Государственное бюджетное
образовательное учреждение
высшего образования
«Нижегородский государственный
инженерно-экономический университет»

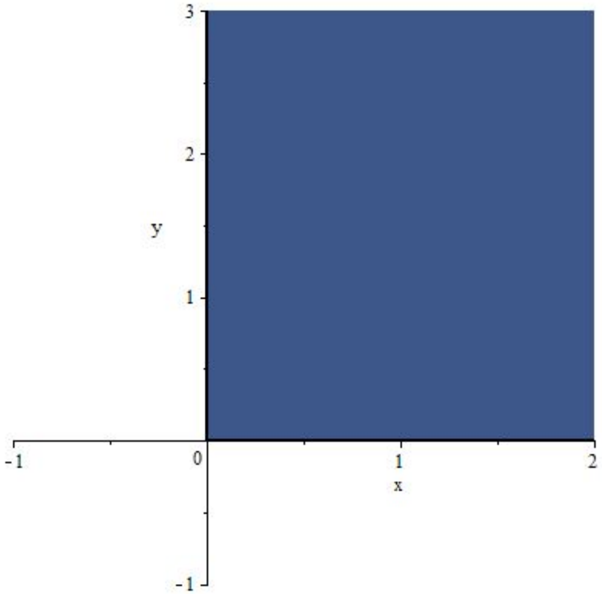
Справочный материал к практике 19 по дисциплине «Математика» для студентов направления подготовки 09.03.02 «Информационные системы и технологии»

Решение задач линейного программирования графическим методом

Составитель:
ст. преподаватель кафедры «Физико-математические науки» Черемухин А. Д.

Пример 1. Решите графически задачу линейного программирования на максимум, если целевая функция Z(X) = 8x+9y, а ограничения выражаются системой неравенств $\{0 \le x, 0 \le y, 2y + 4x \le 5, 7y - 7x \le 7\}$

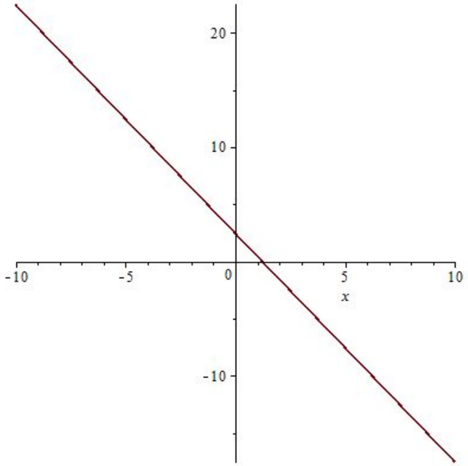
1. Будем рисовать. Исходя из первых двух ограничений, работать будем в первом квадранте. Рисуем схематически



2. Рассмотрим второе ограничение. Преобразуем его $2 \cdot y + 4 \cdot x \le 5 \Rightarrow 2 \cdot y \le 5 - 4 \cdot x \Rightarrow y \le \frac{5}{2} - 2 \cdot x$

Нарисуем прямую, соответствующую равенству

$$y = \frac{5}{2} - 2 \cdot x \left(x = 0 \rightarrow y = \frac{5}{2}; x = 2 \rightarrow y = \frac{5}{2} - 2 \cdot 2 = \frac{1}{2} \right)$$



Прямая делит плоскость на две полуплоскости. Неравенство верно только в одной. Выясним, что

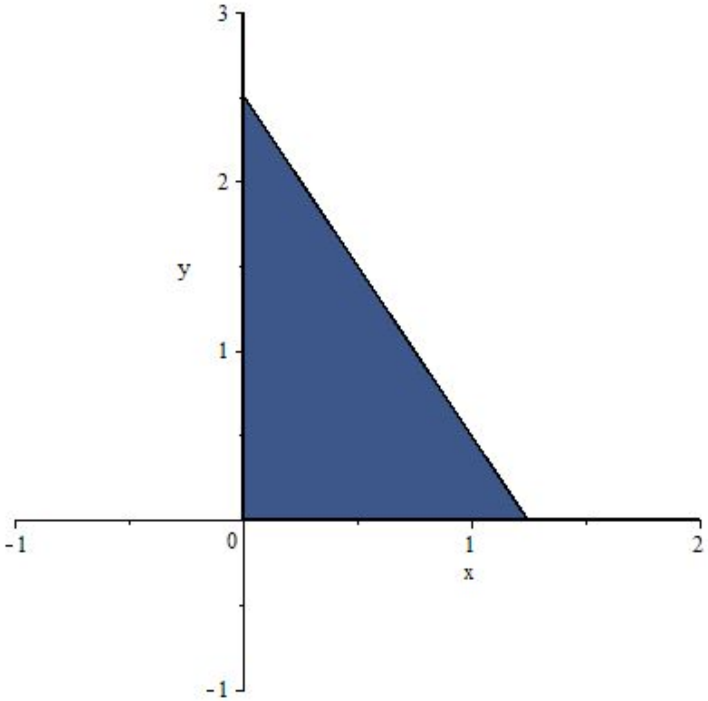
$$y \le \frac{5}{2} - 2 \cdot x \rightarrow (x = 0, y = 0) \rightarrow 0 \le \frac{5}{2} - 2 \cdot 0 \Rightarrow 0 \le \frac{5}{2}$$

