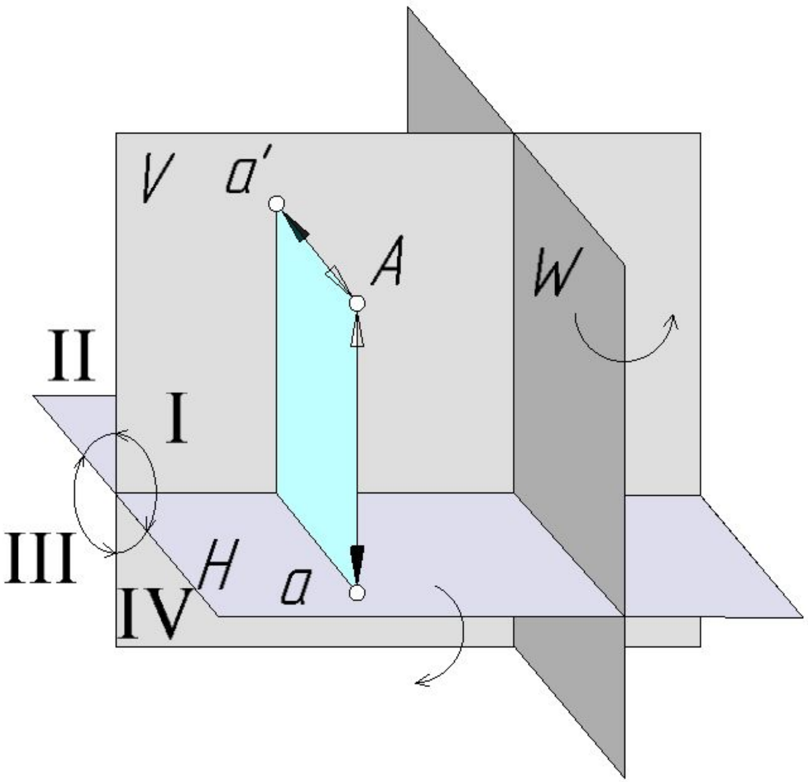
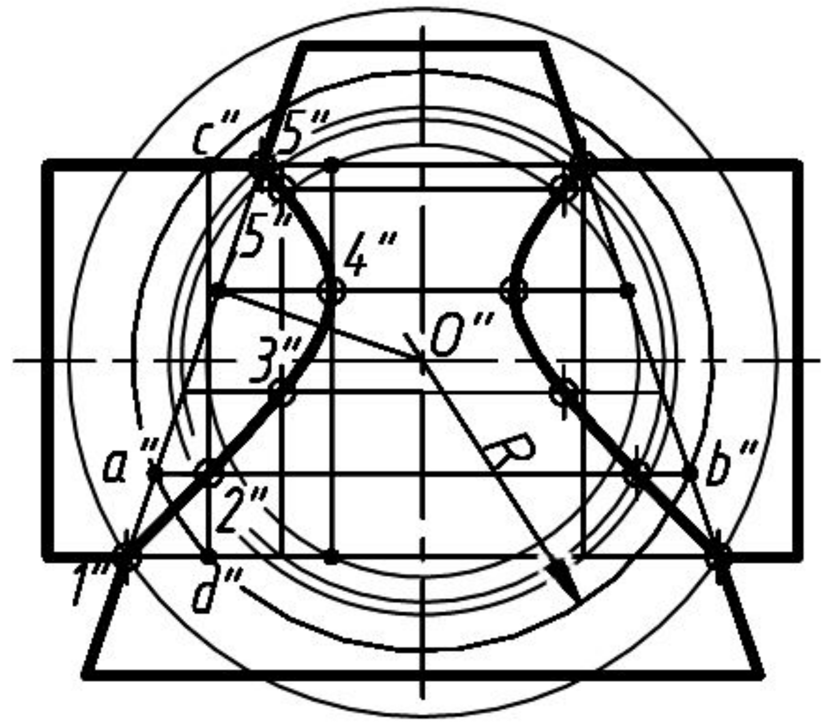
Предмет «Начертательная геометрия»





ВВЕДЕНИЕ

- Чертеж – это своеобразный язык, с помощью которого, используя всего лишь точки, линии и ограниченное число геометрических знаков и цифр, человек имеет возможность изобразить на поверхности геометрические фигуры (машины, приборы, инженерные сооружения и т.д.).

