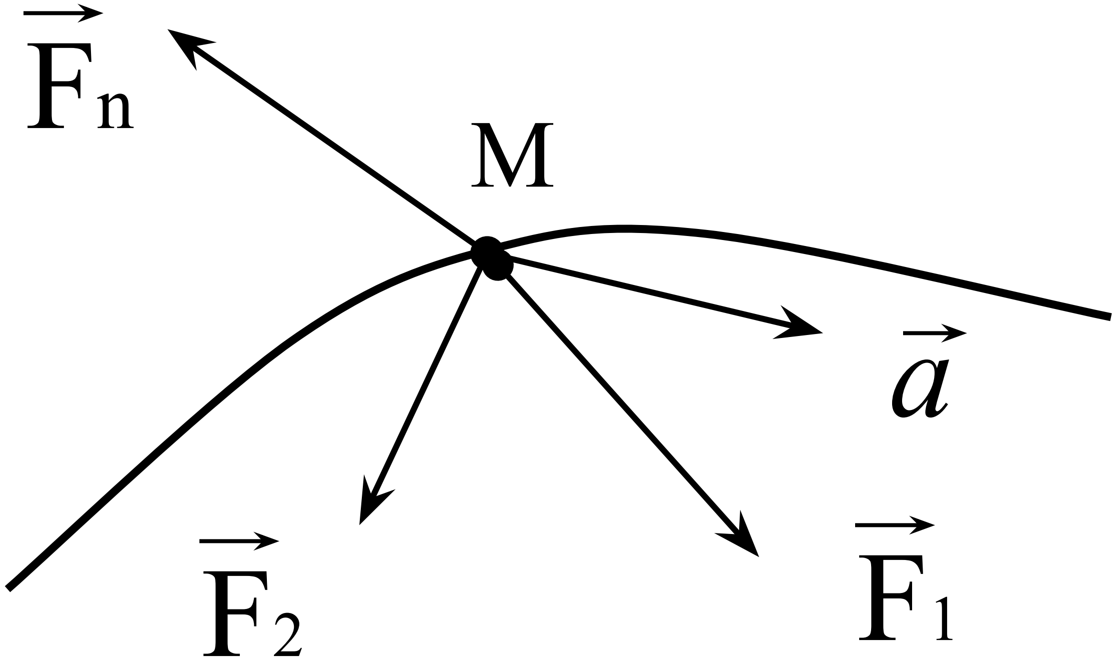
$$\mathrm{m}\vec{a} = \vec{\mathrm{F}}$$

3) III-ий закон Ньютона

Каждому действию соответствует равное и противоположно направленное противодействие

4) Принцип суперпозиции.

Если на тело действует несколько сил, то ускорение движения тела будет пропорционально одной силе, равной их геометрической сумме

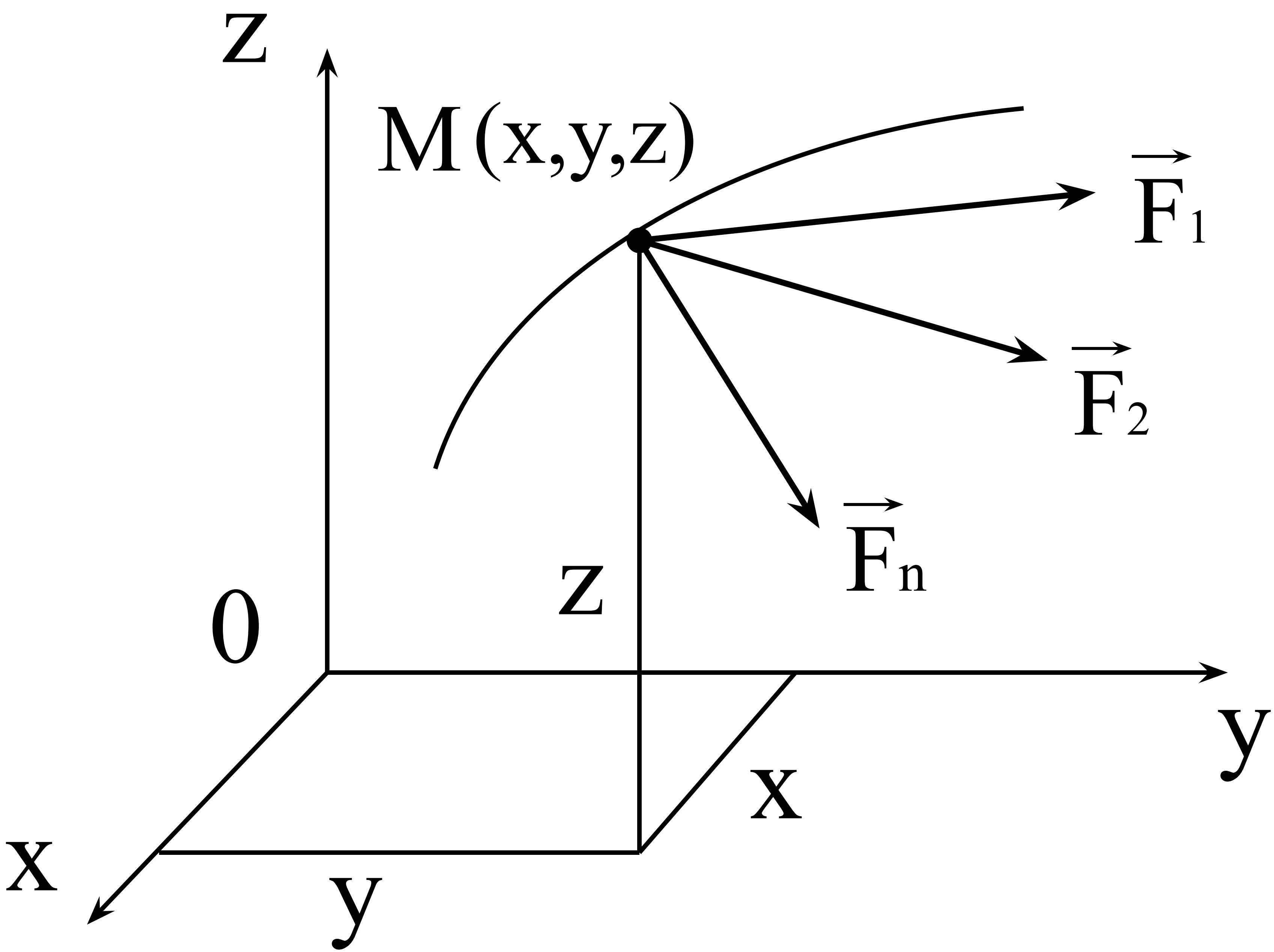


Главный вектор системы сил

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n$$

Дифференциальные уравнения движения точки.

Дифференциальные уравнения движения точки в декартовой системе координат.



z
M(x,y,z)
$\vec{F}_1$
$\vec{F}_2$
$\vec{F}_n$
z
0
y
x
x
y

$$m\vec{a} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n$$

Проецируем векторное равенство на оси декартовой системы координат

$$\text{ox: } ma\cos(\vec{a},\hat{\ }\vec{i}) = F_{1x} + \ldots + F_{nx}$$

$$\text{oy: } ma\cos(\vec{a},\hat{\ }\vec{j}) = F_{1y} + \ldots + F_{ny}$$

$$\text{oz: } ma\cos(\vec{a},\hat{\ }\vec{k}) = F_{1z} + \ldots + F_{nz}$$

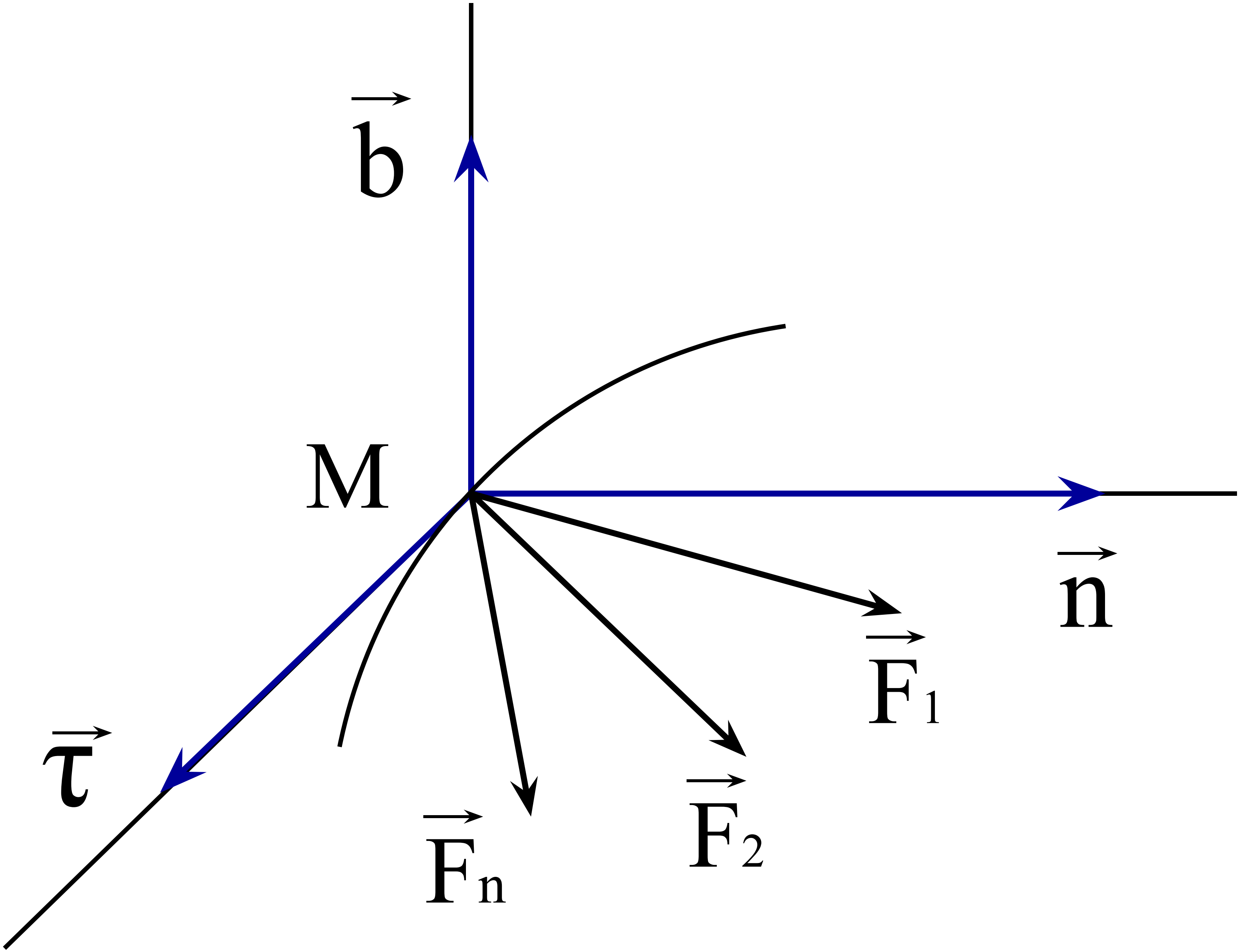
Проекции ускорений:

$$\begin{cases} a\cdot\cos(\vec{a},\widehat{\ }\vec{i}) = a_x = \ddot{x} \\ a\cdot\cos(\vec{a},\widehat{\ }\vec{j}) = a_y = \ddot{y} \\ a\cdot\cos(\vec{a},\widehat{\ }\vec{k}) = a_z = \ddot{z} \end{cases}$$

дифференциальные уравнения движения точки в декартовой с. к.

$$\begin{cases} m\ddot{x} = \sum F_{kx} \\ m\ddot{y} = \sum F_{ky} \\ m\ddot{z} = \sum F_{kz} \end{cases}$$

Дифференциальные уравнения движения точки в осях естественного трехгранника.



$\vec{b}$
M
$\vec{n}$
$\vec{F}_1$
$\vec{\tau}$
$\vec{F}_2$
$\vec{F}_n$

$\vec{\square}$ - единичный вектор касательной

$\vec{n}$ - единичный вектор главной нормали

$\vec{b}$ - единичный вектор бинормали

Запишем II-ой закон Ньютона:

$$m\vec{a} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n$$

Проецируем это равенство на оси естественного трехгранника:

$$m a \cos(\vec{a}, \wedge\, \vec{\tau}) = F_1 \cos(\vec{F_1}, \wedge\, \vec{\tau}) + \ldots$$

$$m a \cos(\vec{a}, \wedge\, \vec{n}) = F_1 \cos(\vec{F_1}, \wedge\, \vec{n}) + \ldots$$

$$m a \cos(\vec{a}, \wedge\, \vec{b}) = F_1 \cos(\vec{F_1}, \wedge\, \vec{b}) + \ldots$$

Проекции ускорений будут равны:

$$\begin{cases} a\cos(\vec{a},\hat{\ }\vec{\tau}) = \dfrac{d^2S}{dt^2} \\ a\cos(\vec{a},\hat{\ }\vec{n}) = \dfrac{V^2}{\rho} \\ a\cos(\vec{a},\hat{\ }\vec{b}) = 0 \end{cases}$$

- тангенсальная составляющая

- нормальная составляющая

- т.к. вектор ускорения лежит в соприкасающейся плоскости

дифференциальные уравнения движения точки в осях естественного трехгранника

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2S}{dt^2} = \sum F_k \cos(\vec{F}_k,\hat{\ }\vec{\tau}) \\ m\dfrac{V^2}{\rho} = \sum F_k \cos(\vec{F}_k,\hat{\ }\vec{n}) \end{cases}$$

Задачи динамики

Прямая задача

По известной массе, известному закону движения требуется определить результирующую силу, действующую на тело.

Дано:

m

$x = x(t)$

$y = y(t)$

$z = z(t)$

Найти:

F - ?

Решение:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x \\ m\ddot{y} = F_y \\ m\ddot{z} = F_z \end{cases}$$

$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$ - модуль силы

Направление задается направляющими косинусами:

$$\cos(\vec{F},\wedge\vec{x}) = \frac{F_x}{F}$$

$$\cos(\vec{F},\wedge\vec{y}) = \frac{F_y}{F}$$

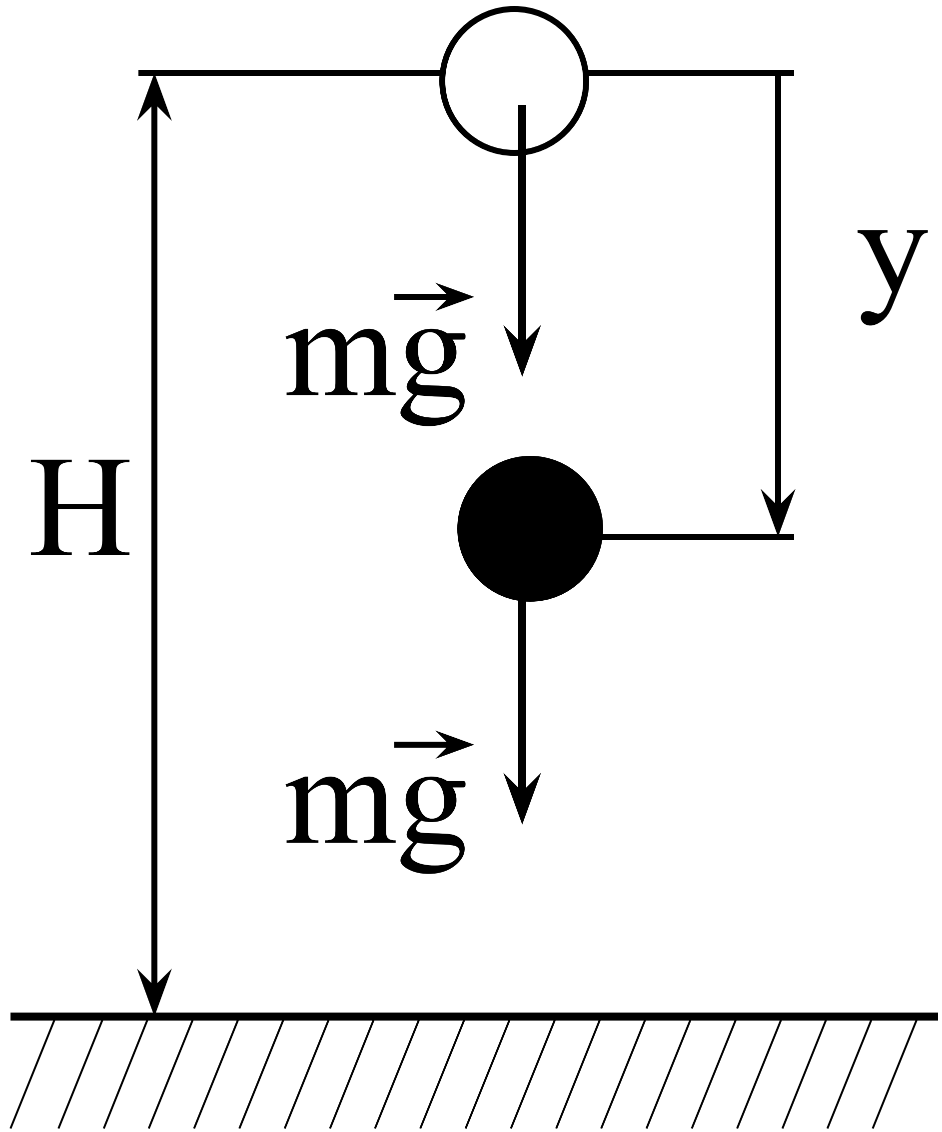
$$\cos(\vec{F},\wedge\vec{z}) = \frac{F_z}{F}$$

Обратная задача

По известной массе, известным силам, известным начальным условиям требуется определить закон движения.

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= F_x(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= F_y(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= F_z(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \end{aligned}\right\}$$

Для того, чтобы получить закон движения, необходимо дважды проинтегрировать каждое уравнение, используя начальные условия (но не всякий интеграл берется).



y
$m\vec{g}$
H
$m\vec{g}$

$$t=0,\quad y_0=0,\quad \dot{y}_0=0,\qquad y\ -\ ?$$

Запишем закон движения в проекции на ось оу:

$$m\ddot{y} = \sum F_{ky} \quad \text{т.е.} \quad m\ddot{y} = mg$$

Решим дифференциальное уравнение: $\ddot{y} = g$

Т.к. $\dot{y} = V_y$, то $\dfrac{dV_y}{dt} = g$

$$\int_0^{V_y} dV_y = g\int_0^t dt$$

$$V_y = g\,t$$

$$\frac{dy}{dt} = g\,t \implies \int_0^y dy = g\int_0^t t\,dt$$

$$y = \frac{g\,t^2}{2}$$

Динамика системы

Внешние силы $\vec{F}^{e}$

- силы, действующие на тела данной системы со стороны тел, не входящих в данную систему

Внутренние силы $\vec{F}^{i}$

- силы взаимодействия между телами данной системы.