– верно.

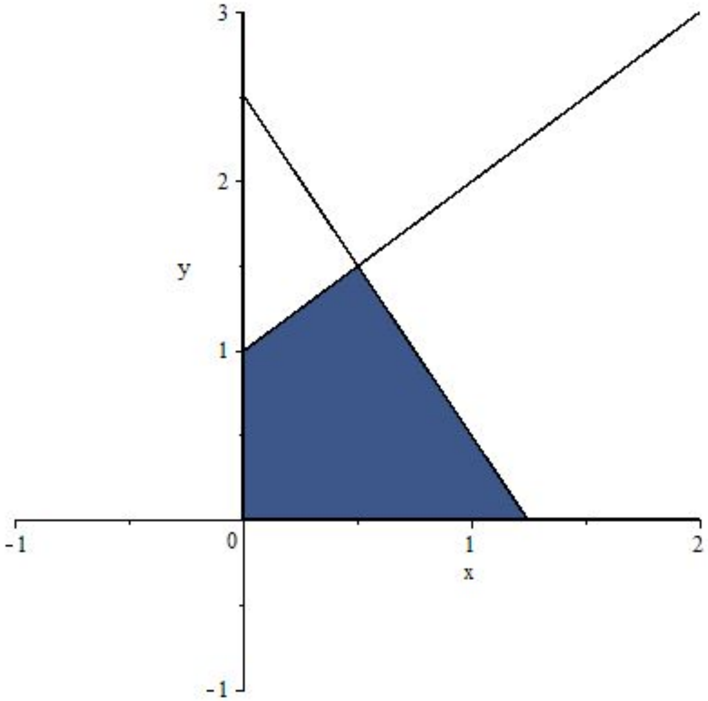
Значит, неравенство верно в нижней полуплоскости (точка (0;0) находится там)

Пример 1. Решите графически задачу линейного программирования на максимум, если целевая функция Z(X) = 8x+9y, а ограничения выражаются системой неравенств $\{0 \le x, 0 \le y, 2y + 4x \le 5, 7y - 7x \le 7\}$

2. Итого, после третьего ограничения рисунок выглядит так

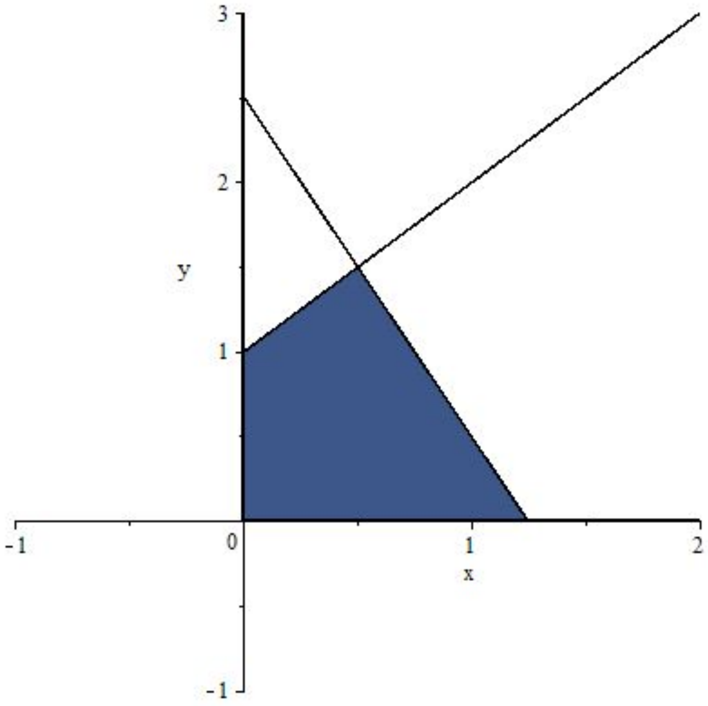


3. А после четвертого - так



Пример 1. Решите графически задачу линейного программирования на максимум, если целевая функция Z(X) = 8x+9y, а ограничения выражаются системой неравенств $\{0 \le x, 0 \le y, 2y + 4x \le 5, 7y - 7x \le 7\}$

Итого, наша система ограничений выглядит так:



Фигура замкнута, значит, решение есть всегда. И оно достигается в вершине этого многоугольника.