- Этот графический язык является интернациональным, он понятен любому технически грамотному человеку, независим от того, на каком языке он говорит.

- Начертательная геометрия (НГ) составляет теоретическую базу для составления чертежа. Говорят, “***если чертеж – язык техники, то Начертательная Геометрия – грамматика этого языка***”.

Предмет начертательной геометрии.

- Начертательная геометрия – раздел геометрии. Предметом НГ является изложение и обоснование способов изображения пространственных фигур (линий, поверхностей и т.д.) и способов решения задач геометрического характера по заданным изображениям данной фигуры.
- Цели НГ:

- Научиться строить изображения

- Научиться читать эти изображения

- Научиться решать задачи геометрического характера на этих изображениях

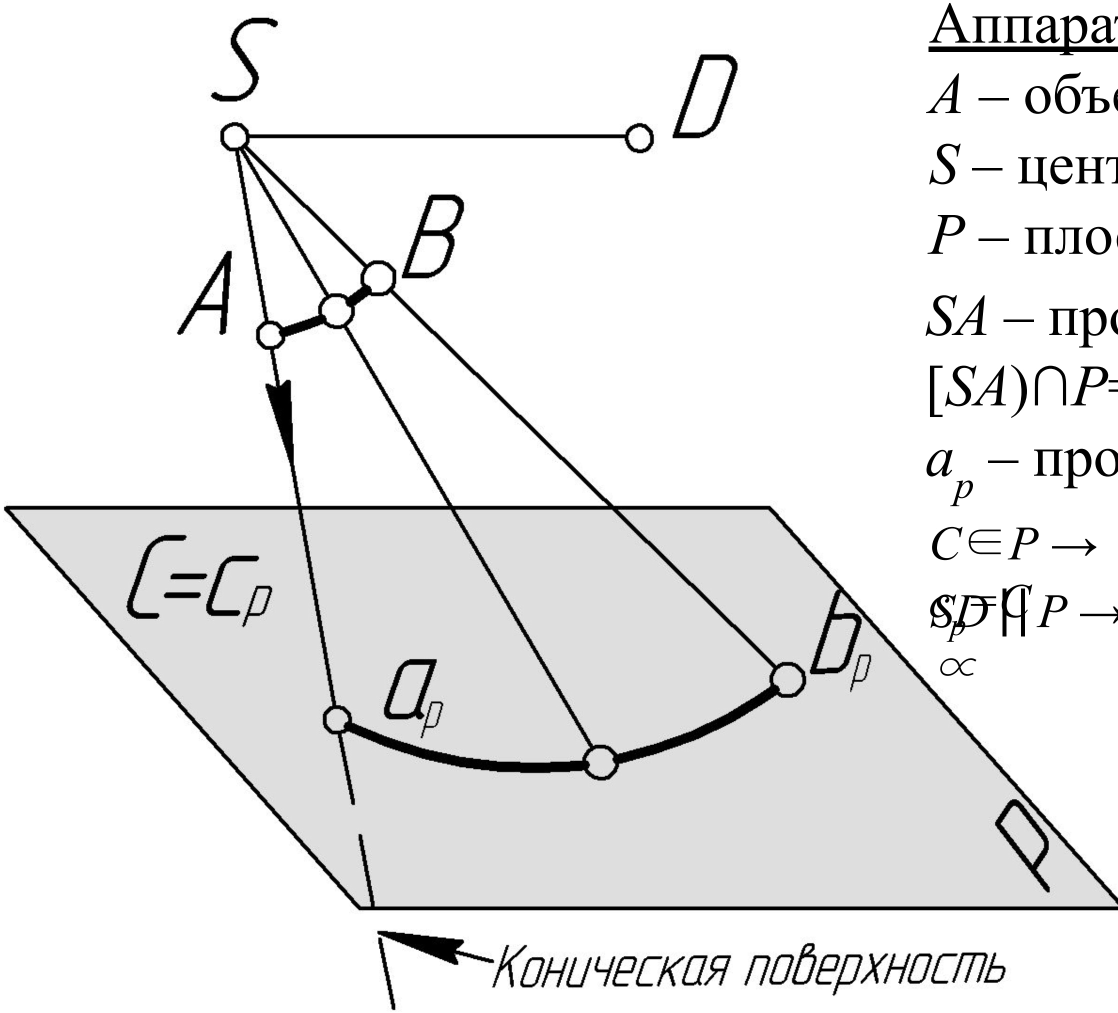
- *Развивать пространственное воображение!!!*