Главный вектор внутренних сил системы равен нулю.

Главный момент внутренних сил системы равен нулю.

Масса. Центр масс.

Масса системы $M = \sum_{k=1}^{n} m_k$

- сумма масс тел, входящих в систему.

Центр масс системы

- геометрическая точка, радиус-вектор которой определяется:

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k \vec{r}_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k}$$

Для того, чтобы получить координаты центра масс, надо спроецировать векторное равенство на оси.

$$
\begin{cases}
x_c = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} m_k x_k}{M} \\[2ex]
y_c = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} m_k y_k}{M} \\[2ex]
z_c = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} m_k z_k}{M}
\end{cases}
$$

Дифференциальные уравнение движения системы

Теорема об изменении количества движения

Запишем II-ой закон Ньютона для точки:

$$m\vec{a} = \vec{F} \qquad \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F}$$

Получим теорему об изменении количества движения точки в дифференциальной форме:

$$\boxed{d(m\vec{v}) = \vec{F}\,dt}$$

$$m\vec{v} = \vec{Q}$$ *- количество движения точки*

$$\vec{Q} = \sum_{k=1}^{n} m_k \vec{v}_k$$ - *количество движения системы* - сумма количеств движений точек, входящих в систему

$$\vec{v}_k = \dot{\vec{r}}_k$$

Распишем выражение и поменяем суммирования и дифференцирования т.к. они не зависят друг от друга:

$$\vec{Q} = \sum_{k=1}^{n} m_k \frac{d\vec{r}_k}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{n} m_k \vec{v}_k$$

$$\vec{Q} = \frac{d}{dt}(M\vec{r}_c) \qquad \vec{Q} = M\frac{d\vec{r}_c}{dt}$$

$$\Longrightarrow \vec{Q} = M\vec{v}_c$$

- *количество движения системы* - произведение массы системы и скорости ее центра масс

Запишем II-ой закон Ньютона для системы точек:

$$\sum m_k \frac{d\vec{v}_k}{dt} = \sum \vec{F}_k^{\,e} + \sum \vec{F}_k^{\,i}$$

Меняя порядок суммирования и дифференцирования получим:

$$\frac{d}{dt} \sum m_k \vec{v}_k = \vec{F}^{\,e}$$

Теорема об изменении количества движения:

$$\boxed{\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{F}^{\,e}}$$

Первая производная по времени от вектора количества движения системы равна главному вектору внешних сил

Следствия :

1) Если главный вектор внешних сил системы равен нулю, то тело покоится или движется равномерно.

Если $\vec{F}^{e} = 0$, то $Q = const$

2) Внутренними силами нельзя изменить количество движения системы.

3) Спроецируем Теорему на координатные оси:

$$\begin{cases} \dfrac{dQ_x}{dt} = F_x^e \\ \dfrac{dQ_y}{dt} = F_y^e \\ \dfrac{dQ_z}{dt} = F_z^e \end{cases}$$

Если $F_x^e = 0$, то $Q_x = const$

Теорема о движении центра масс системы

$$\frac{d}{dt}(M\vec{v}_c) = \vec{F}^e$$

$$M\frac{d\vec{v}_c}{dt} = \vec{F}^e$$

$$\boxed{M\vec{a}_c = \vec{F}^e}$$

Эта формула гласит:

Центр масс системы движется как материальная точка, к которой приложены все силы, действующие на систему.

Следствия :

1) Внутренними силами нельзя изменить движение центра масс системы.

2) Если главный вектор внешних сил системы равен нулю, то скорость движения центра масс системы постоянна.

$$\text{Если} \quad \vec{F}^{e} = 0\,, \quad \text{то} \quad v_c = \text{const}$$

3) $m\vec{a}_c = \vec{F}^e$ $\quad \left[\begin{array}{l} m a_{cx} = F_x^e \\ m a_{cy} = F_y^e \\ m a_{cz} = F_z^e \end{array} \right.$

Если проекция главного вектора внешних сил на какую-либо ось равна нулю, то проекция скорости центра масс на эту ось - величина постоянная.

Если $F_x^e = 0$, то $v_{cx} = \text{const}$

Теорема об изменении момента количества движения

По II закону ньютона $$m\vec{a} = \vec{F}$$

Пусть r - радиус-вектор, определяющий положение точки относительно какой либо системы координат.

Домножим векторно уравнение на r.

$$\vec{r} \times m\vec{a} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Распишем ускорение и внесем r под знак дифференциала:

$$\vec{r}\times m\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d}{dt}(\vec{r}\times m\vec{v})-$$

$$-\frac{d\vec{r}}{dt}\times m\vec{v}$$

Обозначим:

$\vec{K}_0=\vec{r}\times m\vec{v}$ - *момент количества движения точки* относительно точки O

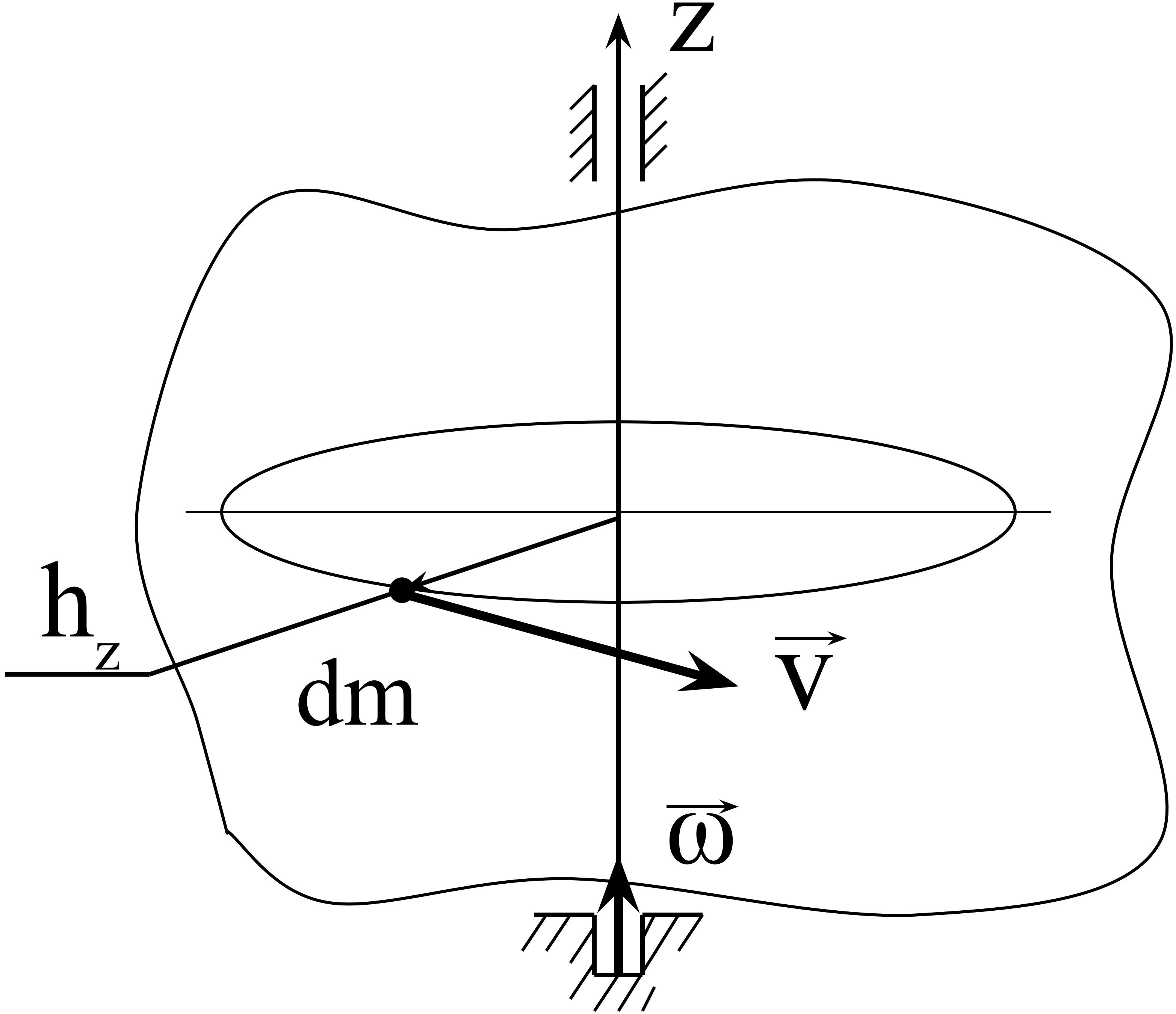
$\vec{M}_0=\vec{r}\times\vec{F}$ - *момент силы F* относительно точки O

Момент количества движения системы определяется как векторная сумма моментов количества движения точек, входящих в систему.

$$\vec{K}_0 = \sum_{k=1}^{n} \vec{K}_{0k} = \sum_{k=1}^{n} \vec{r}_k \times m_k \vec{v}_k$$

Момент количества движения твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси

(кинетический момент)



z
h_z
dm
$\vec{v}$
$\vec{\omega}$

h_z - кратчайшее расстояние от точки массой dm до оси вращения

Линейная скорость точки определяется:

$$v = \omega_z \cdot h_z$$

Количество движения точки массой dm :

$$v\,dm = \omega_z\, h_z\, dm$$

Тогда момент количества движения этой точки:

$$v\,dm\,h_z = \omega_z\, h_z^2\, dm$$

Для всего тела кинетический момент относительно оси вращения:

$$K_z = \int \omega_z h_z^2 \, dm$$

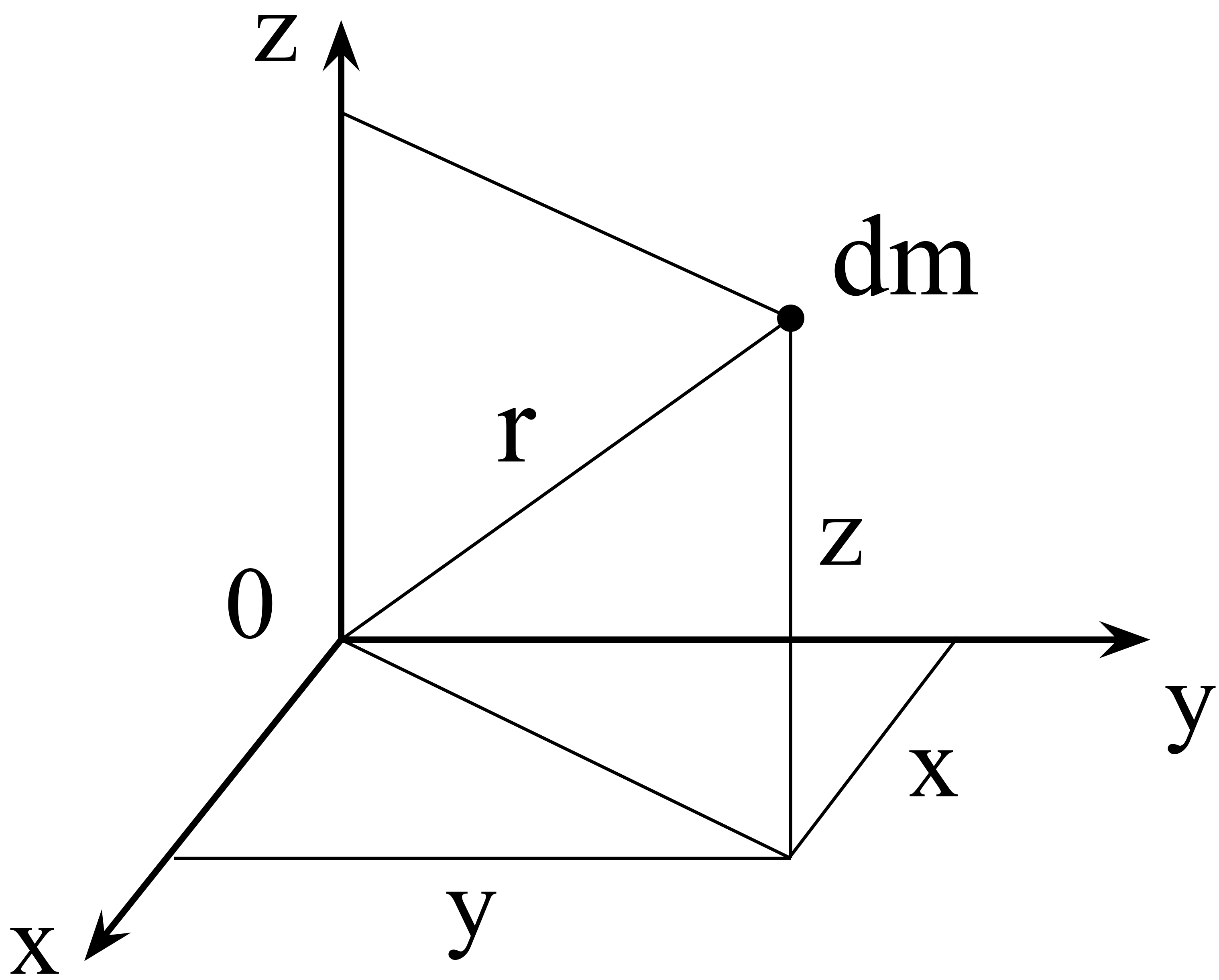
$$K_z = \omega_z \int h_z^2 \, dm$$

$$I = \int h^2 \, dm$$

- момент инерции тела относительно оси (осевой момент инерции)

$$\boxed{K_z = I_z \cdot \omega_z}$$

Моменты инерции


z
dm
r
z
0
y
x
x
y

Осевой момент инерции точки

- произведение массы точки на квадрат расстояния до оси

$$I_{zk} = dm \cdot h_z^2 = dm(x^2 + y^2)$$

- для точки

$$I_z = \int h_z^2 \cdot dm$$

- для тела

Полярный момент инерции точки

- произведение массы точки на квадрат расстояния от точки до полюса

$$I_{0k} = dm \cdot r^2 = dm(x^2 + y^2 + z^2)$$

- для точки

$$I_0 = \int r^2 \cdot dm$$

- для тела

Центробежные моменты инерции

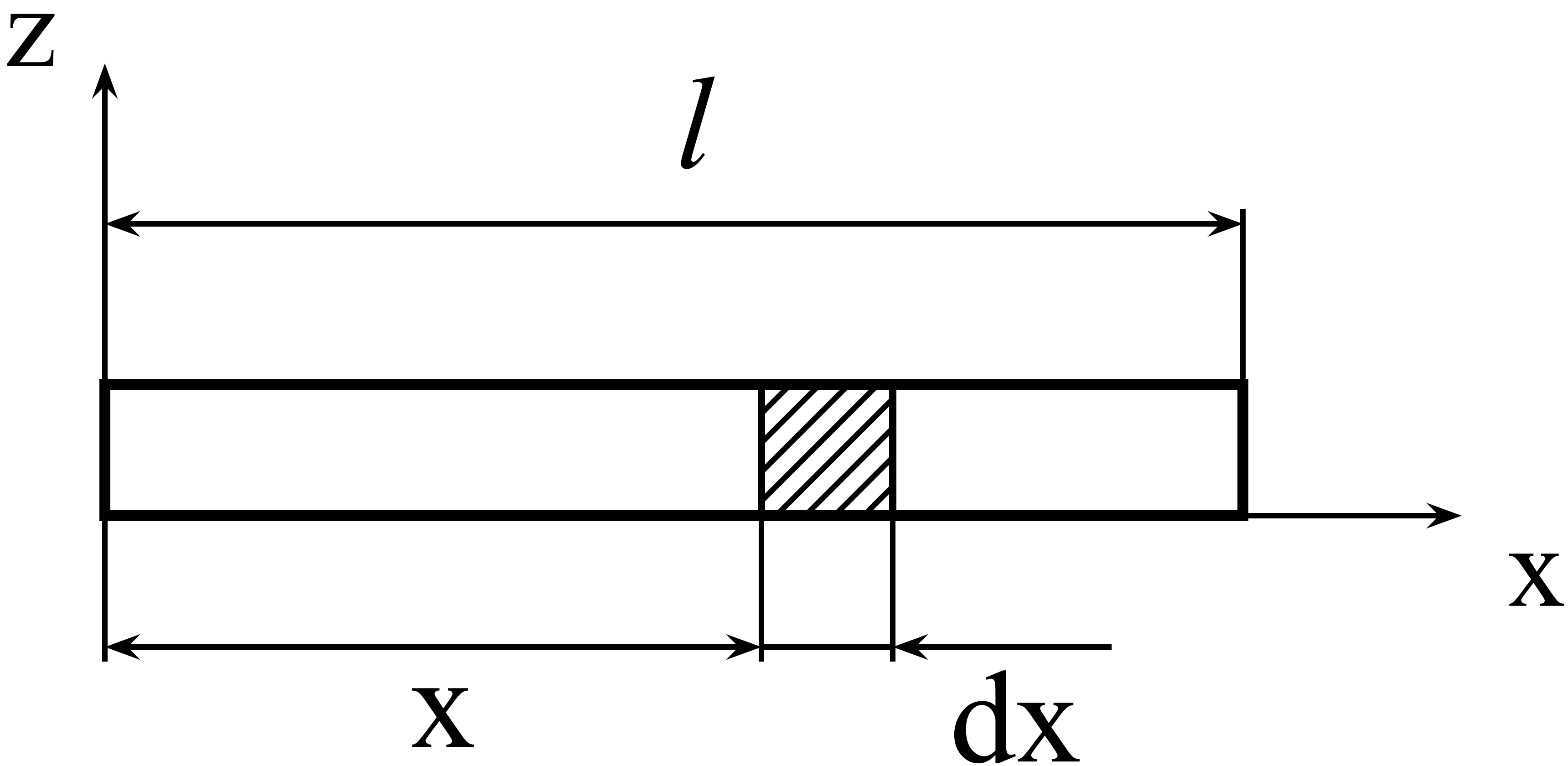
- произведение массы точки на координаты, стоящие в индексе

для точки –
$$\begin{cases} I_{xy} = dm \cdot x \cdot y \\ I_{xz} = dm \cdot x\, z \\ I_{yz} = dm \cdot y\, z \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} I_{xy} &= \int x\, y \cdot dm \\ I_{xz} &= \int x\, z \cdot dm \\ I_{yz} &= \int y\, z \cdot dm \end{aligned} \right\}$$
– *для тела*