Теперь приравняем целевую функцию к двум значениям – пусть это будет 0 и 10. И выпишем функцию

$$8 \cdot x + 9 \cdot y = 0 \Rightarrow 9 \cdot y = -8 \cdot x \Rightarrow y = \frac{-8 \cdot x}{9}$$

$$8 \cdot x + 9 \cdot y = 10 \Rightarrow 9 \cdot y = 10 - 8 \cdot x \Rightarrow y = \frac{10 - 8 \cdot x}{9}$$

И нарисуем обе прямых, соответствующих разным значениям ЦФ

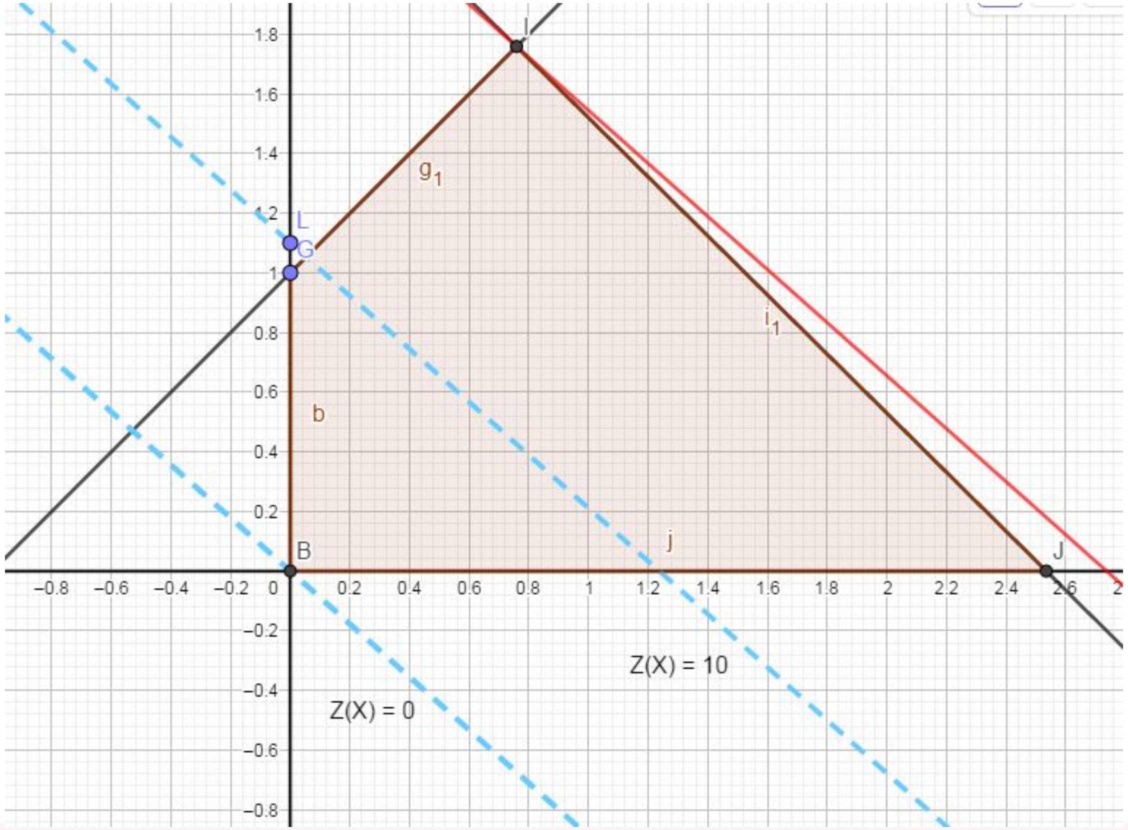
Пример 1. Решите графически задачу линейного программирования на максимум, если целевая функция Z(X) = 8x+9y, а ограничения выражаются системой неравенств $\{0 \le x, 0 \le y, 2y + 4x \le 5, 7y - 7x \le 7\}$

3. Рисунок с разными ЦФ

Видно, что чем больше целевое значение функции, тем прямая целевой функции проходит «выше». Значит, для достижения максимума прямая должна пройти максимально высоко – это положение обозначено красным

Соответственно, максимальное значение достигается в точке I – там, где пересекаются прямые, обозначающие 3 и 4 ограничения.