<u>Образование проекций.</u>
<u>Методы проецирования.</u>

- *В курсе НГ под проецированием понимается отображение пространственного образа на плоскость, которую называют плоскостью проекций (ПП).*

Центральное проецирование

(Коническое)



Аппарат проецирования:

A – объект проецирования

S – центр проецирования

P – плоскость проекций

SA – проецирующий луч

$[SA)\cap P=a_p$

a_p – проекция т. A на плоскости P

$C \in P \rightarrow c_p = C$

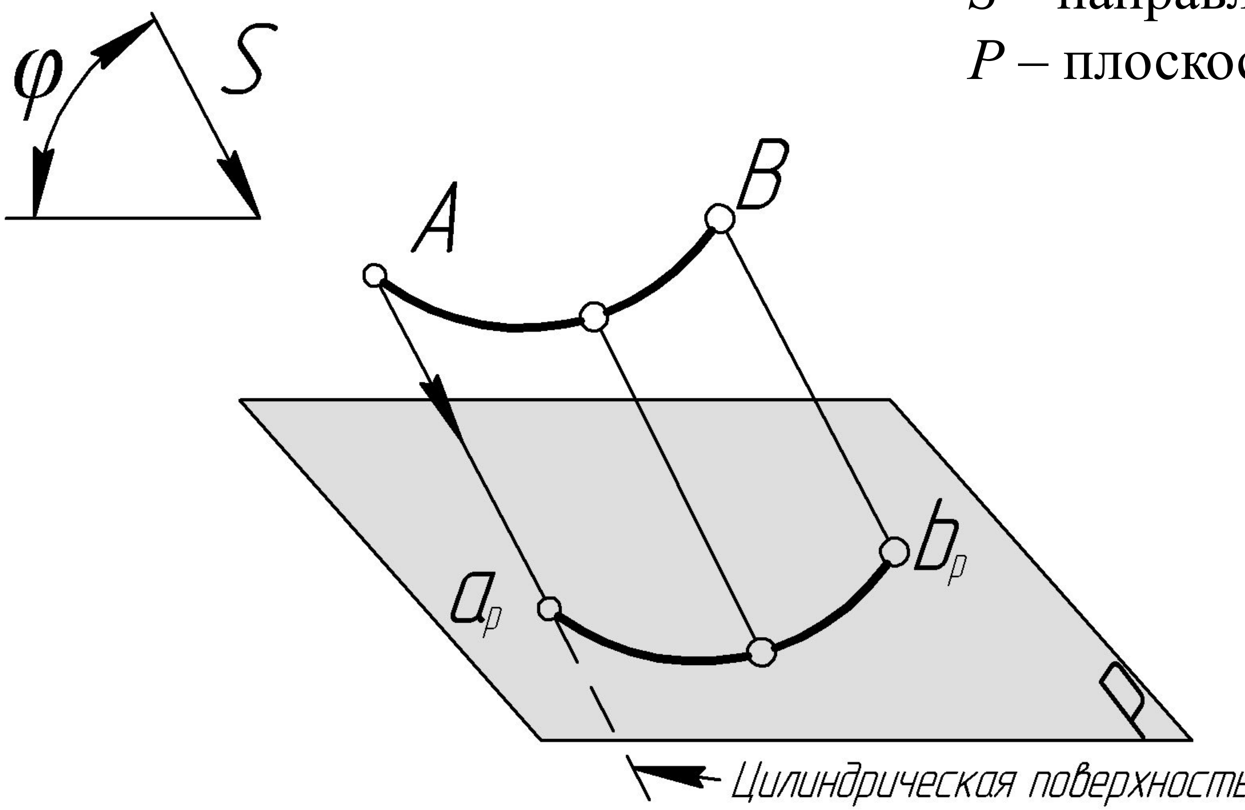
$SD \parallel P \rightarrow d_p = \propto$