Задача: Найти все моменты инерции

M - масса $\quad l$ - длина



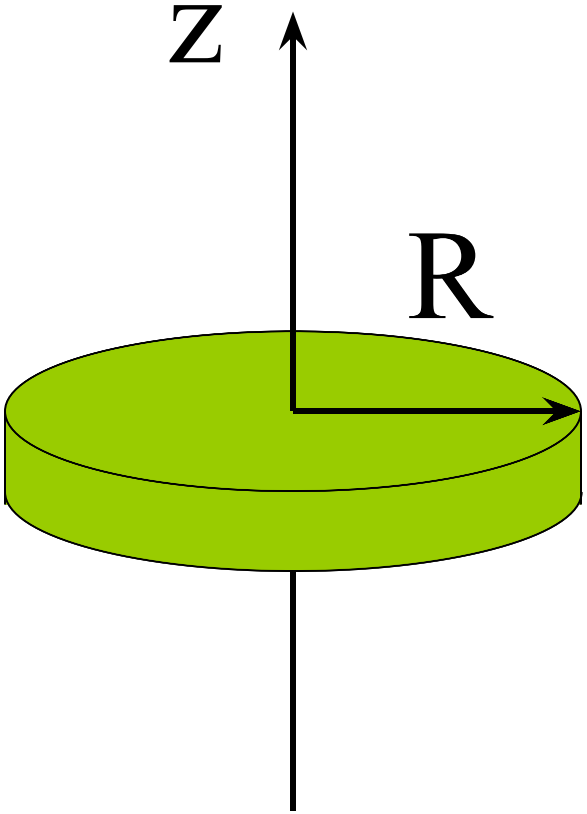
Масса кусочка dx : $$dm = \frac{M}{l}\,dx$$

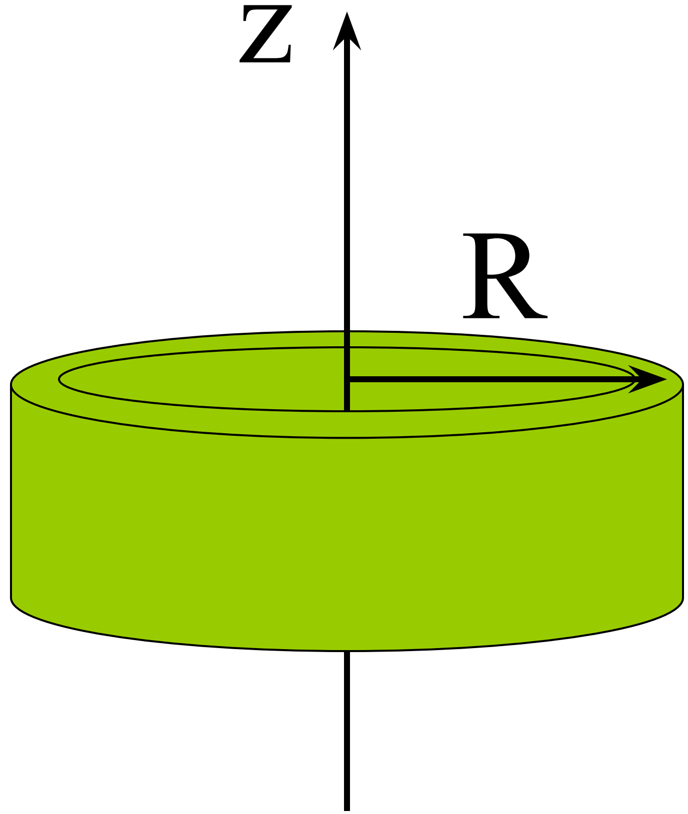
$$I_z = \int_0^l \frac{M}{l}\,dx \cdot x^2 = \frac{M}{l}\,\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^l = \frac{Ml^2}{3}$$

- момент инерции относительно оси z

$$I_c = \frac{Ml^2}{12}$$

- момент инерции относительно оси, проведенной через середину длины бруска параллельно оси z





$$I_z = \frac{MR^2}{2}$$

$$I_z = MR^2$$

Теорема об изменении момента количества движения точки

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{v}) = M_0^e$$

$$\boxed{\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{M}_0^e}$$

Производная по времени от вектора момента количества движения точки равна моменту внешних сил относительно той же точки.

Получим эту теорему для системы. Пусть система состоит из n-материальных точек.

Разделим все силы, действующие на систему, на внешние и внутренние и для каждой точки запишем теорему об изменении количества движения точки.

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{d\vec{K}_{01}}{dt} = \vec{M}_0(\vec{F}_1^{\,e}) + \vec{M}_0(\vec{F}_1^{\,i}) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{d\vec{K}_{0n}}{dt} = \vec{M}_0(\vec{F}_n^{\,e}) + \vec{M}_0(\vec{F}_n^{\,i}) \end{array}\right.$$

Почленно сложим уравнения системы:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{d\vec{K}_{0k}}{dt}=\sum_{k=1}^{n}\vec{M}_0(\vec{F}_k^{\,e})+\sum_{k=1}^{n}\vec{M}_0(\vec{F}_k^{\,i})$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{n}K_{0k}=\vec{M}_0^{\,e}}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{K}_0}{dt}=\vec{M}_0^{\,e}}$$

Следствия :

1) Внутренними силами нельзя изменить момент количества движения системы.

2) Если главный момент внешних сил системы равен нулю, то вектор момента внешних сил системы - величина постоянная.

Если $\overrightarrow{M_0^e} = 0$, то $K_0 = const$

3) $$\frac{dK_x}{dt} = M_x^e$$

$$\frac{dK_y}{dt} = M_y^e$$

$$\frac{dK_z}{dt} = M_z^e$$

Если проекция главного момента внешних сил на какую-либо ось равна нулю, то кинетический момент - величина постоянная.

Если $M_x^e = 0$, то $K_x = \text{const}$

Дифференциальное уравнение движения твердого тела относительно неподвижной оси

$$K_z = I_z \cdot \omega_z$$

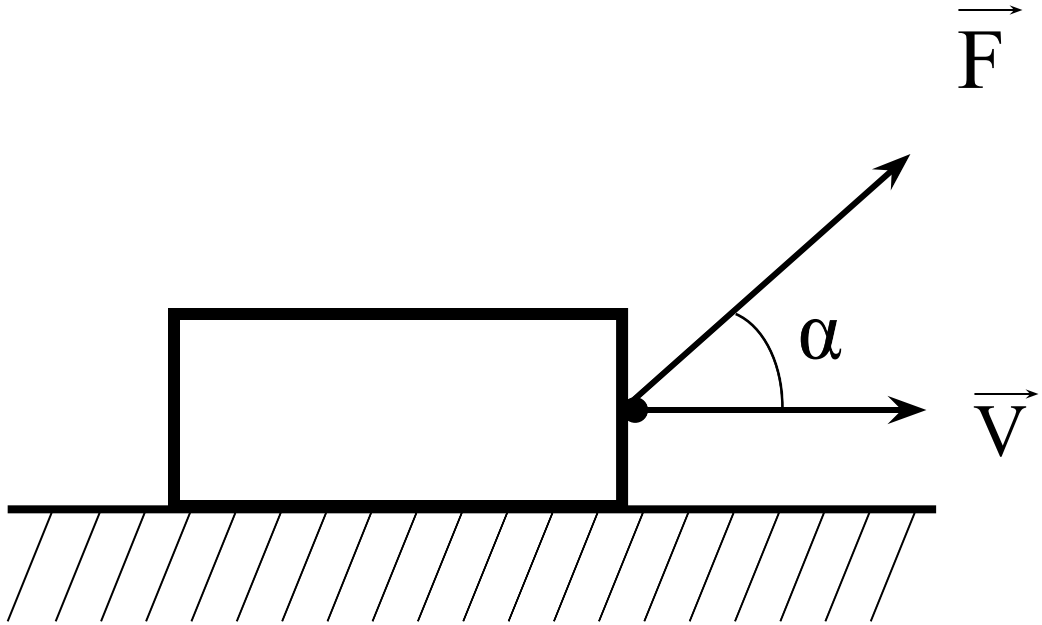
$$\frac{dK_z}{dt} = M_z^e$$

$$I_z \frac{d\omega}{dt} = M_z^e$$

$$I_z \ddot{\varphi} = M_z^e$$

Работа силы

Прямолинейное перемещение тела.

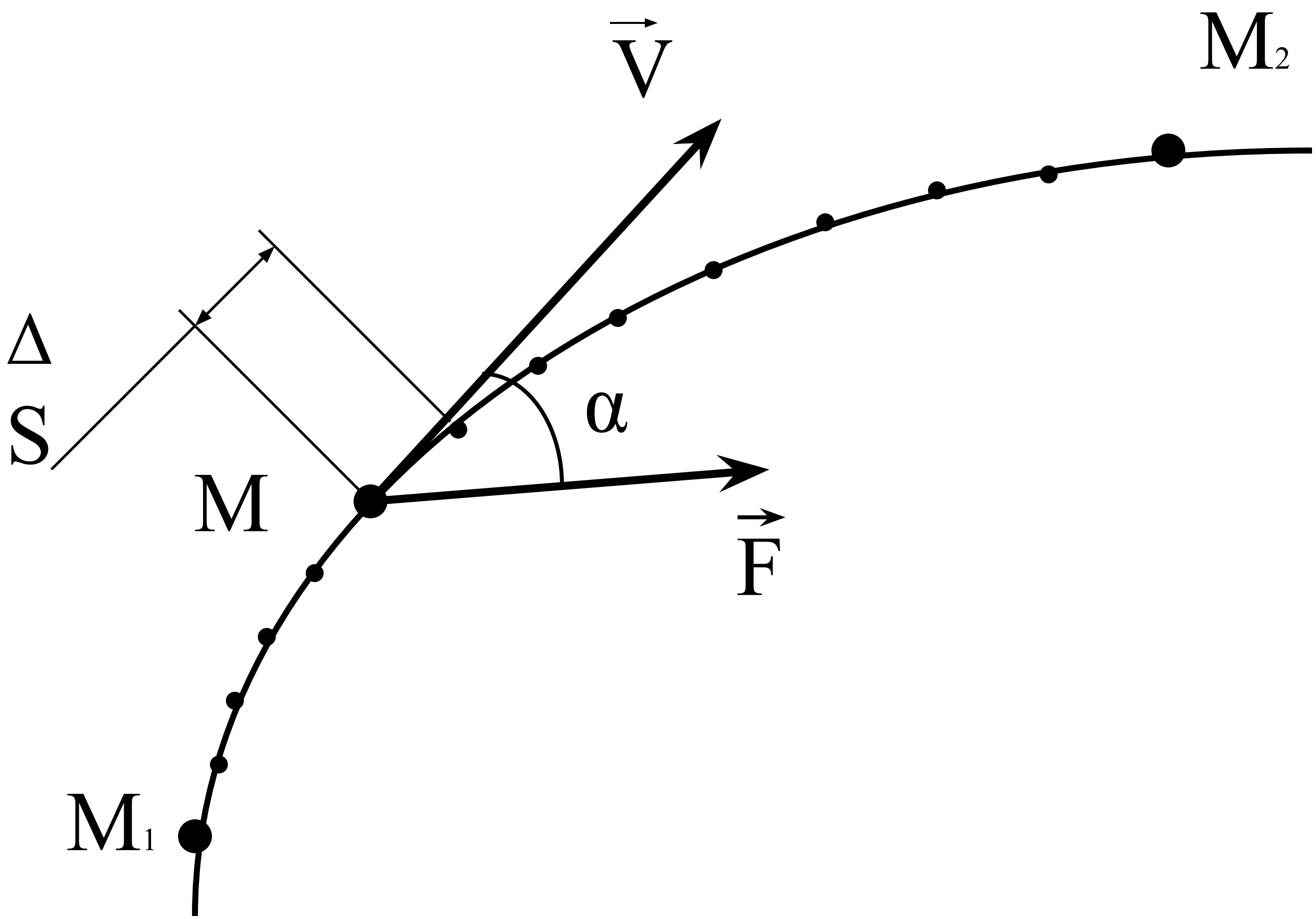


$$A = F \cdot S \cdot \cos(\alpha)$$

Перемещение тела по кривой.

Если точка перемещается по кривой и сила изменяется, то для того чтобы найти работу силы, произведенную на участке M_1M_2, разобьем дугу M_1M_2 на n-частей.

Тогда если размер каждого участка Δ S - мал, то можно считать, что дуга, ограничивающая этот участок, приближается к хорде, и сила не успевает изменить ни величину ни направление.


$\vec{V}$
M_2
ΔS
α
M
$\vec{F}$
M_1

Тогда работа , произведенная силой на k-ом участке определится как:

$$A_k = F_k \cdot \cos(\alpha_k) \cdot \Delta S_k$$

Вся работа на участке M_1M_2 равна:

$$A_{1,2} \simeq \sum_{k=1}^{n} F_k \cdot \cos(\alpha_k) \cdot \Delta S_k$$

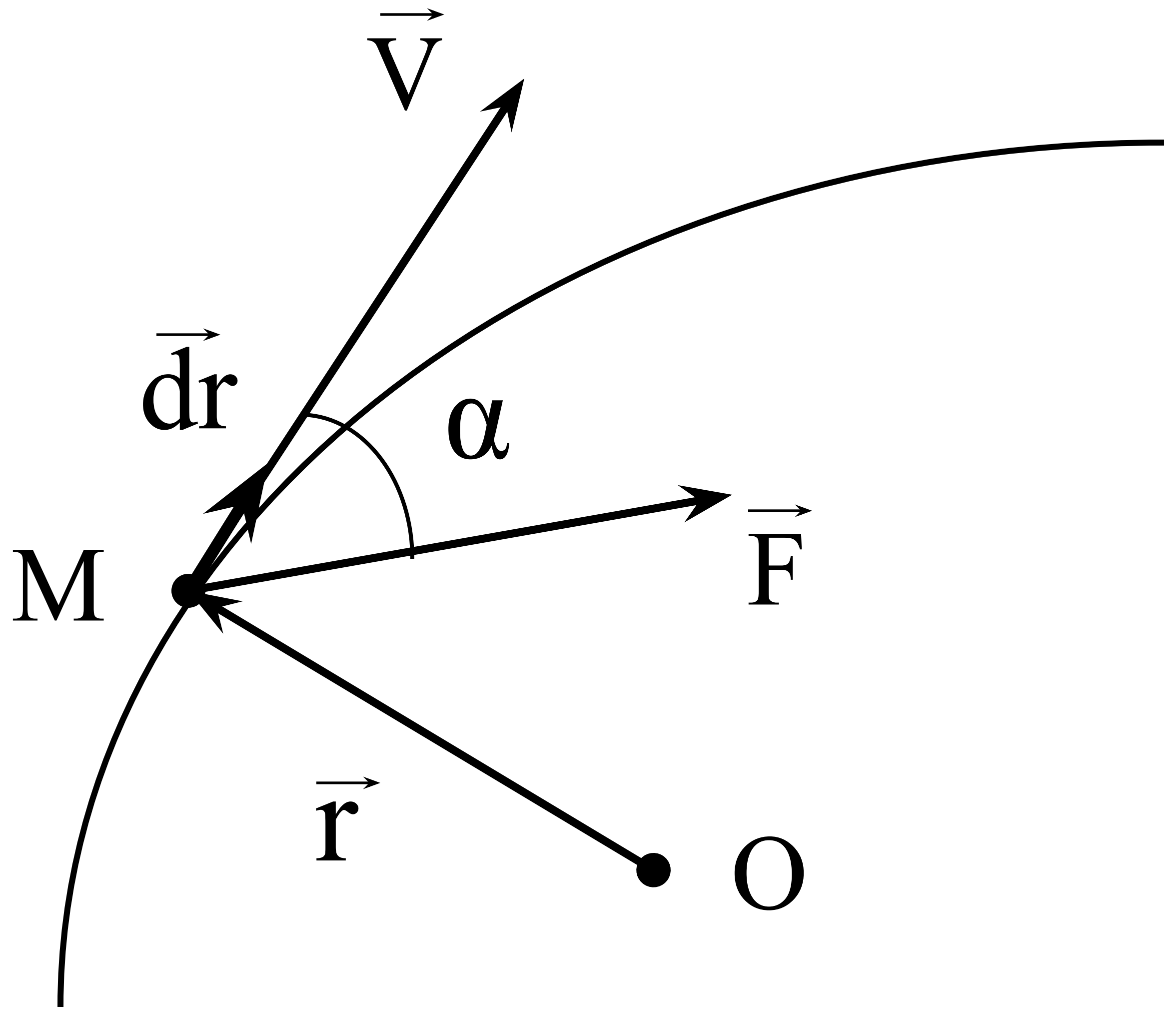
Работа определяется точно криволинейным интегралом:

$$A_{1,2} = \int\limits_{M_1M_2} F \cdot \cos(\alpha) \cdot dS$$

Элементарная работа:

$$d'A = F \cdot \cos(\alpha) \cdot dS$$

Найдем другое выражение для элементарной работы



$\vec{V}$
$\vec{dr}$
α
$\vec{F}$
M
$\vec{r}$
O

- $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, векторы $\vec{v}$ и $\overrightarrow{dr}$ направлены по одной прямой.