А минимальное значение достигается в точке B – там прямая максимально низка

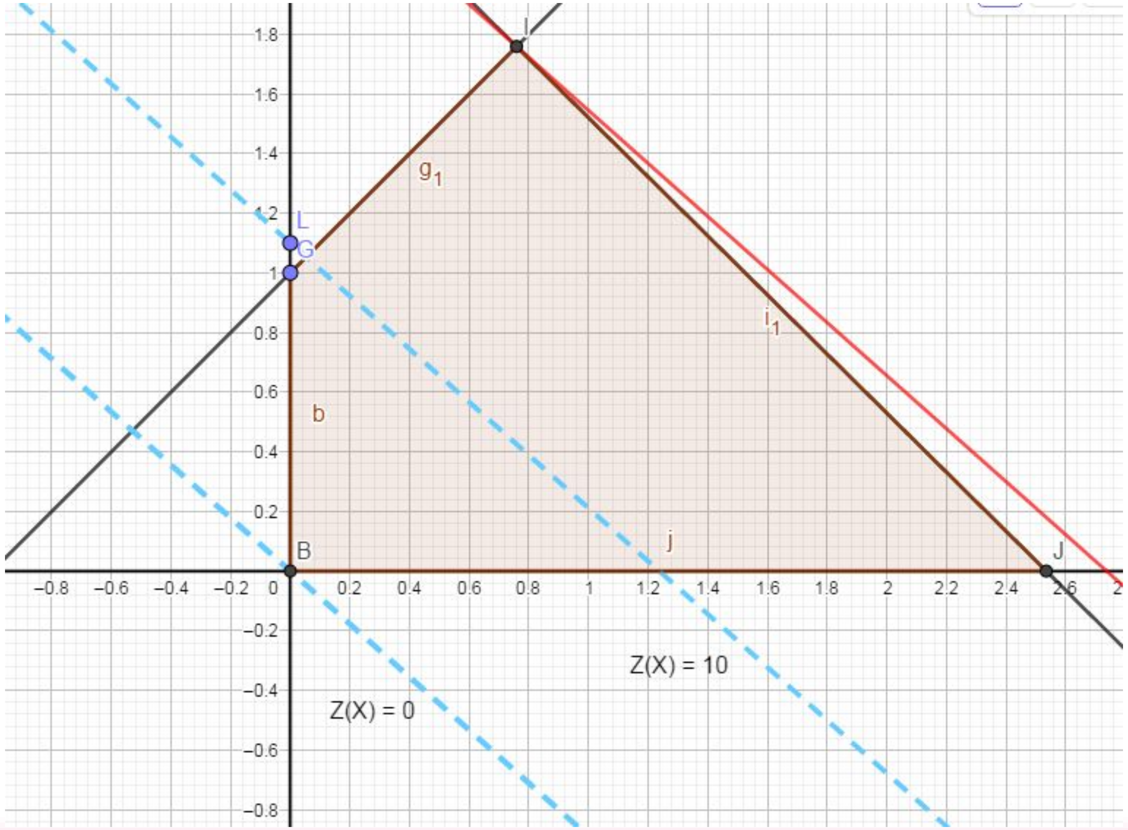


Пример 1. Решите графически задачу линейного программирования на максимум, если целевая функция Z(X) = 8x+9y, а ограничения выражаются системой неравенств $\{0 \le x, 0 \le y, 2y + 4x \le 5, 7y - 7x \le 7\}$

4. Найдем координаты точки I

$$\begin{cases} y = \frac{5}{2} - 2 \cdot x \\ 7 \cdot y - 7 \cdot x = 7 \end{cases} \Rightarrow \left\{ x = \frac{1}{2}, y = \frac{3}{2} \right\} \Rightarrow Z(X) = 8 \cdot x + 9 \cdot y = \frac{8 \cdot 1}{2} + \frac{9 \cdot 3}{2} = \frac{35}{2}$$

Задача решена



Различные исключения:

1. Задача решения не имеет, поскольку система ограничения несовместна (на графике просто нет области, соответствующей всем ограничениям)

2. Задача имеет бесконечно много решений, если целевая функция совпадет с одной из сторон многоугольника ограничений

3. Задача не имеет решения ввиду неограниченности системы ограничений (на графике она представляет собой незамкнутую фигуру, и целевая функция «скользит» неограниченно в бесконечность по одной из сторо)