Свойства проецирования:

- Проекцией точки называют точку пересечения проецирующего луча с ПП.
- Каждая точка пространства имеет единственную свою проекцию на ПП.
- Каждая точка на ПП может быть проекцией множества точек пространства, расположенных на проецирующем луче.
- !!! Одна проекция точки не определяет однозначно ее положения в пространстве.

Параллельное проецирование
(Цилиндрическое)
(Частный случай центрального проецирования – $S \to \infty$)

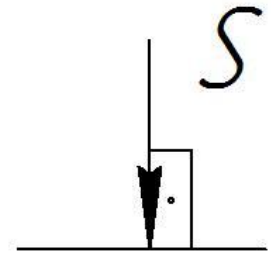
<u>Аппарат проецирования</u>:
A – объект проецирования
S – направление проецирования
P – плоскость проекций

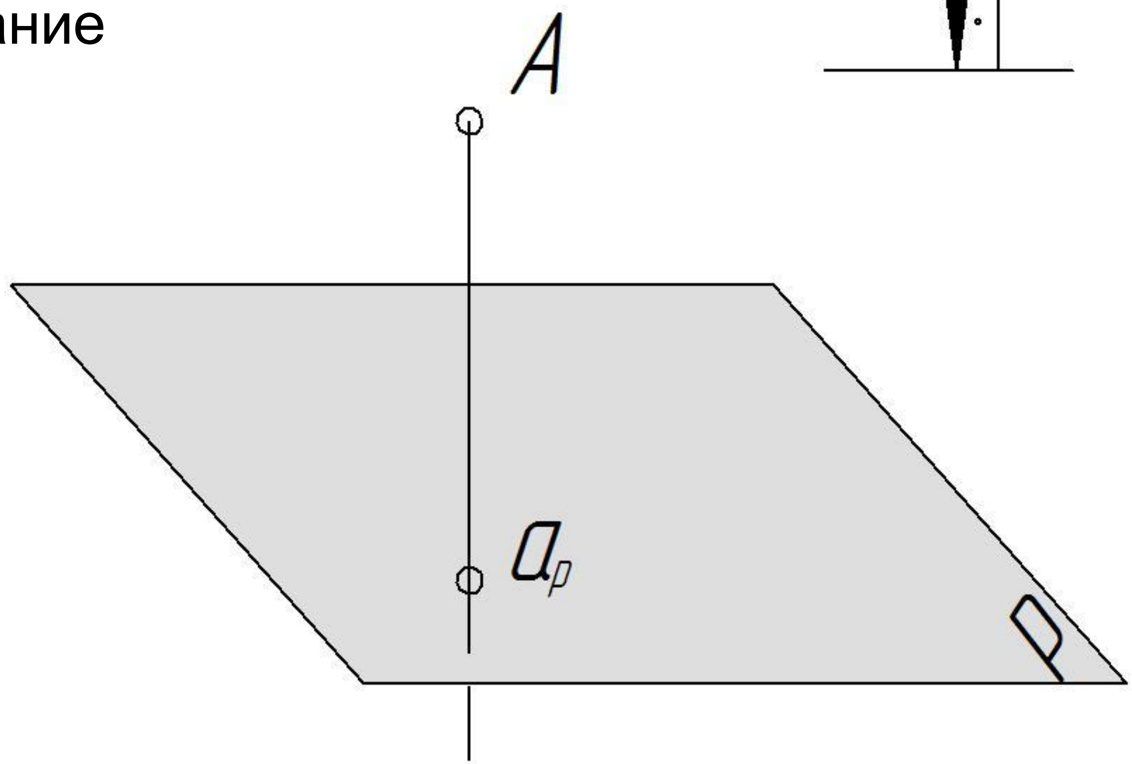


Параллельное прямоугольное проецирование

$\varphi \neq 90^0$ - косоугольное проецирование

$\varphi = 90^0$ - прямоугольное проецирование





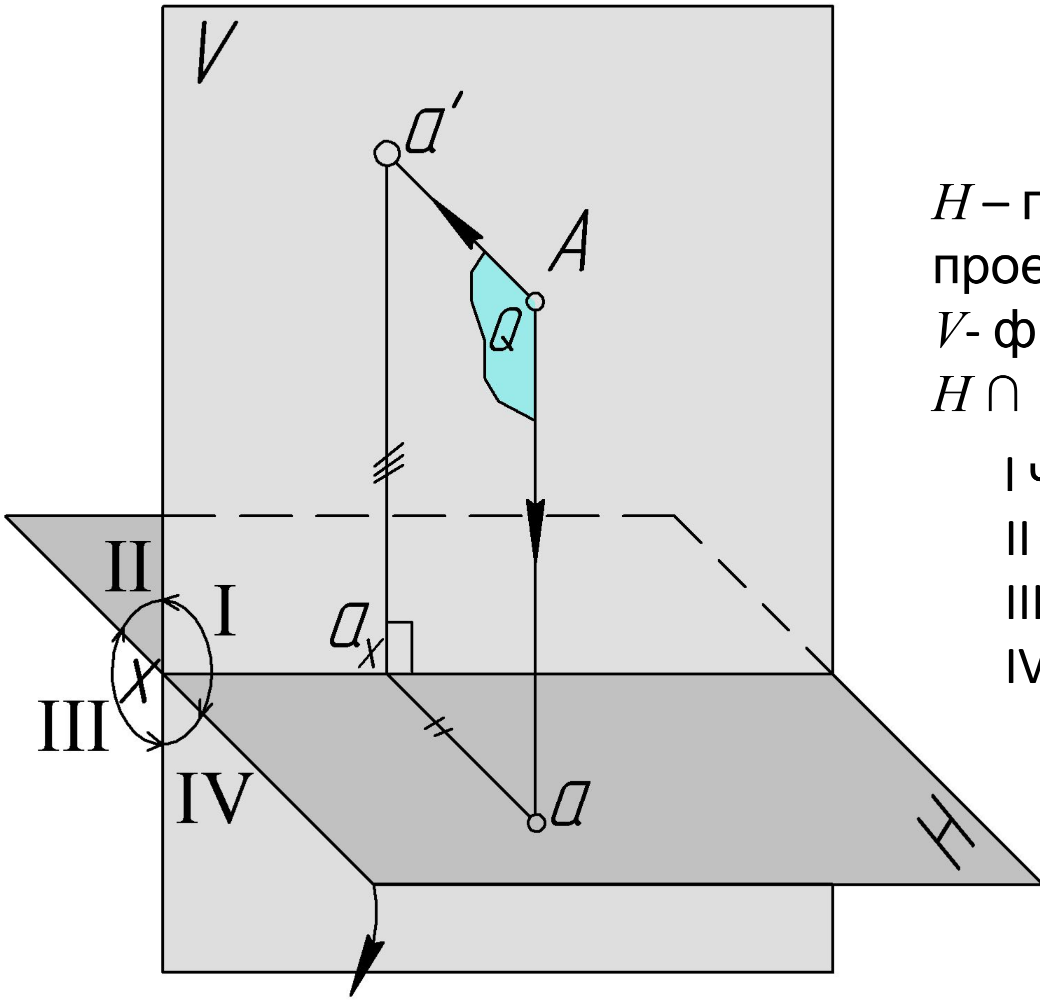
!!! Все в НГ и Черчении в основном основано на методе прямоугольного параллельного проецирования.

Проецирование точки на две взаимно-перпендикулярные ПП

- Для получения ортогонального чертежа обладающего свойством “обратимости” необходимо иметь, по крайней мере, две связанные между собой ортогональные проекции объекта.