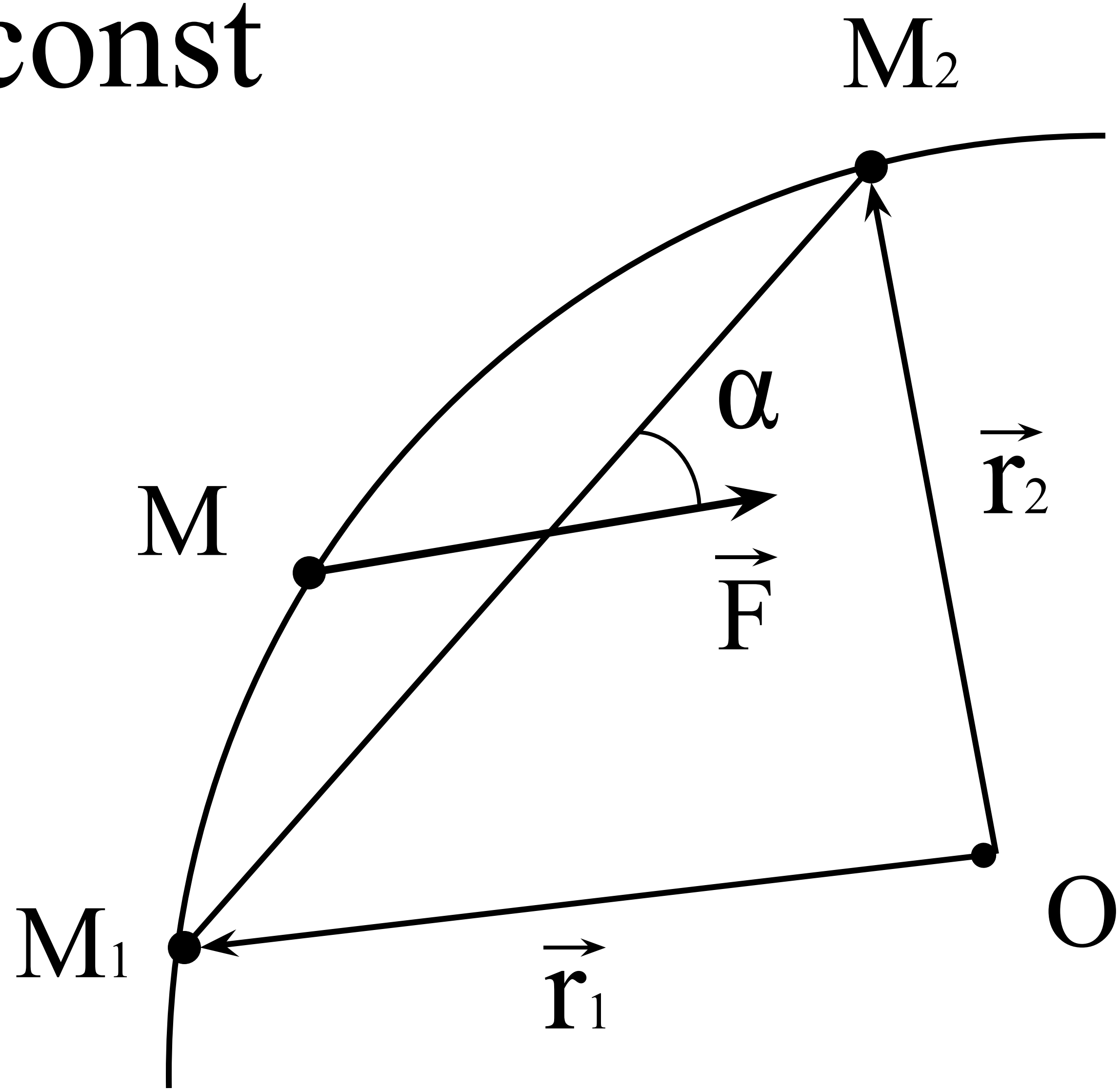
$v = \frac{dS}{dt} = \frac{|d\vec{r}|}{dt}$ или $dS = |\overrightarrow{dr}|$

$d'A = |\vec{F}|\cdot|\overrightarrow{dr}|\cos\alpha = \vec{F}\cdot\overrightarrow{dr}$

$d'A = \vec{F}\cdot\overrightarrow{dr}$

Работа силы, постоянной по величине и направлению.

$\vec{F}=const$



$$A_{1,2} = \int\limits_{M_1M_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \vec{F}\cdot\int\limits_{r_1}^{r_2} d\vec{r} = \vec{F}\cdot(r_2 - r_1)$$

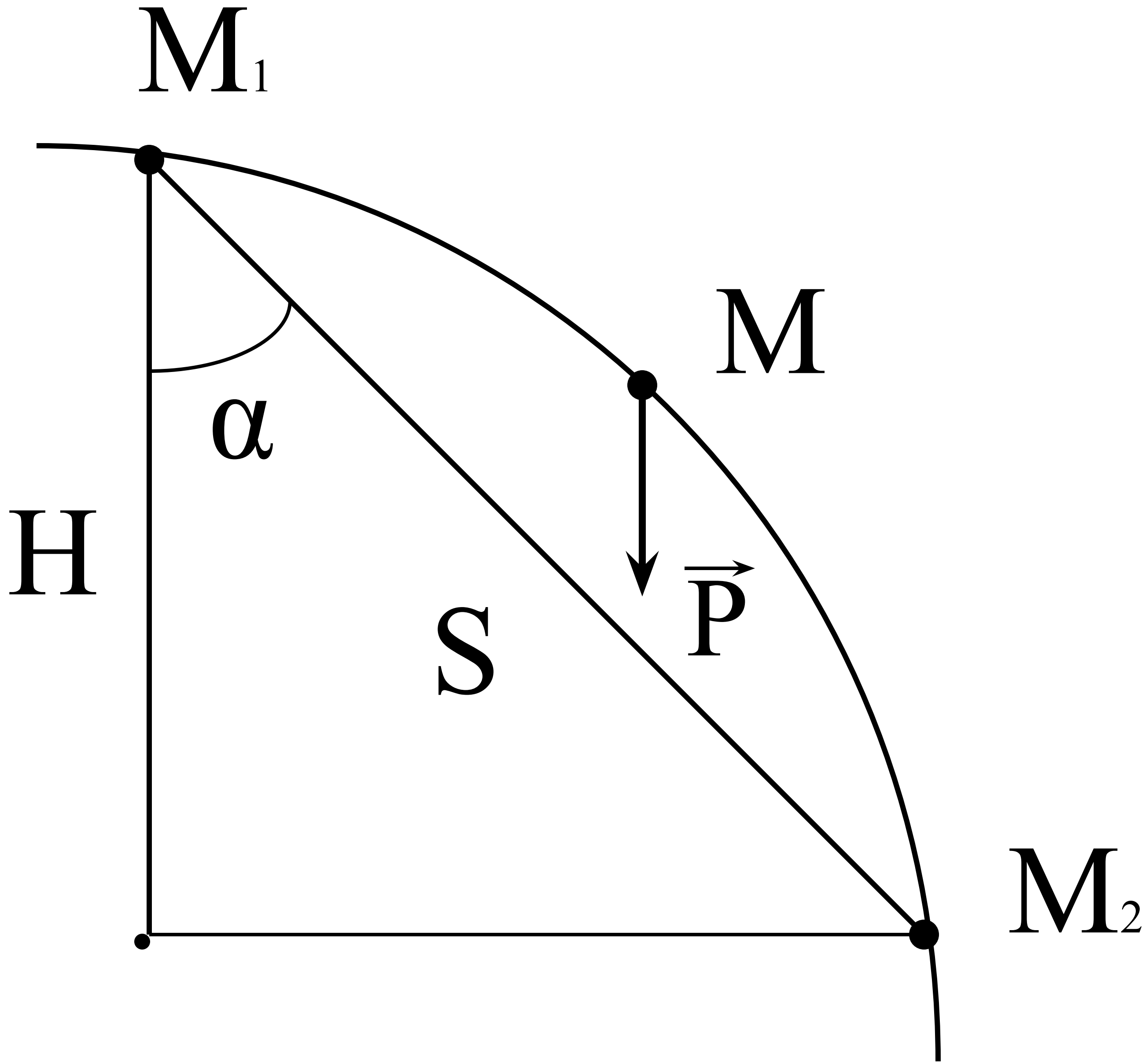
$$\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \overrightarrow{M_1M_2}$$

Тогда работа равна:

$$A_{1,2} = \vec{F}\cdot\overrightarrow{M_1M_2} = F\cdot S\cdot\cos(\alpha)$$

где: $S = M_1M_2$

Работа силы тяжести.



M1
M
α
H
S
P
M2

Изменение положения тела по высоте определяется:

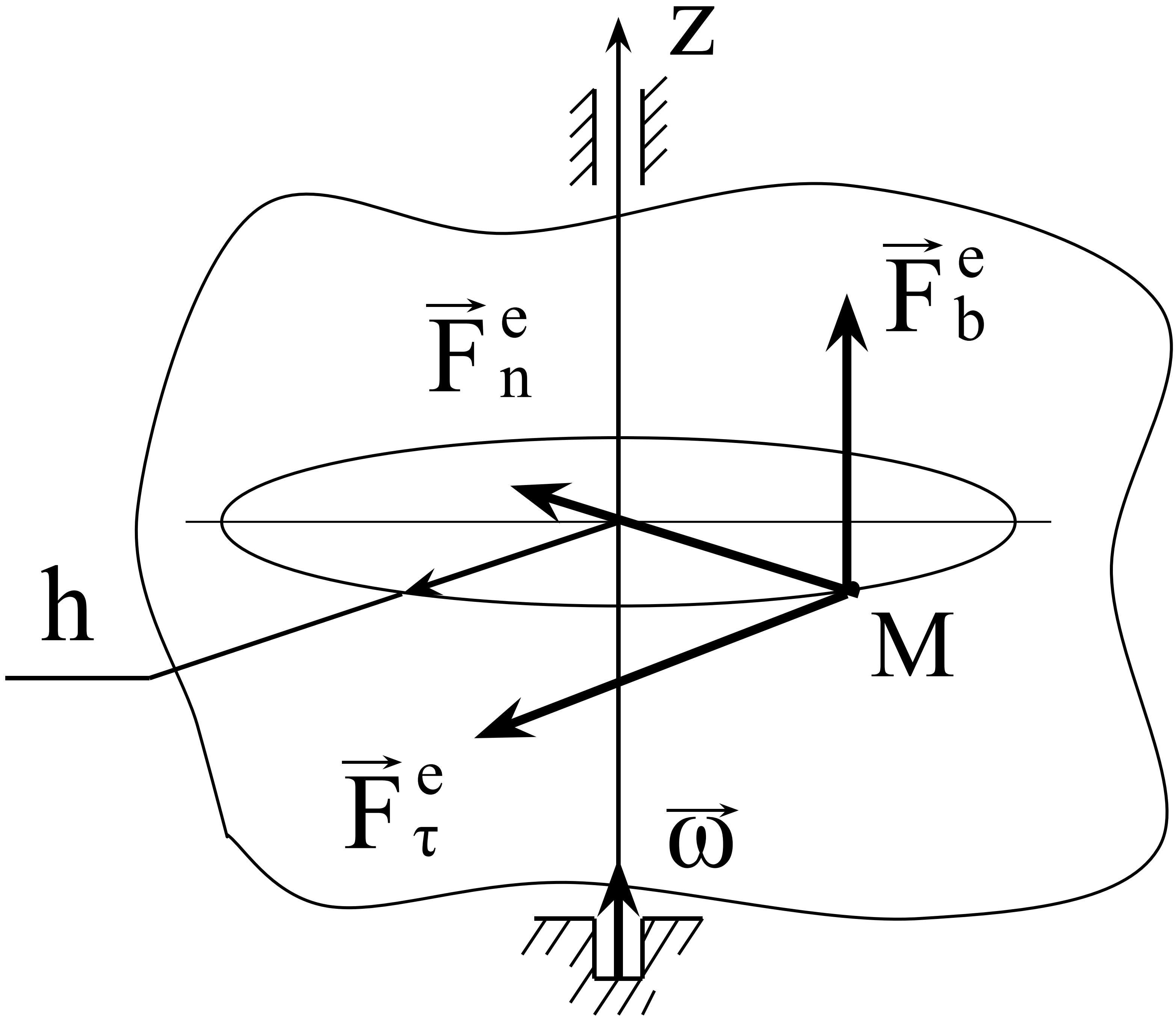
$$H = S \cdot \cos(\alpha)$$

Тогда работа на участке равна:

$$A_{1,2} = \pm P \cdot H = \pm P \cdot S \cdot \cos(\alpha)$$

Если тело опускают - работа положительная, если поднимают - отрицательная.

Работа силы, приложенной к твердому телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси.



Z
$\vec{F}_b^e$
$\vec{F}_n^e$
h
M
$\vec{F}_\tau^e$
$\vec{\omega}$

h - кратчайшее расстояние от точки до оси вращения. Сила F разложена на составляющие:

$\vec{F}_n^e$ - проекция силы на нормаль

$\vec{F}_\tau^e$ - проекция силы на касательную

$\vec{F}_b^e$ - проекция силы на бинормаль

Работа силы $\vec{F}_n^e$ равна нулю т.к. в направлении этой силы нет перемещения (или между векторами $\vec{V}$ и $\vec{F}_n^e$ угол 90°).

Работа силы F_b^e также равна нулю.

Элементарная работа силы F_τ^e :

$$d'A = F_\tau^e \cdot dS = F_\tau^e \cdot h \cdot d\phi$$

$$d'A^e = M_z^e \cdot d\phi$$

Полная работа: $$A^e = \int_{\phi_o}^{\phi} M_z^e \cdot d\phi$$

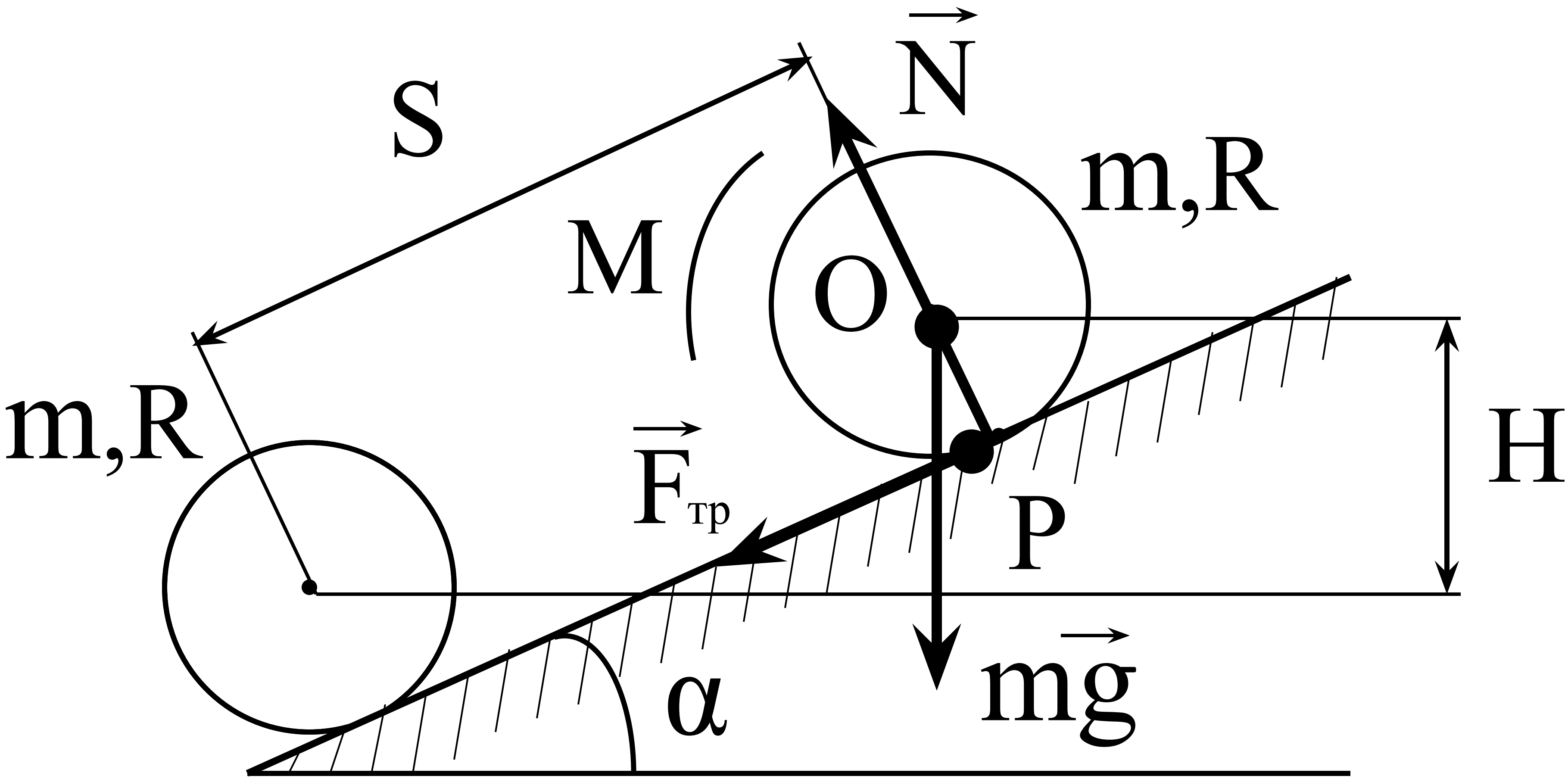
Если: $M_z^e = \mathrm{const}$

$A_\phi = M_z^e \cdot \Delta\phi$ - работа момента

Пример

Центр тяжести однородного колеса поднимается на высоту h, под действием момента М

Найти работу внешних сил.