- В трудах, опубликованных Г. Монжем в 1799 году, предлагалось использовать систему двух взаимно перпендикулярных плоскостей проекций.

Проецирование точки на две взаимно-перпендикулярные ПП



H – горизонтальная плоскость проекций

V- фронтальная плоскость проекций

$H \cap V = X$ – ось проекций

I четверть – над H перед V;

II четверть – над H за V;

III четверть - под H за V;

IV четверть - под H перед V;

a - горизонтальная проекция т. A

a' - фронтальная проекция т. A

$Aa \cap Aa' = Q$; $Aa \perp H$ и $Aa' \perp V$ $\Rightarrow Q \perp H$ и $Q \perp V$ $\Rightarrow Q \perp X$ $\Rightarrow$ $aa_x \perp X$ и $a'a_x \perp X$

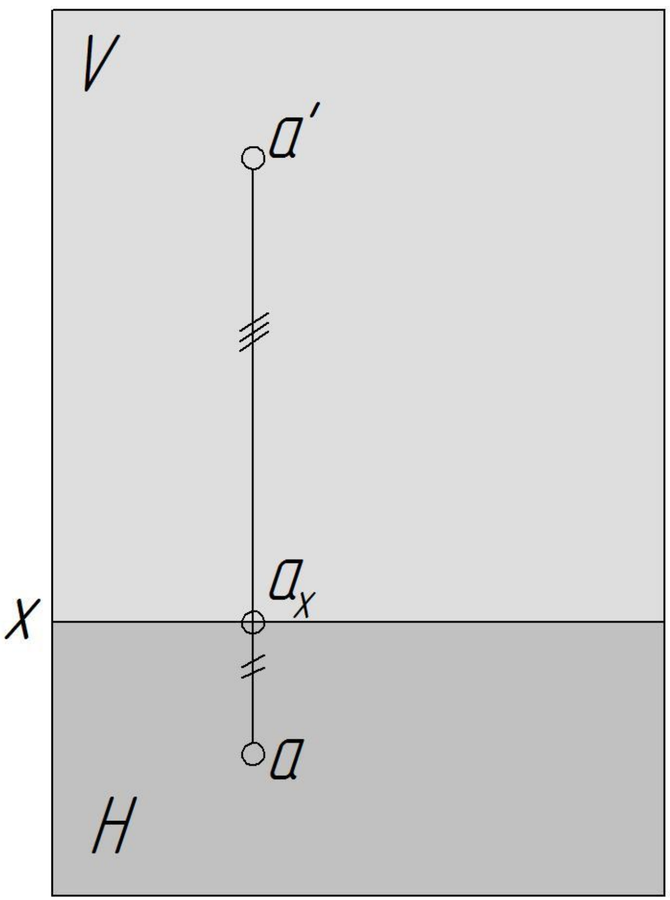
- *<u>Теорема</u>*: проекции некоторой точки получаются расположенными на прямых перпендикулярных к оси проекций и пересекающих эту ось в одной и той же точке - a_x

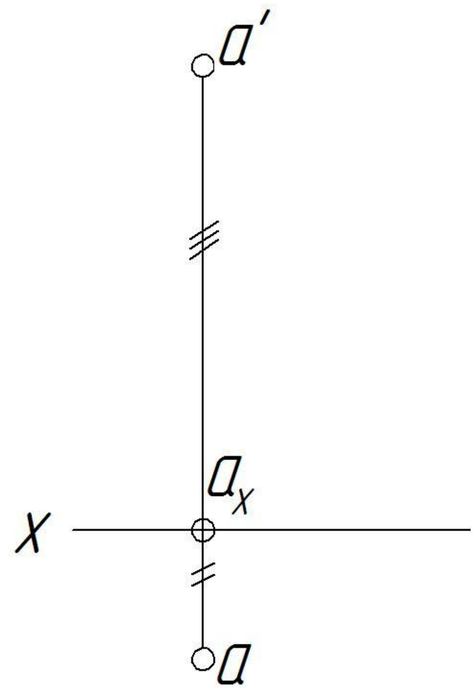
- Для получения изображений на плоскости Г. Монж предложил совместить ПП в одну плоскость, совпадающую с плоскостью чертежа – ***эпюра Монжа***.