S
N
m,R
M
O
m,R
F тр
H
P
mg
α

$$M = const\,; \qquad \Sigma A^e - ?$$

Работы силы трения и силы реакции опоры равны нулю.

$$A_{F_{тр}} = 0 \qquad A_N = 0$$

$$\Sigma A^e = -\,m \cdot g \cdot H + M \cdot \Delta\phi$$

т. P - МЦС

$$\omega = \frac{V_0}{R}$$

Интегрируя, получим:

$$\phi = \frac{S}{R} = \frac{H}{R \cdot \sin(\alpha)}$$

$$\sum A^e = -m \cdot g \cdot H + M \cdot \frac{H}{R \cdot \sin(\alpha)}$$

Кинетическая энергия

Кинетическая энергия точки

Для точки второй закон Ньютона выглядит так:

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$$

Домножаем ур-ние на приращение вектора $\vec{r}$

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot d\vec{r} = \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot d\vec{r} = m\frac{d\vec{r}}{dt}\cdot d\vec{v} =$$

Заменим отношение дифференциалов скоростью и внесем ее под знак дифференциала.

$$= m\vec{v} \cdot d\vec{v} = d\left(\frac{mv^2}{2}\right)$$

$$\boxed{d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = d'A}$$

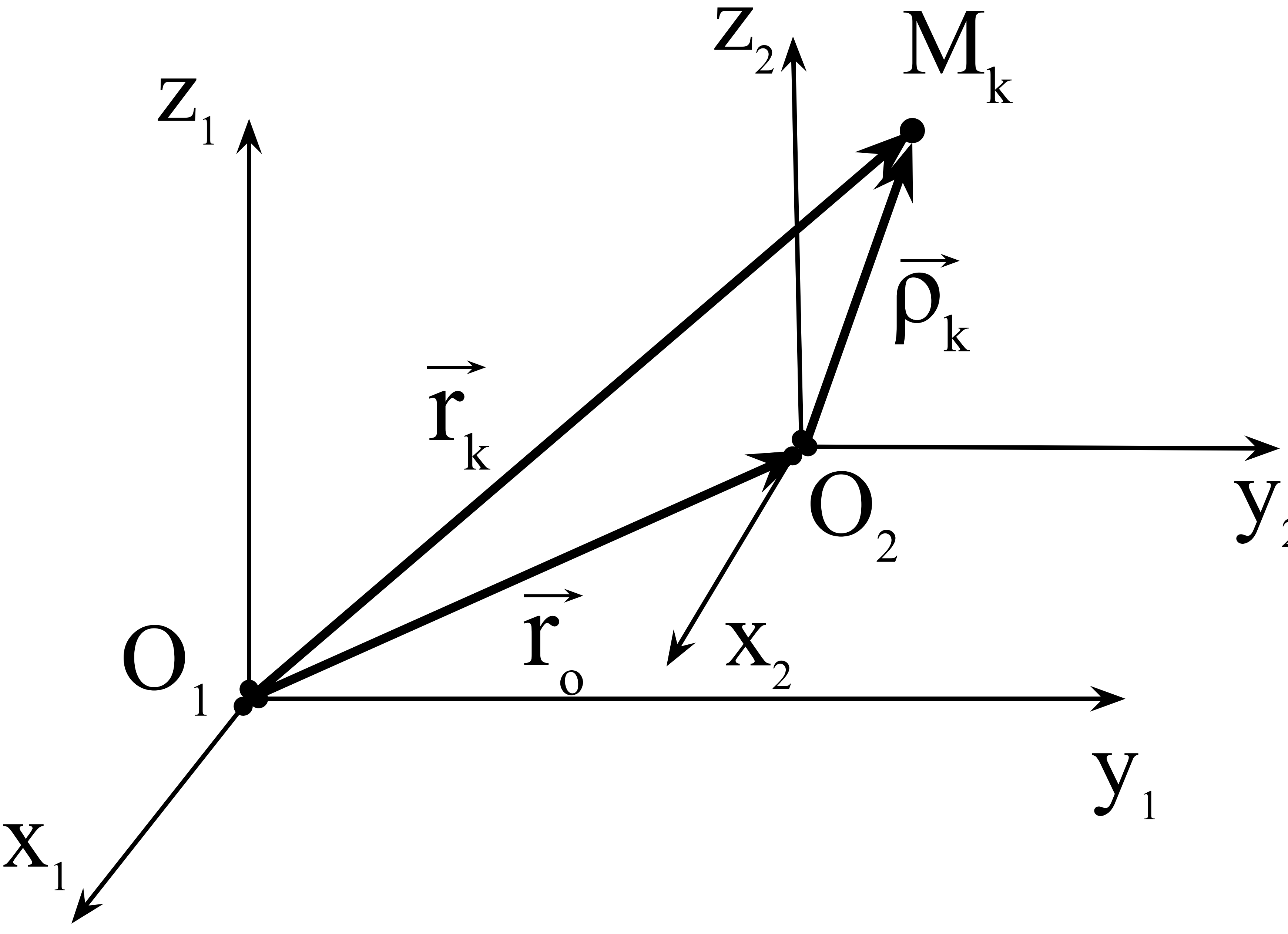
- **Теорема** об изменении кинетической энергии точки в дифференциальной форме.

$$T = \frac{mv^2}{2}$$

Кинетическая энергия системы определяется как сумма кинетических энергий точек, входящих в систему.

$$\boxed{T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k v_k^{\,2}}$$

Кинетическая энергия системы. (*Теорема Кёнига*)



z_2
M_k
z_1
$\vec{\rho}_k$
$\vec{r}_k$
O_2
y_2
$\vec{r}_o$
x_2
O_1
y_1
x_1

$0_1x_1y_1z_1$ - неподвижная система координат

Система координат $0_2x_2y_2z_2$ перемещается поступательно.

$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, векторы $\vec{v}$ и $\overrightarrow{dr}$ направлены по одной прямой.

$$v = \frac{dS}{dt} = \frac{|d\vec{r}|}{dt} \quad \text{или } dS = |\overrightarrow{dr}|$$

$$d'A = |\vec{F}| \cdot |\overrightarrow{dr}| \cos\alpha = \vec{F} \cdot \overrightarrow{dr}$$

$$d'A = \vec{F} \cdot \overrightarrow{dr}$$

$$\vec{r}_k = \vec{r}_0 + \vec{\rho}_k$$

Дифференцируем уравнение по времени.

$$\vec{v}_k = \vec{v}_0 + \vec{v}_{k\,r}$$

$\vec{v}_{k\,r}$ - скорость точки относительно подвижной системы координат

$$T_r = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k \vec{v}_{k\,r}^{\,2}$$

- кинетическая энергия системы относительно подвижной системы координат

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k(\vec{v}_0 + \vec{v}_{kr})^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\sum m_k \vec{v}_0^{\,2} + \sum m_k \vec{v}_0 \vec{v}_{kr} +$$

$$+ \frac{1}{2}\sum m_k \vec{v}_{kr}^{\,2} = \frac{1}{2}\vec{v}_0^{\,2}\sum m_k +$$

$$+ \vec{v}_0 \sum m_k \vec{v}_{kr}^{\,2} + T_r$$

$\vec{\rho}_c$ - радиус-вектор, определяющий положение центра масс системы относительно подвижной системы координат

$$\vec{\rho}_c = \frac{\sum m_k \vec{\rho}_k}{M}$$

Дифференцируем повремени:

$$\vec{v}_{c\,r} = \frac{\sum m_k \vec{v}_{k\,r}}{M}$$

$$\sum m_k \vec{v}_{kr} = M \vec{v}_{cr}$$

$\vec{v}_{cr}$ - скорость центра масс относительно неподвижной системы координат

$$T = \frac{1}{2}\vec{v}_0^{\,2} M + \vec{v}_0 \vec{v}_{cr} M + T_r$$

Совместим начало подвижной системы координат с центром масс системы:

$$\vec{v}_{cr} = 0$$

$$\boxed{T = \frac{1}{2} M \vec{v}_0^{\,2} + T_r}$$

Кинетическая энергия системы равна сумме кинетической энергии поступательного движения центра масс системы и кинетической энергии движения системы относительно центра масс.

Кинетическая энергия твёрдого тела

При поступательном движении:

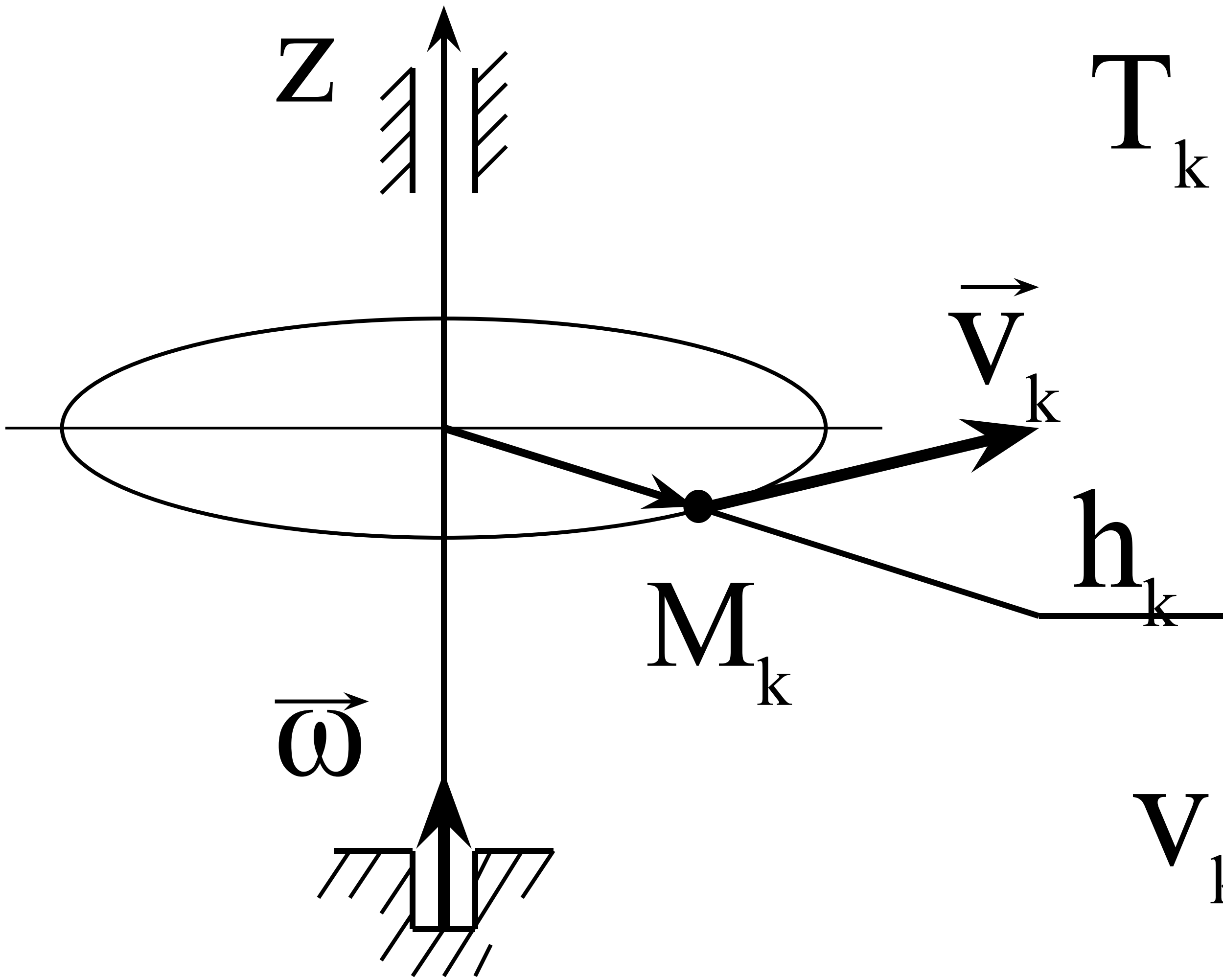
Кинетическая энергия системы определяется

$$T = \frac{1}{2}\sum m_k v_k^{\,2} \qquad \text{где:} \quad v_k = v$$

$$T = \frac{1}{2} v^2 \sum m_k = \frac{1}{2} v^2 M$$

$$\boxed{T = \frac{1}{2} v^2 M}$$ - полупроизведение массы тела на его скорость

При вращательном движении:



$$T_k = \frac{1}{2} m_k v_k^{\,2}$$

$$v_k = \omega h_k$$

$$T_k = \frac{1}{2} m_k h_k^2 \omega^2$$

Кинетическая энергия системы:

$$T = \frac{1}{2} \sum m_k v_k^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum m_k h_k^2$$

$$\sum m_k h_k^2 = I_z$$

- момент инерции вращательного движения точки

$$\boxed{T = \frac{1}{2} \omega^2 I_z}$$

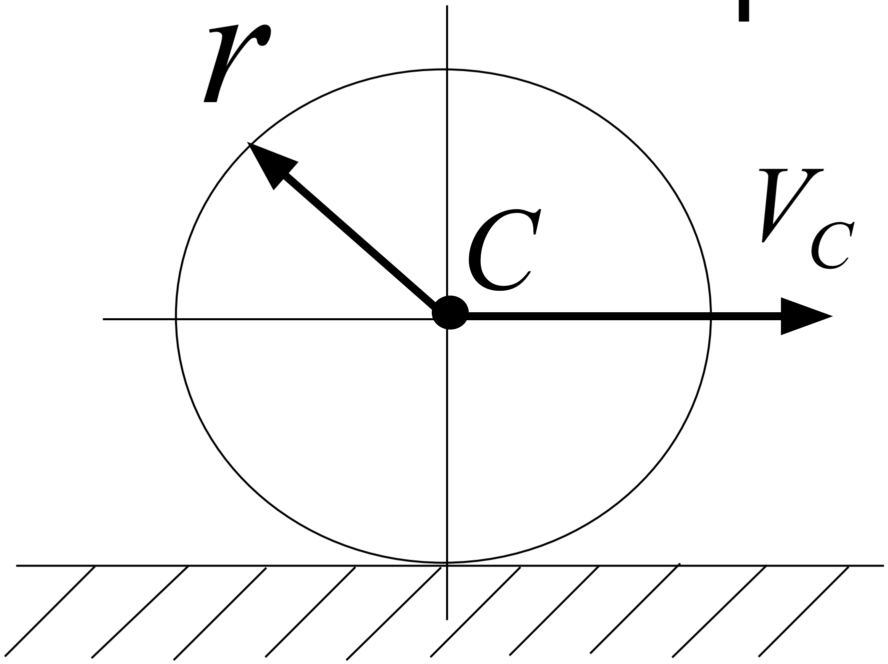
При плоскопараллельном движении:

кинетическая энергия определяется по формуле Кёнига -

$$T = \frac{1}{2} M v_{0}{}^{2} + T_{r}$$

$$\boxed{T = \frac{1}{2} m v_{0}{}^{2} + \frac{1}{2} I_{0}\omega^{2}}$$

Пример



Дано: r, m-радиус и масса однородного диска. Vc-скорость центра масс диска. Диск катится без скольже – ния. ***Определить кинетическую энергию диска***.

$$\omega = \frac{V_c}{r}$$

$$T = \frac{1}{2} m V_c^2 + \frac{1}{2} I_c \omega^2$$

$$I_C = \frac{1}{2} m r^2$$

$$T = \frac{1}{2} m V_c^2 + \frac{1}{2} \bullet \frac{1}{2} m r^2 \bullet \frac{V_C^2}{r^2} =$$

$$= \frac{3}{4} m V_C^2$$

Теорема об изменении кинетической энергии системы

Пусть система состоит из
n-материальных точек.

Делим все силы, действующие на систему, на внешние и внутренние и для каждой точки запишем теорему об изменении кинетической энергии.

$$\left[\begin{array}{l} d\left(\frac{m_1 v_1^2}{2}\right) = dA_1^e + dA_1^i \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ d\left(\frac{m_n v_n^2}{2}\right) = dA_n^e + dA_n^i \end{array}\right.$$

$$\sum_{k=1}^{n} d\left(\frac{m_k v_k^2}{2}\right) = \sum_{k=1}^{n} dA_k^e + \sum_{k=1}^{n} dA_k^i$$

$$d\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{m_k v_k^2}{2}\right) = dA^e + dA^i$$

- сумма элементарных работ, произведенных всеми внешними и всеми внутренними силами

$$\boxed{dT = dA^e + dA^i}$$

- теорема об изменении кинетической энергии системы в дифференциальной форме.

Если под действием внешних и внутренних сил системы она перемесилась из начального положения в конечное, то в *интегральной форме* теорема об изменении кинетической энергии будет иметь вид:

$$\boxed{T - T_0 = A^e + A^i}$$

Изменение кинетической энергии системы при перемещении ее из начального положения в конечное равна сумме работ внешних и внутренних сил.

Принцип Даламбера *или* Принцип кинетостатики

Для каждой k-ой точки можно записать II-ой закон Ньютона:

$$\vec{F}_k = m_k \vec{a}_k$$

Система состоит из n-точек. Разделяем силы на внешние и внутренние.

$$\vec{F}_k^{e} + \vec{F}_k^{i} = m_k \vec{a}_k$$

Обозначим:

$$\vec{F}_k^{и} = - m_k \vec{a}_k$$ - сила инерции.

Тогда: $$\boxed{\vec{F}_k^{\,e} + \vec{F}_k^{\,i} + \vec{F}_k^{\,и} = 0}$$

т.е. сумма внешних, внутренних сил системы и силы инерции равна нулю.

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^{\,e} + \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^{\,i} + \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^{\,и} = 0 \qquad (*)$$

Сумма главных векторов внешних сил, внутренних сил и сил инерции также равна нулю:

$$\vec{F}^{\,e} + \vec{F}^{\,i} + \vec{F}^{\,и} = 0$$

К каждой точке системы проведем соответствующий радиус- вектор.

Векторно домножим на радиус-вектор $\vec{r}_k$.

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{r}_k \times \vec{F}_k^{e} + \sum_{k=1}^{n} \vec{r}_k \times \vec{F}_k^{i} + \sum_{k=1}^{n} \vec{r}_k \times \vec{F}_k^{и} = 0$$

Тогда:

$$\vec{M}_0^{e} + \vec{M}_0^{i} + \vec{M}_0^{и} = 0$$

M_0^e - главный момент внешних сил
M_0^i - главный момент внутренних сил
$M_0^и$ - главный момент сил инерции

Учитывая то, что главный момент и главный вектор внутренних сил системы равен нулю, принцип Даламбера для системы примет вид:

$$\begin{cases} \vec{F}^e + \vec{F}^и = 0 \\ \vec{M}_0^e + \vec{M}_0^и = 0 \end{cases}$$

Главный момент и главный вектор сил инерции

$$M\vec{a}_c = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^{\,e}$$ - **Теорема** о движении центра масс системы

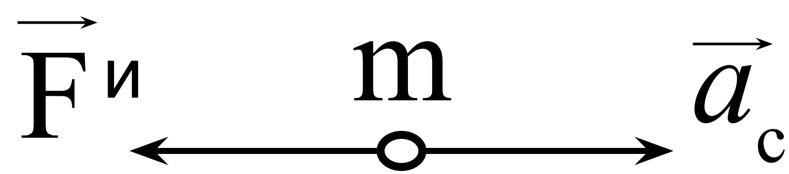
$$\vec{F}^{\,e} + \vec{F}^{\,и} = 0$$

$$\vec{F}^{\,e} = -\vec{F}^{\,и}$$

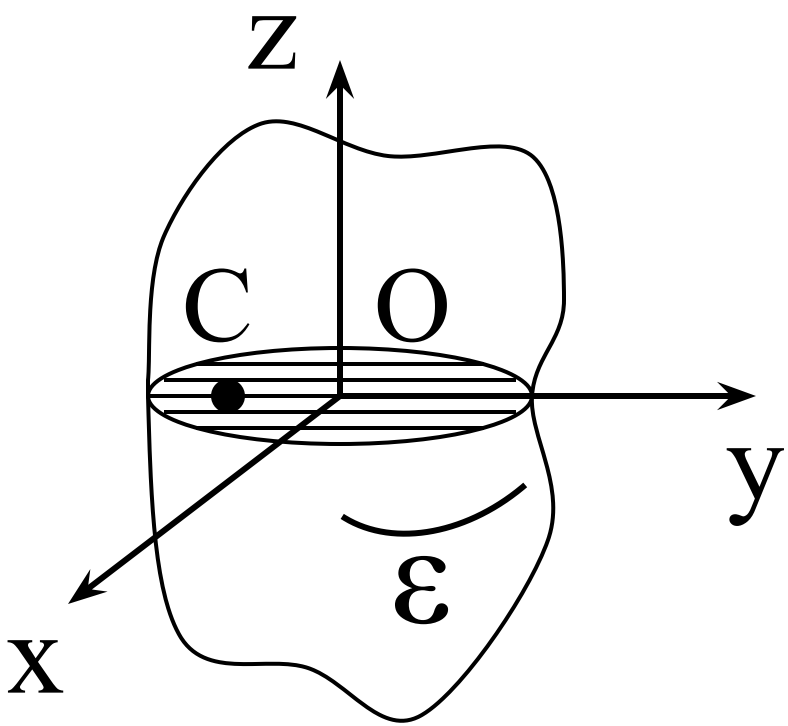
$$\boxed{\vec{F}^{\,и} = -M\vec{a}_c}$$

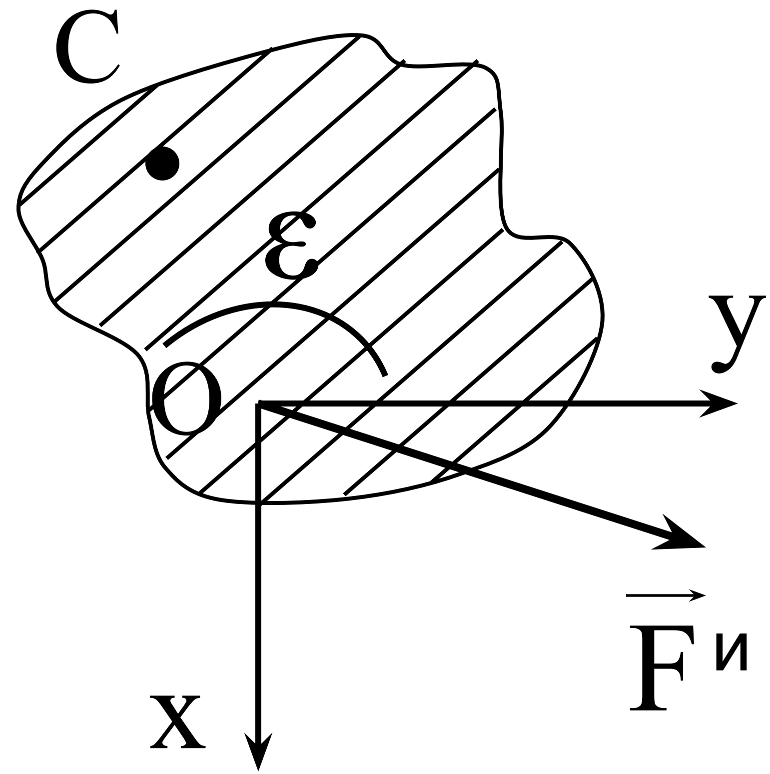
Главный вектор сил инерции определяется как произведение массы системы на ускорение ее центра масс, взятое со знаком «–».

$$\vec{F}^{\,и} \uparrow\downarrow \vec{a}_c$$



② Вращательное движение.





В проекции на ось z:

$$M_{0z}^{и} = \frac{dK_{0z}}{dt}$$

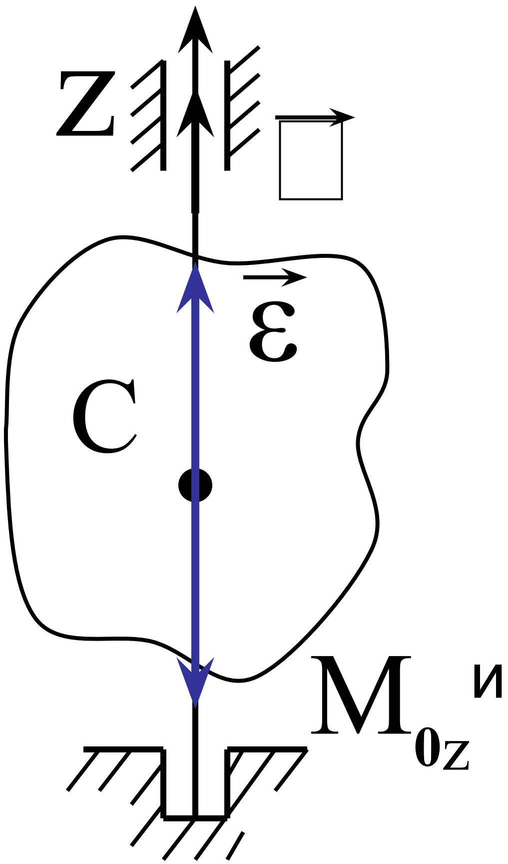
$$K_{0z} = I_{0z}\ \omega$$

Подставим и получим:

$$M_{0z}^{и} = -I_{0z} \cdot \varepsilon$$

③

Вращательное движение вокруг оси, проходящей через центр масс тела.



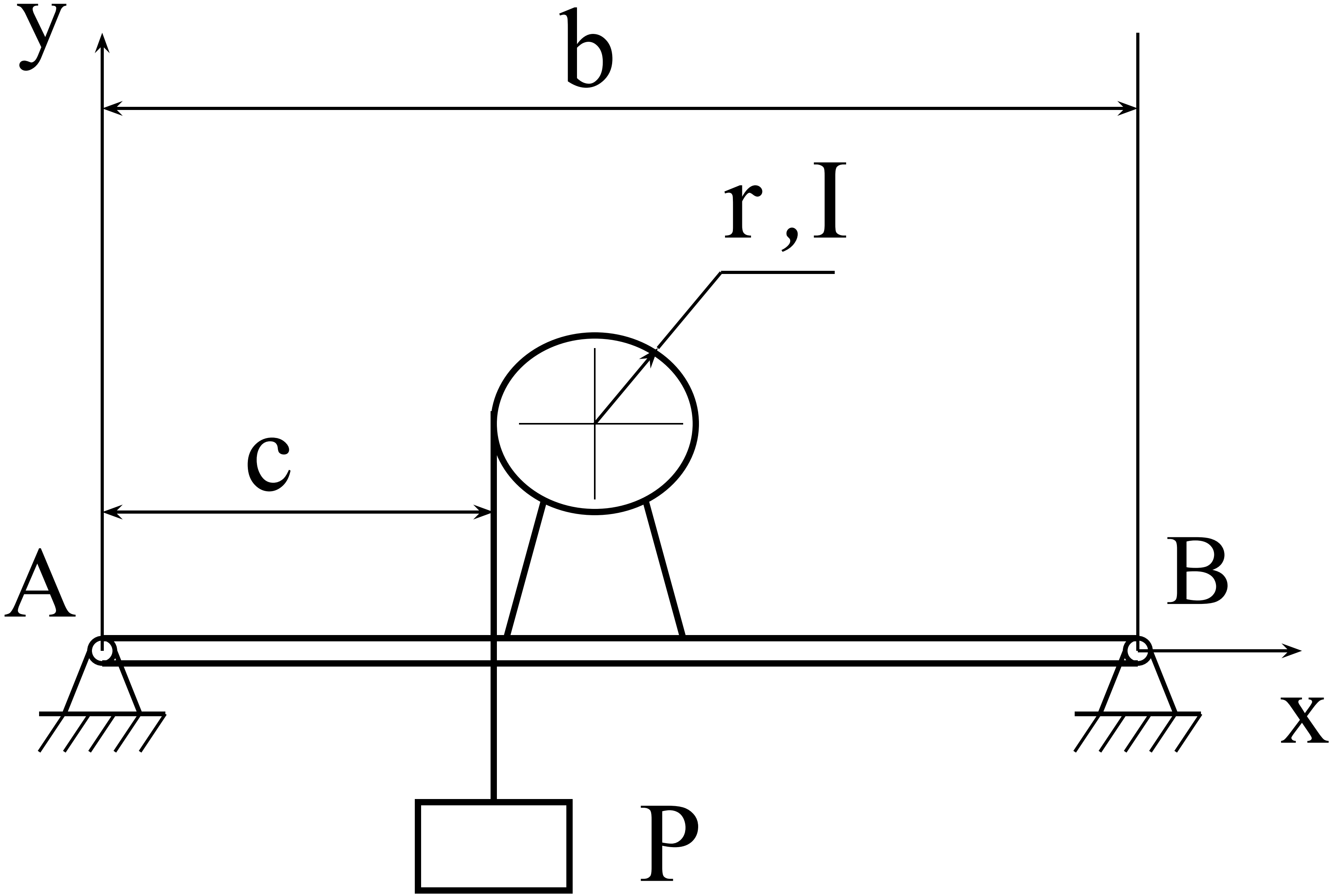
$$\vec{a}_c = 0$$

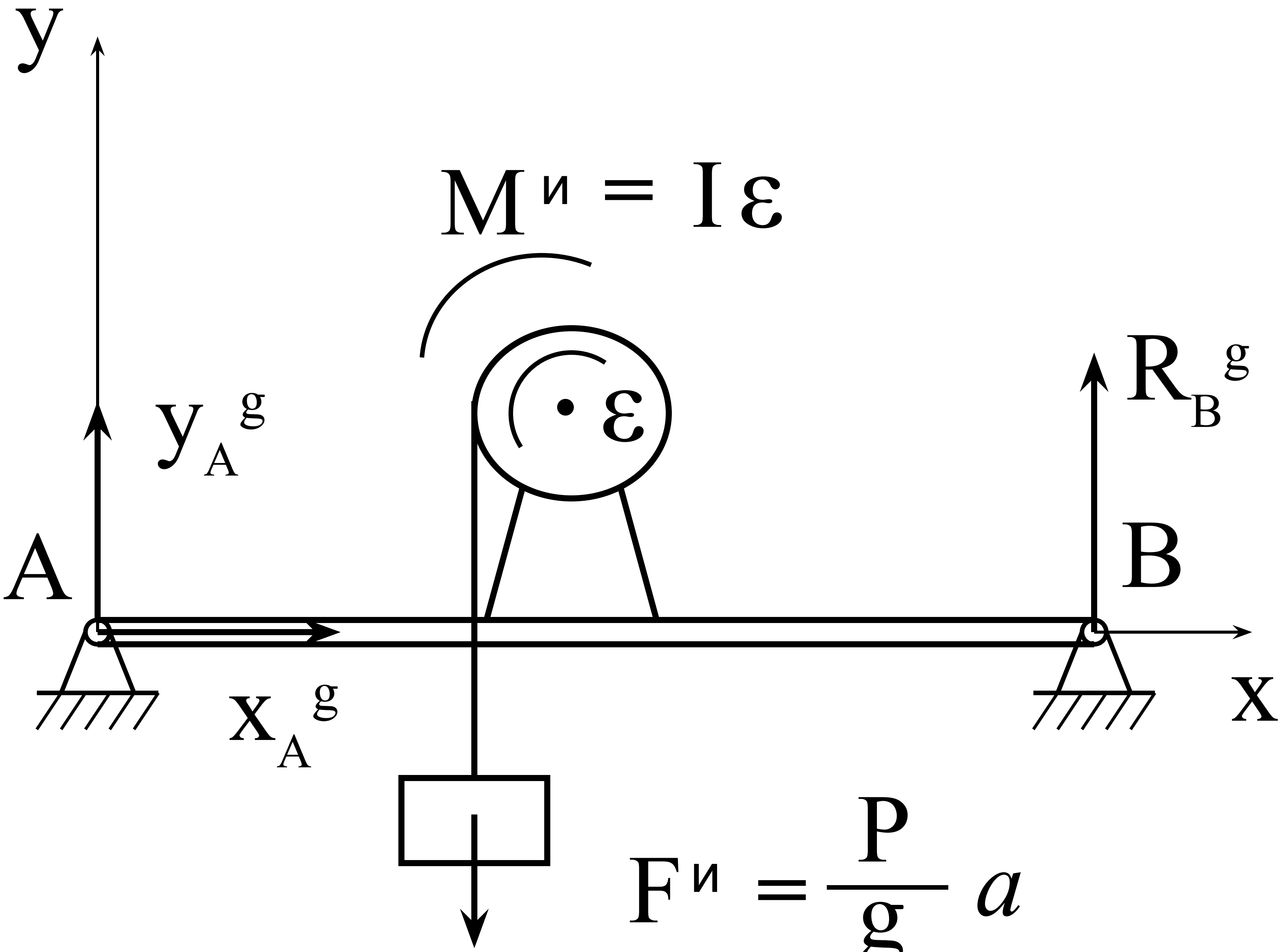
$$M_{0z}^{и} = -I_{0z} \cdot \varepsilon$$

3 Плоскопараллельное движение.

$$\begin{cases} \vec{F}^{\text{и}} = -M\vec{a}_c \\ M_{cz}^{\text{и}} = -I_{cz} \cdot \varepsilon \end{cases}$$

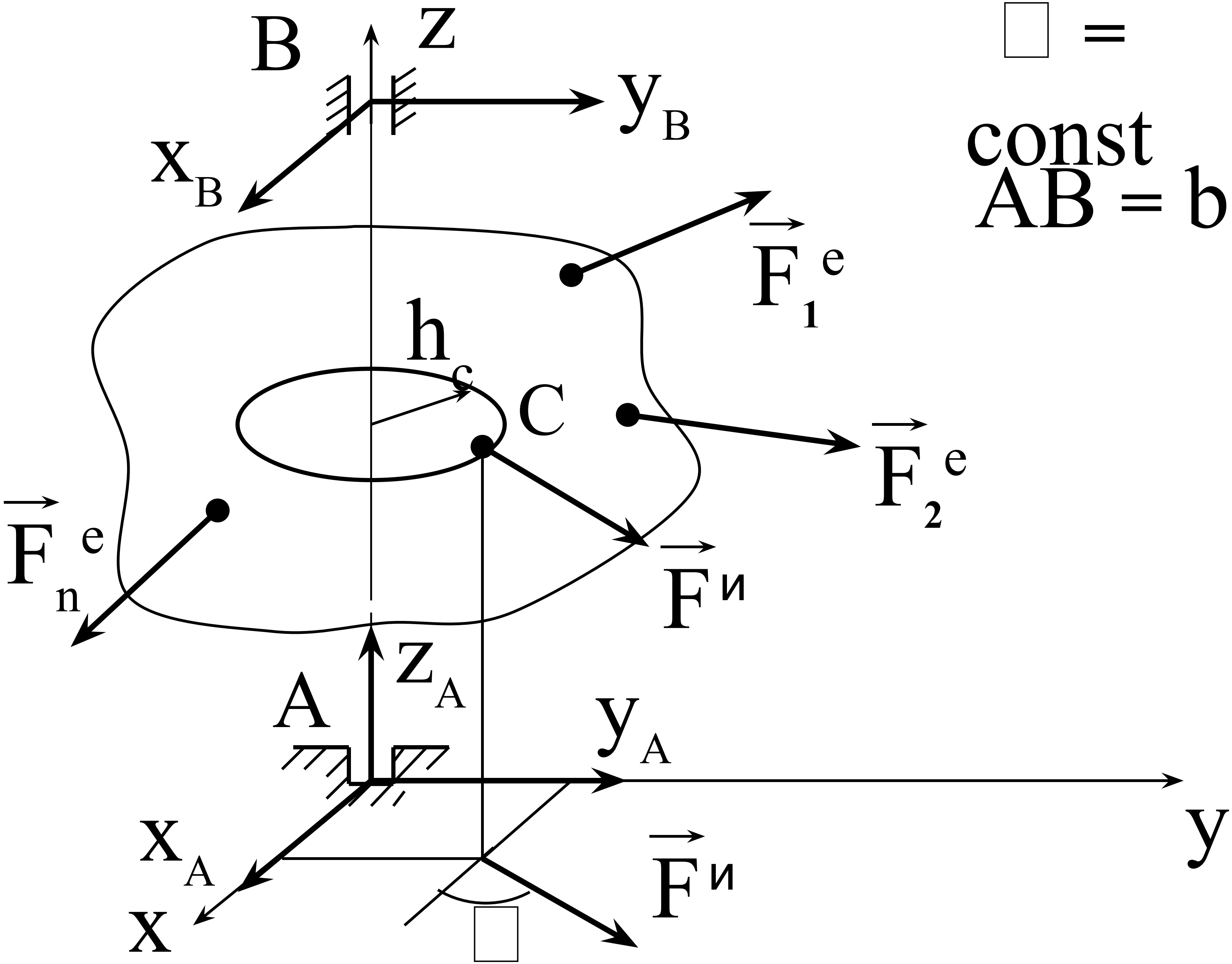
В этом случае присутствуют и главный вектор и главный момент сил инерции.


y
b
r , I
c
A
B
x
P



y
$M^{и} = I\varepsilon$
ε
y_A^g
R_B^g
A
B
x_A^g
x
$F^{и} = \frac{P}{g}a$

Динамические реакции твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси


B
z
y_B
x_B
□ =
const
AB = b
$\vec{F}_1^{\,e}$
h_c
C
$\vec{F}_2^{\,e}$
$\vec{F}_n^{\,e}$
$\vec{F}^{и}$
z_A
A
y_A
y
x_A
x
$\vec{F}^{и}$
□

h_c - кратчайшее расстояние от центра масс до оси вращения.

Используем принцип Даламбера.

Составляем условие равновесия пространственной системы сил.

При этом:

F_x^e, F_y^e, F_z^e - алгебраические суммы проекций внешних сил на оси x,y,z;

$F_x^и$, $F_y^и$, $F_z^и$ - проекции силы инерции на оси x,y,z.