При этом фронтальная плоскость проекций остается неподвижной, а горизонтальная вращением вокруг оси X совмещается с плоскостью чертежа. (Обратим внимание: задняя полуплоскость H при этом поднимается.)

- При этом фронтальная и горизонтальная проекции точки располагаются на одной прямой, перпендикулярной к оси проекций $\boldsymbol{aa'}$- линия связи: $\boldsymbol{aa_x \perp X}$ **и** $\boldsymbol{a'a_x \perp X}$

Проецирование точки на две взаимно-перпендикулярные ПП

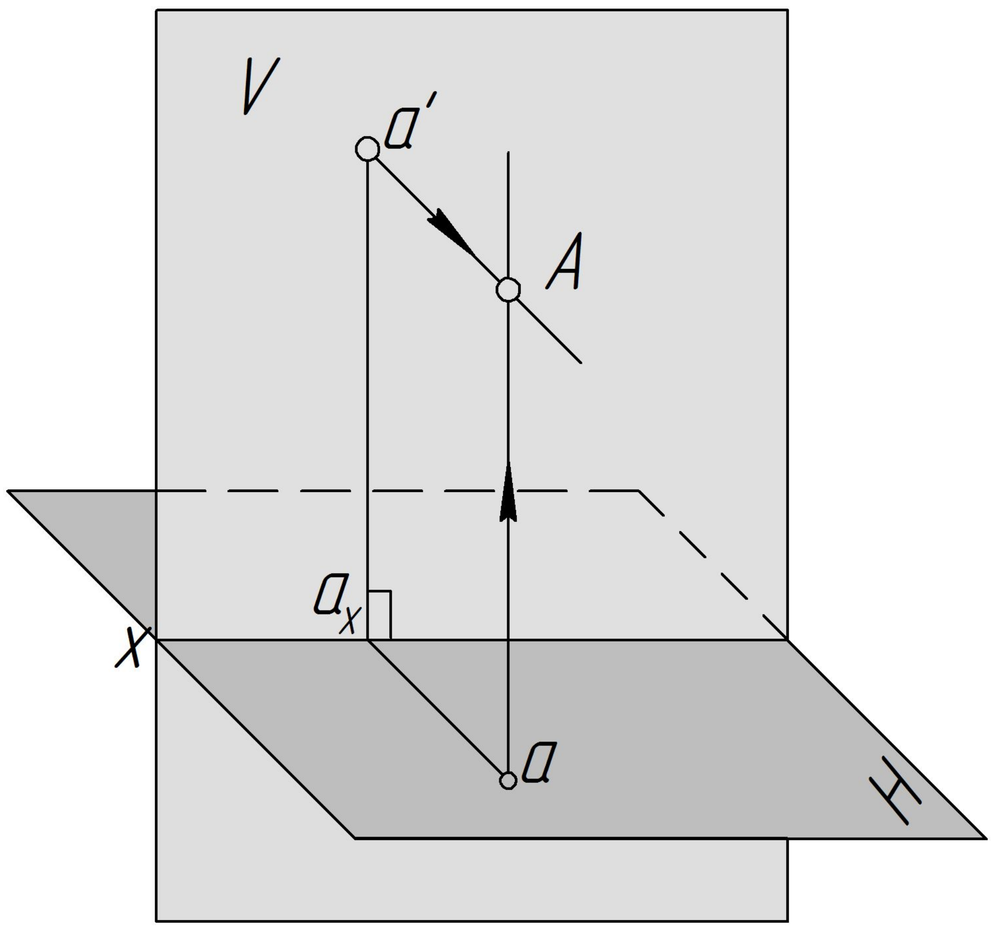




aa_x – расстояние точки до плоскости V

$a'a_x$ – расстояние точки до плоскости H

Если восставить перпендикуляр в точке a к горизонтальной плоскости проекции, а в точке a' – к фронтальной плоскости проекций, то пересечение этих перпендикуляров определит положение точки A в данной системе плоскостей проекций:
две проекции точки однозначно определяют ее положение в пространстве.