M_x^e, M_y^e, M_z^e - алгебраические суммы проекций моментов внешних сил на оси x,y,z;

$M_x^и$, $M_y^и$ - проекции момента силы инерции на оси.

$$\begin{cases} x_A + x_B + F_x^e + F_x^и = 0 \\ y_A + y_B + F_y^e + F_y^и = 0 \\ z_A + F_z^e + F_z^и = 0 \\ -y_B\, b + M_x^e + M_x^и = 0 \\ x_B\, b + M_y^e + M_y^и = 0 \end{cases}$$

Сила инерции - $\vec{F}^{и} = -M\vec{a}_c$

Ускорение центра масс - $a_c = \square^2 h_c$

$$\begin{cases} F_x^{и} = M\square^2 h_c \cdot \cos(\square) = M\square^2 x_c \\ F_y^{и} = M\square^2 h_c \cdot \sin(\square) = M\square^2 y_c \\ F_z^{и} = 0 \end{cases}$$

$m_x(F_k^{и})$ - момент относительно оси x от k-ой силы инерции

$$\overrightarrow{M_0}(\overrightarrow{F}) = \vec{r} \times \overrightarrow{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

Для одной точки

$$\overrightarrow{M_0} = \vec{i}\, M_x + \vec{j}\, M_y + \vec{k}\, M_z$$

$$\begin{cases} m_x(F_k^{и}) = yF_z - zF_y \\ m_y(F_k^{и}) = zF_x - xF_z \\ m_z(F_k^{и}) = xF_y - yF_x \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_x(F_k^{и}) = -F_{ky}^{и} z_k = -m_k \square^2 y_k z \\ m_y(F_k^{и}) = F_{kx}^{и} z_k = m_k \square^{2k} x_k z \end{cases}$$

k

Для того, чтобы найти моменты силы относительно соответствующих осей для всего тела необходимо суммировать:

$$M_x^{и} = -(\Sigma m_k y_k z_k)\square^2 = = -I_{yz}\square^2$$

$$M_x^{и} = (\Sigma m_k x_k z_k)\square^2 = = I_{xz_2}\square$$

Найденные выражения подставим

$$
\begin{cases}
x_A + x_B + F_x^e + M \square^2 x_c = 0 \\
y_A + y_B + F_y^e + M \square^2 y_c = 0 \\
z_A + F_z^e = 0 \\
-y_B b + M_x^e - I_{yz} \square^2 = 0 \\
x_B b + M_y^e + I_{xz} \square^2 = 0
\end{cases}
$$

Слагаемые, в которых присутствует угловая скорость будут являться *динамическими реакциями*.

Эти динамические реакции будут равны нулю если

$$x_c = 0 \ \ \textit{и} \ \ y_c = 0,$$

т.е. центр масс лежит на оси вращения, и когда

$$I_{yz} = I_{xz} = 0,$$

т.е. когда ось вращения будет являться главной центральной осью инерции.

Аналитическая механика

Аналитическая механика

- Методы аналитической механики позволяют рассматривать системы без учета реакций идеальных связей

Виртуальные (*возможные*) перемещения

Классификация связей

1) Удерживающие связи

(стержень, сфера)

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = l^2$$

Неудерживающие связи

(веревка, трос, цепь)

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \ \square\ l^2$$

2) Стационарные связи

В уравнении нет зависимости от времени.

Нестационарные связи

В уравнении - временная зависимость.

3) Голономные связи

Неголономные связи

Уравнение голономной связи не содержит производной от координат, а уравнение голономной - содержит.

Пример:

$$f\left(x,\ y,\ z,\ \frac{dx}{dt},\ t\right) \le 0$$

Неголономная

нестационарная

неудерживающая связь

Уравнение связи имеет вид:

$$f(x, y, z, t) = 0$$

Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $\vec{r}_0$

Дадим точке приращение $\square\vec{r}$ в фиксированный момент времени

$$\vec{r}\,' = \vec{r}_0 + \square\vec{r}$$

$$\begin{cases} x' = x_0 + \square x \\ y' = y_0 + \square y \\ z' = z_0 + \square z \end{cases}$$

Все координаты получили приращения

Тогда:

$$f(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y,\ z_0 + \Delta z,\ t) =$$

Разложим уравнение в ряд в окрестности точки M_0

$$= f(x_0, y_0, z_0, t) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \Delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \Delta y + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0 \Delta z + \ldots = 0$$

Отбрасываем члены второго и выше порядка малости.

Учитываем, что первое слагаемое по условию равно нулю.

Тогда уравнение справедливо когда сумма 2-го, 3-го, 4-го слагаемых равна нулю.

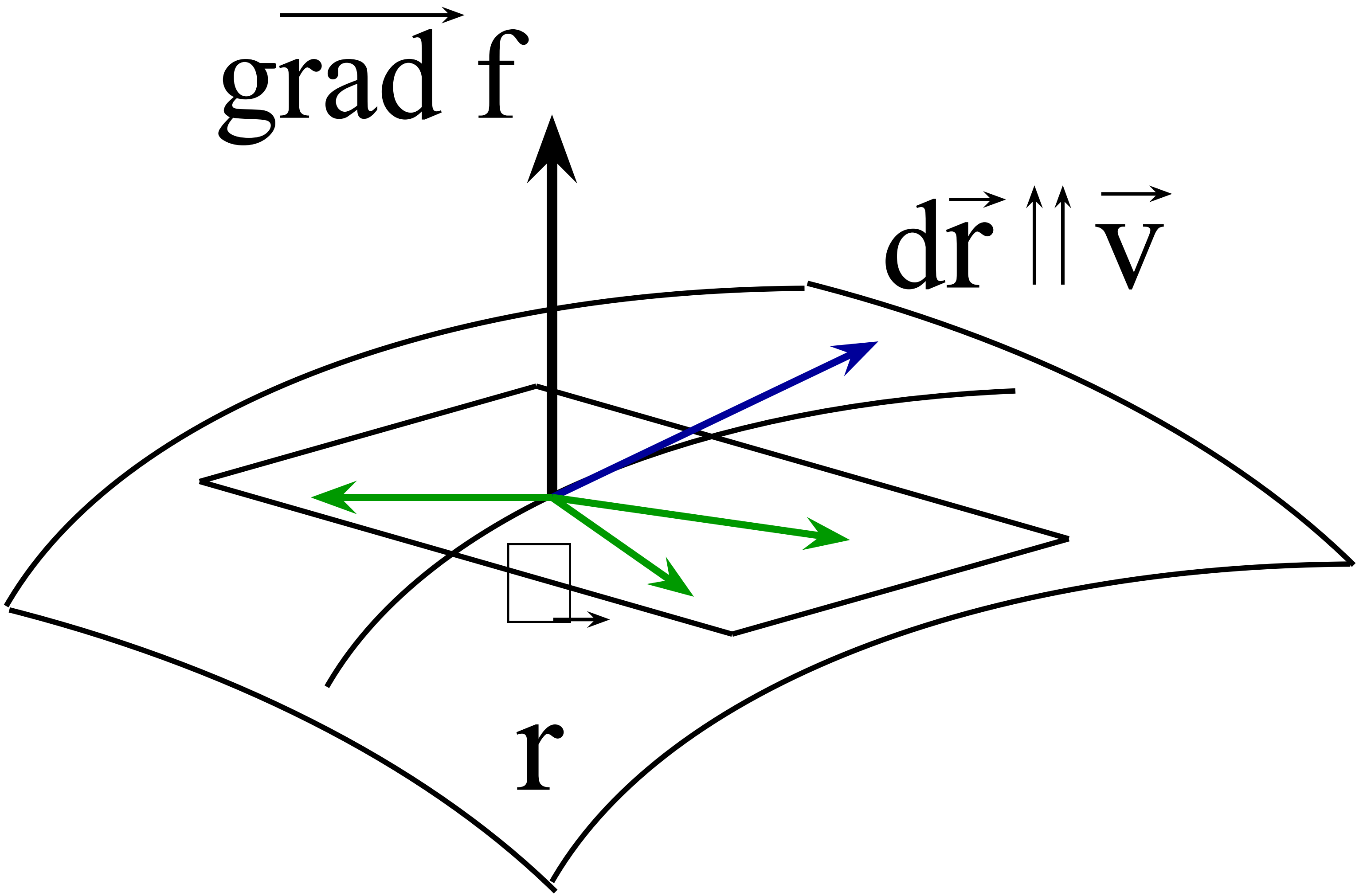
$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \square x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \square y + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0 \square z = 0$$

$$(\overrightarrow{\text{grad } f})_0 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \vec{i} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \vec{j} +$$

$$+ \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0 \vec{k}$$

т. е. $\quad (\overrightarrow{\text{grad } f})_0 \cdot \square\vec{r} = 0$

$\Rightarrow \quad \square = 90^\circ$



$\overrightarrow{\text{grad}}\, f$
$d\vec{r} \uparrow\uparrow \vec{v}$
$\vec{r}$

Виртуальное перемещение - мнимое, происходящее в фиксированный момент времени, малое, не нарушающее уравнения связей с учетом членов первого порядка малости перемещение.

Для стационарных связей хотя бы одно мнимое перемещение совпадает с действительным.

Для нестационарных связей ни одно мнимое перемещение не совпадает с действительным.

Виртуальная работа

Дадим системе виртуальное перемещение и подсчитаем элементарную работу, произведенную силами на этих перемещениях.

$$\delta A = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k \cdot \delta \vec{r}_k$$

Идеальные связи

- связи, работа реакций которых на любом виртуальном перемещении равна нулю.

$$\sum \boldsymbol{R}_k \bullet \partial \boldsymbol{r}_k = 0$$

Принцип виртуальных перемещений

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{\boldsymbol{F}}_k \cdot \delta \vec{\boldsymbol{r}}_k = 0$$

Для того, чтобы система, подчиненная идеальным стационарным удерживающим связям, находилась в равновесии, необходимо и достаточно, чтобы сумма работ всех активных сил на любом виртуальном перемещении была равна нулю.

Этот принцип позволяет не рассматривать реакций идеальных связей и используется для тел, находящихся в равновесии.

Необходимость:

$$\vec{F}_k + \vec{R}_k = 0 \quad , \quad \boldsymbol{v}_k = 0$$

$$\sum (\vec{F}_k + \vec{R}_k) \cdot \delta\vec{r}_k = 0$$

$$\sum \vec{F}_k \cdot \delta\vec{r}_k + \sum \vec{R}_k \cdot \delta\vec{r}_k = 0$$

$$\sum \vec{R}_k \cdot \delta\vec{r}_k = 0 \;\Rightarrow\; \sum \vec{F}_k \cdot \delta\vec{r}_k = 0$$

Достаточность:

$$\sum \vec{F}_k \cdot \delta\vec{r}_k \quad 0$$

$$=$$

$$\sum (\vec{F}_k + \vec{R}_k) \cdot \delta\vec{r}_k \quad 0$$

$$=$$

$$\sum \vec{F}_k \cdot \delta\vec{r}_k \quad \sum \vec{R}_k \cdot \delta\vec{r}_k \quad 0$$

$$+ \qquad =$$

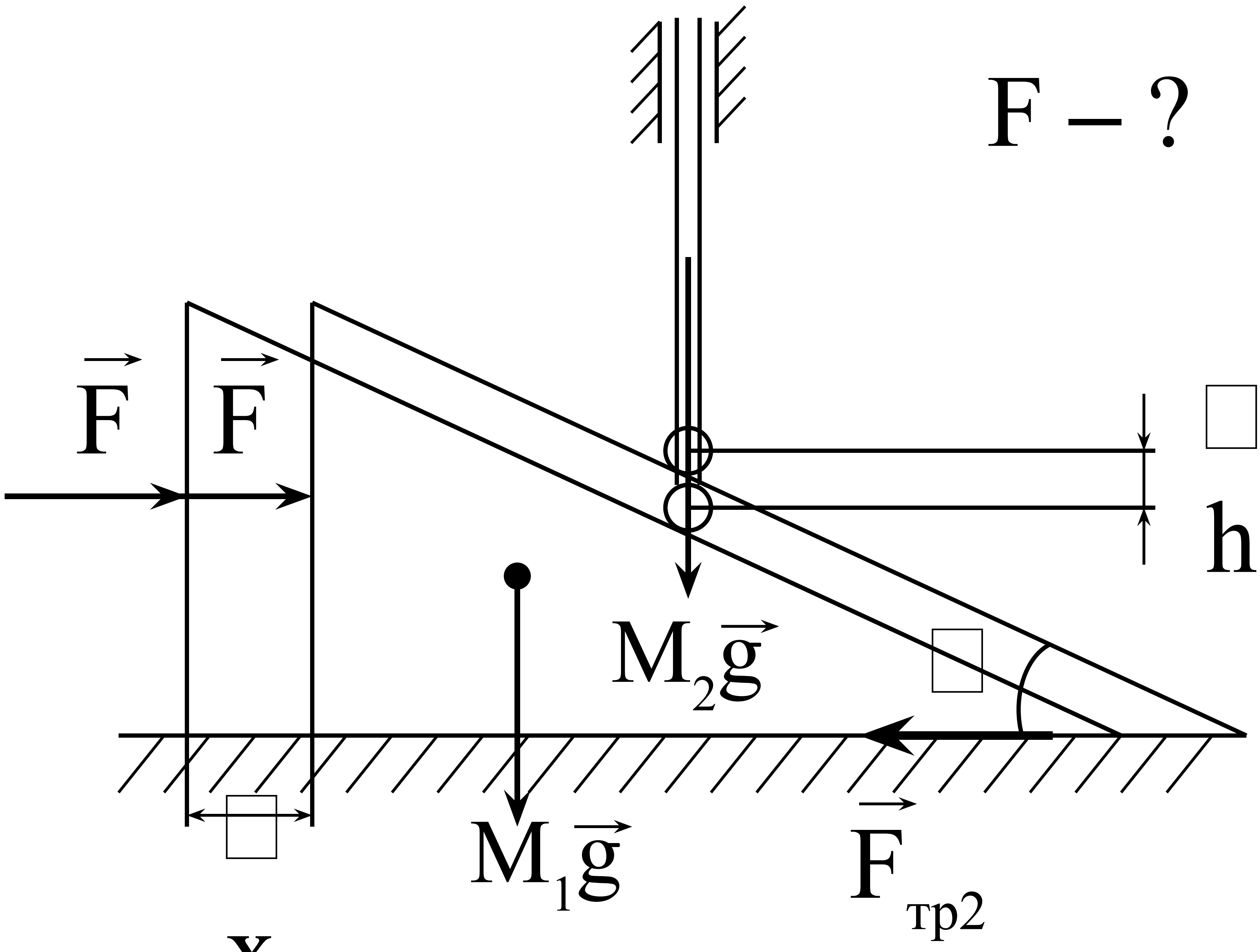
$$\Rightarrow \quad \sum \vec{F}_k \cdot \delta\vec{r}_k \quad 0$$

$$=$$

Задача.

Определить величину силы F, необходимую для равновесия.

Решить, используя принцип виртуальных перемещений.



F – ?
$\vec{F}$
$\vec{F}$
h
$M_2\vec{g}$
$M_1\vec{g}$
$\vec{F}_{тр2}$
x

$$\sum_{k=1}^{n} F_k \cdot \square v_k = 0$$

$$-F \square x - F_{тр} \square x + M_2 g \square h = 0$$

$$\square h = \square x \, tg \, \square$$

$$-F = F_{тр} + M_2 g \, tg \, \square$$

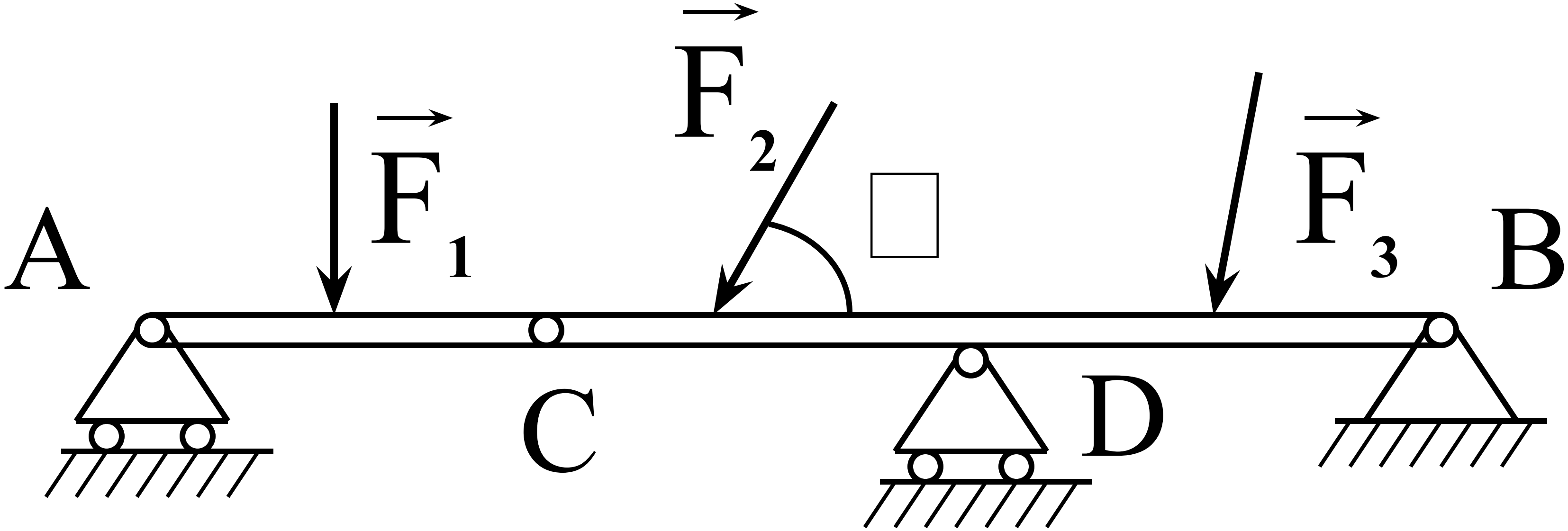
$$F = \frac{M_2 g\,tg}{\square} - f(M_2+M_2)\,g$$

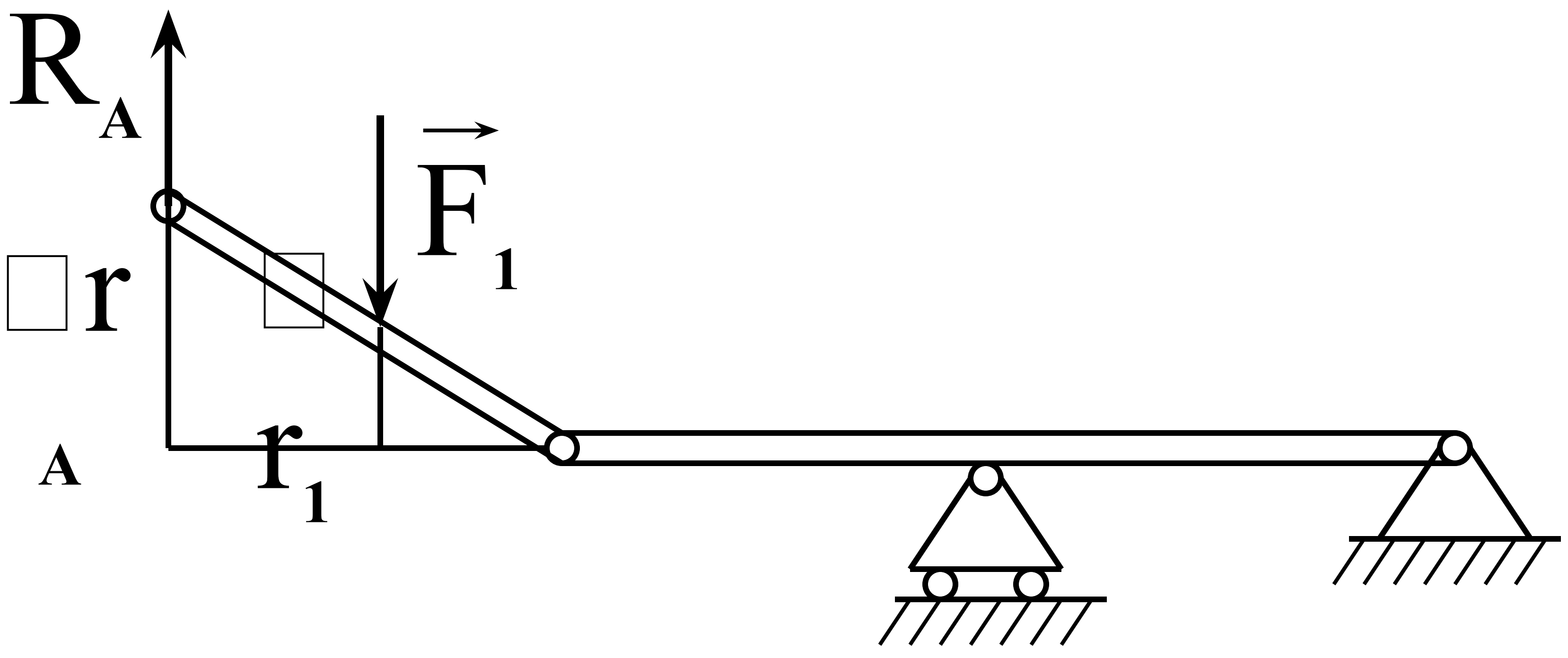
$$F\,\square x - F_{тр}\,\square x + M_2 g\,tg\,\square\;\square x = 0$$

$$\frac{M_2 g\,tg}{\square} - f(M_2+M_2)\,g \quad \square\,\frac{F}{\square}$$

$$\square\;\frac{M_2 g\,tg}{\square} + f(M_2+M_2)\,g$$

Использование принципа виртуальных перемещений для определения реакций связей


A
F1
F2
F3
B
C
D


RA
F1
r
r1
A

Общее уравнение динамики

Пусть система, состоящая из n-точек и подчиненная удерживающим голономным идеальным связям, движется.

Освобождаемся от связей и для каждой k-ой точки записываем II-ой закон Ньютона.

$$m_k \vec{a}_k = \overrightarrow{F}_k + \overrightarrow{R}_k$$

$$\overrightarrow{F}_k = m_k \vec{a}_k + \overrightarrow{R}_k = 0$$

Даем системе виртуальное перемещение. Каждая точка переместится на

$$\delta \vec{r}_k$$

Домножаем уравнение на $\delta \vec{r}_k$ и складываем все n-уравнений.

$$\sum (\vec{F}_k - m_k \vec{a}_k)\,\delta \vec{r}_k + \sum \vec{R}_k\,\delta \vec{r}_k = 0$$

R- реакция связи

$$\sum \vec{R}_k\,\delta \vec{r}_k = 0$$

- по определению идеальных связей.

При движении материальной системы, подчиненной идеальным удерживающим голономным связям, сумма работ активных сил и сил инерции на любом виртуальном перемещении равна нулю.

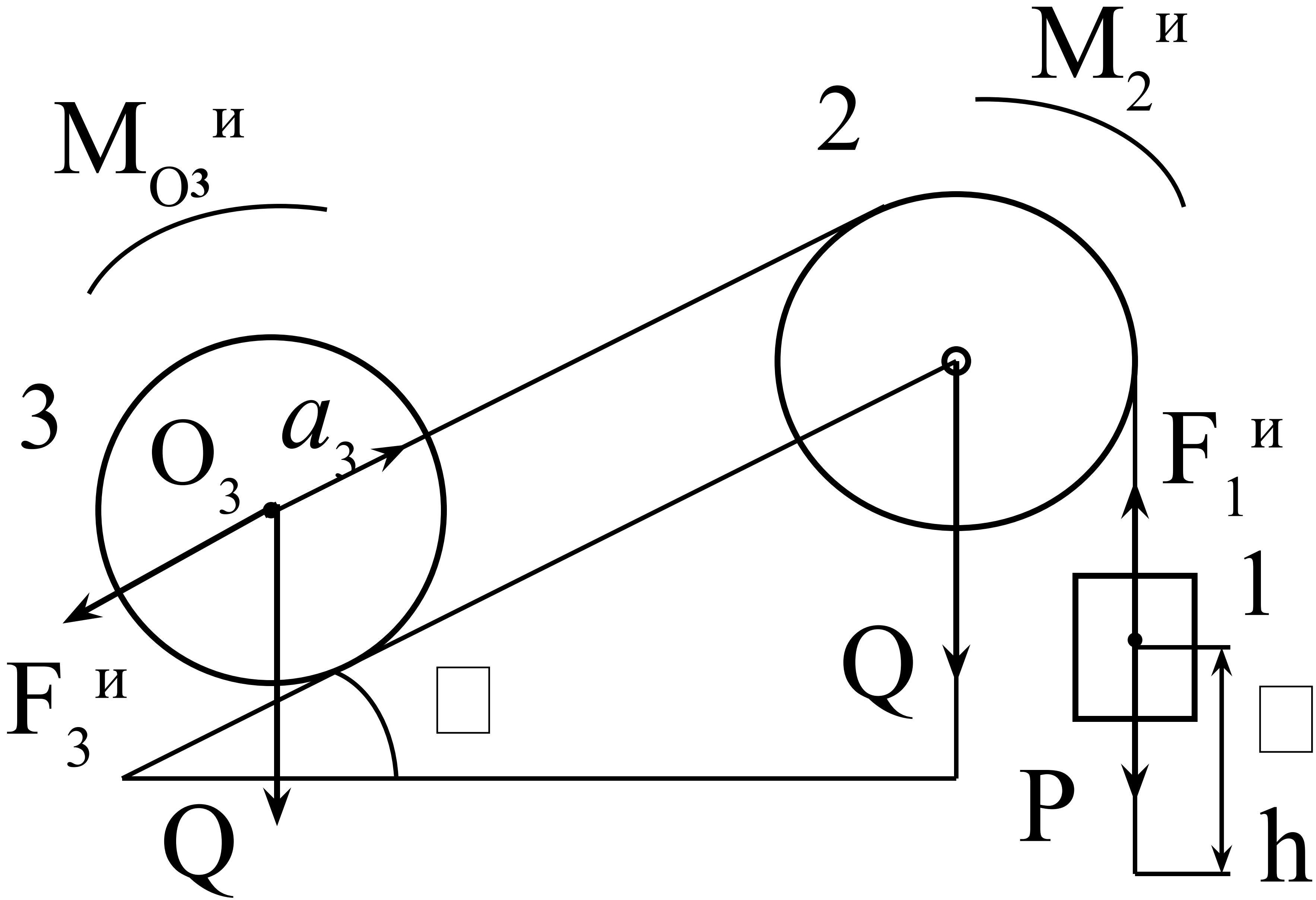
$$\boxed{\sum (\vec{F}_k - m_k \vec{a}_k)\,\delta\vec{r}_k = 0}$$

- *общее уравнение динамики.*

Пример:

$P, Q, Q,$ □ – дано

a_3 – найти



M2и
2
MO3и
3
O3
a3
F1и
1
Q
F3и
Q
P
h

УРАВНЕНИЕ ЛАГРАНЖА II РОДА

ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ:

$$\sum \left(\boldsymbol{F}_k - m_k \frac{d\boldsymbol{V}_k}{dt} \right) \delta \mathbf{r}_k = 0$$

$$\delta \mathbf{r}_k = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j} \delta q_j \quad \Rightarrow$$

s- число степеней свободы

$$\delta \mathbf{r}_k = \sum \left(\mathbf{F}_k - m_k \frac{d\mathbf{V}_k}{dt}\right) \cdot \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j} \delta q_j = 0$$

$$= \sum_{j=1}^{s} \sum_{k=1}^{n} \left(m_k \frac{d\mathbf{V}_k}{dt} - \mathbf{F}_k\right) \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j} \delta q_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{s}\left[\sum_{k=1}^{n} m_k \frac{d\mathbf{V}_k}{dt}\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j} - \sum_{k=1}^{n}\mathbf{F}_k\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j}\right]\delta q_j = 0$$

$$\sum \mathbf{F}_k \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j} = Q_j$$ -ОБОБЩЕННАЯ СИЛА

$$** \quad = \sum_{j=1}^{s}\left[\sum_{k=1}^{n} m_k \frac{d\mathbf{V}_k}{dt}\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j} - Q_j\right]\delta q_j = 0$$

$$* \quad m_k \frac{d\mathbf{V}_k}{dt}\frac{\partial\,\mathbf{r}_k}{\partial\,q_j} = \frac{d}{dt}(m_k \mathbf{V}_k \frac{\partial\,\mathbf{r}_k}{\partial\,q_j}) \quad - \; m_k \mathbf{V}_k \frac{d}{dt}\frac{\partial\,\mathbf{r}_k}{dq_j}$$

$$\mathbf{V}_k = \frac{d\mathbf{r}_k}{dt} = \frac{\partial\,\mathbf{r}_k}{\partial\,q_1}\dot{q}_1 + \ldots \frac{\partial\,\mathbf{r}_k}{\partial\,q_j}\dot{q}_j + \ldots \frac{\partial\,\mathbf{r}_k}{\partial\,q_s}\dot{q}_s + \frac{\partial\,\mathbf{r}_k}{\partial\,t}$$

$\dot{q} = \dfrac{dq}{dt}$ Обобщенная скорость.

Дифференцируем Уравнение

по обобщенной скорости $\dot{q}_j$

$$\frac{\partial \mathbf{V}_k}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j}$$

Изменим порядок дифференцирования

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j}\frac{d\mathbf{r}_k}{dt}, \text{где } \frac{d\mathbf{r}_k}{dt} = \mathbf{V}_{\mathrm{k}}$$

$$m_k \frac{d\mathbf{V}_k}{dt}\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\left(m_k \mathbf{V}_k \frac{\partial \mathbf{V}_k}{\partial \dot{q}_j}\right) - m_k \mathbf{V}_k \frac{\partial \mathbf{V}_k}{\partial q_j}$$

Вносим $m_k V_k$ под знак частной производной

$$m_k \mathbf{V}_k \frac{\partial \mathbf{V}_k}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\frac{1}{2} m_k V_k^2\right)$$

$$m_k \mathbf{V}_k \frac{\partial \mathbf{V}_k}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{1}{2} m_k V_k^2\right)$$

$$m_k \frac{d\mathbf{V}_k}{dt} \frac{d\mathbf{r}_k}{dq_j} = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\frac{1}{2} m_k V_k^2\right)\right] - \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{1}{2} m_k V_k^2\right)$$

$$\underset{j=1}{\overset{s}{\square}}\left(\underset{k=1}{\overset{n}{\square\square\square}}\left[\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{1}{2} m_k V_k^2\right) - \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{1}{2} m_k V_k^2\right)\right] \quad Q_j\right)\delta q_j = 0$$

$$\sum_{j=1}^{S}\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial q_j} \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k V_k^2}{2} - \frac{\partial}{\partial q_j} \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k V_k^2}{2} - Q_j\right)\delta q_j = 0$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{m_k V_k^2}{2} = T$$

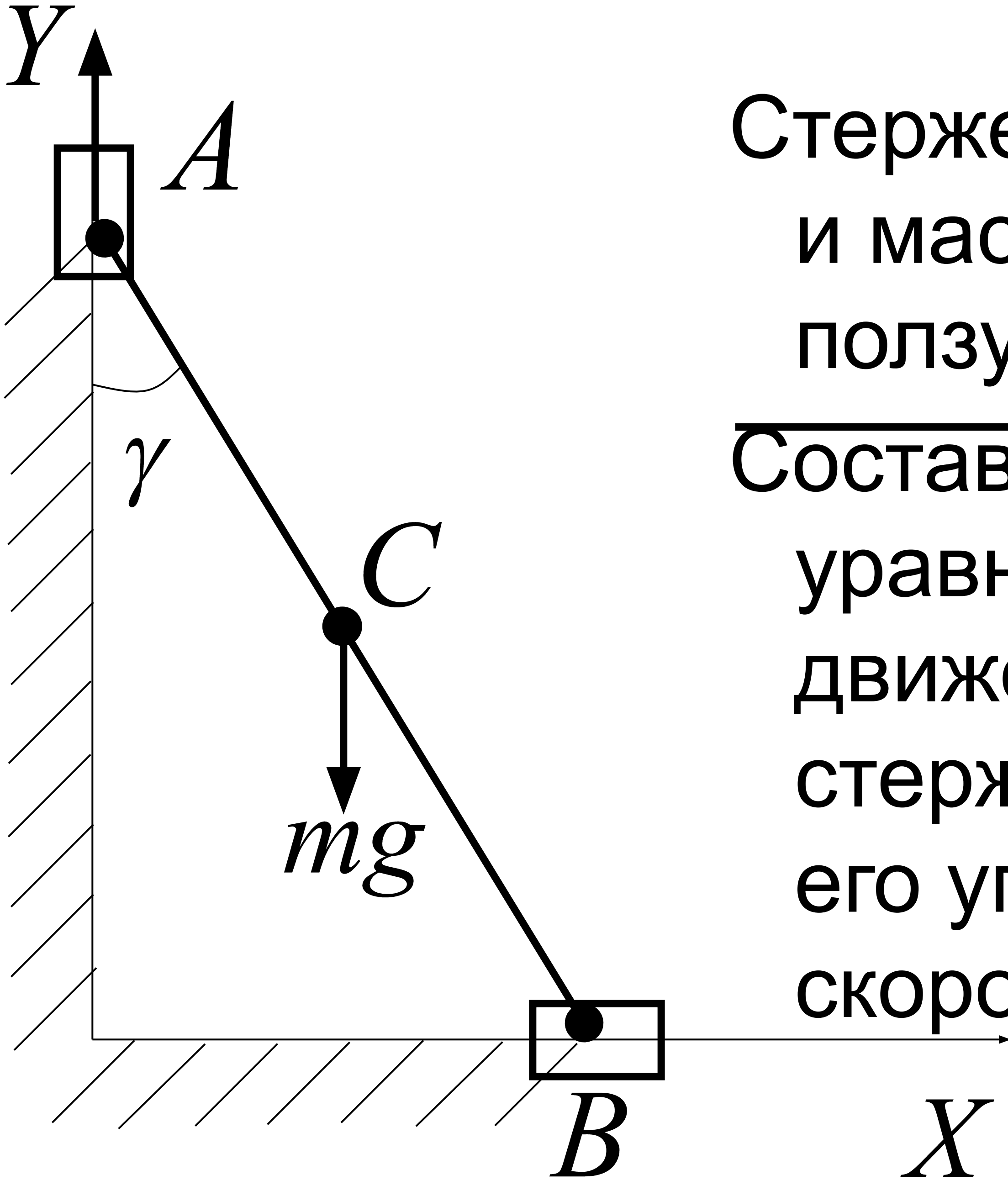
$$\sum_{j=1}^{S}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial T}{\partial q_j}-Q_j\right)\delta q_j=0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial T}{\partial q_j}=Q_j$$

ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ НЕОБХОДИМО:

- Изобразить на чертеже все активные силы, действующие на систему. Реакции идеальных связей можно не изображать. Силы трения присоединить к активным силам.
- Определить число степеней свободы и ввести обобщенные координаты

- Вычислить кинетическую энергию системы, выразив ее через обобщенные координаты и скорости
- Найти обобщенные силы системы
- Выполнить указанные в уравнениях Лагранжа действия



Стержень длиной $\boldsymbol{l}$ и массой $\boldsymbol{m}$. А и В ползуны

Составить уравнения движения стержня, найти его угловую скорость.

1) Силы – mg

2) Степень свободы – 1
обобщенная координата γ

3) $T = \frac{1}{2} m V_C^2 + \frac{1}{2} I_C \dot{\gamma}^2 \qquad I_C = \frac{1}{12} m l^2$

$$X_C = \frac{1}{2} l \sin\gamma \qquad Y_C = \frac{1}{2} l \cos\gamma$$

$$\dot{X}_C = \frac{1}{2} l \dot{\gamma} \cos\gamma \qquad \dot{Y}_C = -\frac{1}{2} l \dot{\gamma} \sin\gamma$$

$$v_C^2 = \dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2 = \frac{1}{4} l^2 \dot{\gamma}^2$$

$$T = \frac{1}{2} m \frac{l^2}{4} \dot{\gamma}^2 + \frac{1}{2} \bullet \frac{1}{12} m l^2 \dot{\gamma}^2 = \frac{1}{6} m l^2 \dot{\gamma}^2$$

4) Обобщенные силы

Потенциальная энергия $\varPi = \frac{1}{2} mgl \cos\gamma$

$$Q = -\frac{\partial \varPi}{\partial \gamma} = -\frac{1}{2} mgl \sin\gamma$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\gamma}}-\frac{\partial T}{\partial \gamma}=Q$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\gamma}}=\frac{1}{3}ml^{2}\dot{\gamma}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\gamma}}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{1}{3}ml^{2}\dot{\gamma}\right)=\frac{1}{3}ml^{2}\ddot{\gamma}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \gamma} = 0$$ (*кинетическая энергия* не зависит от угла)

$$\frac{1}{3} m l^2 \ddot{\gamma} = \frac{1}{2} m\, l g \sin \gamma$$

$$\ddot{\gamma} = \frac{3g}{2l} \sin \gamma$$

До множим уравнение $d\gamma$

$$\ddot{\gamma}\, d\gamma = \frac{3g}{2l} \sin\gamma d\gamma$$

$$\ddot{\gamma}\, d\gamma = \frac{d\,\dot{\gamma}}{dt} d\gamma = \dot{\gamma}\, d\,\dot{\gamma} = d\left(\frac{\dot{\gamma}^{2}}{2}\right)$$

$$d\left(\frac{\dot{\gamma}^{2}}{2}\right) = -\frac{3g}{2l} d\cos\gamma$$

Интегрируем

$$\frac{\dot{\gamma}^2}{2} = -\frac{3g}{2l}\, d\cos\gamma + C$$

Если в начальный момент времени

$$\gamma = \gamma_0, \dot{\gamma} = 0, \quad \textit{то}$$

$$C = 3\frac{g}{l}\cos\gamma_0$$

Получаем угловую скорость стержня

$$\dot{\gamma}^2 = \frac{3g}{2l}\left(\cos\gamma_0 - \cos\gamma\right)$$