Проецирование точки на три взаимно-перпендикулярные ПП

В практике для составления чертежа изделия зачастую необходимо не две, а три и более число плоскостей проекций. Помимо горизонтальной и фронтальной плоскостей проекций зачастую используется и третья плоскость проекций, перпендикулярная к плоскостям V и H - *профильная плоскость проекций* W.

Для получения проекций точки A в системе трех взаимно-перпендикулярных плоскостей проекций необходимо осуществить прямоугольное проецирование на плоскости H, V и W.

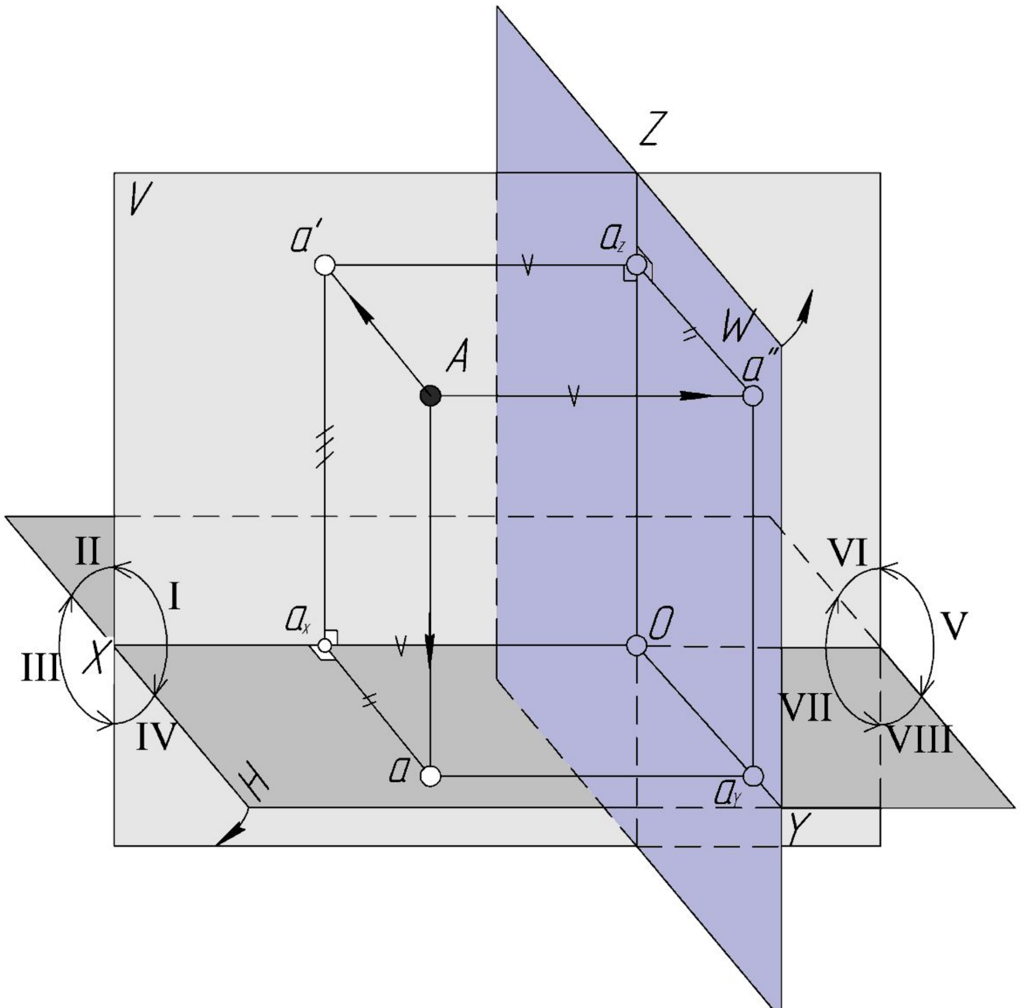
W – профильная плоскость проекций

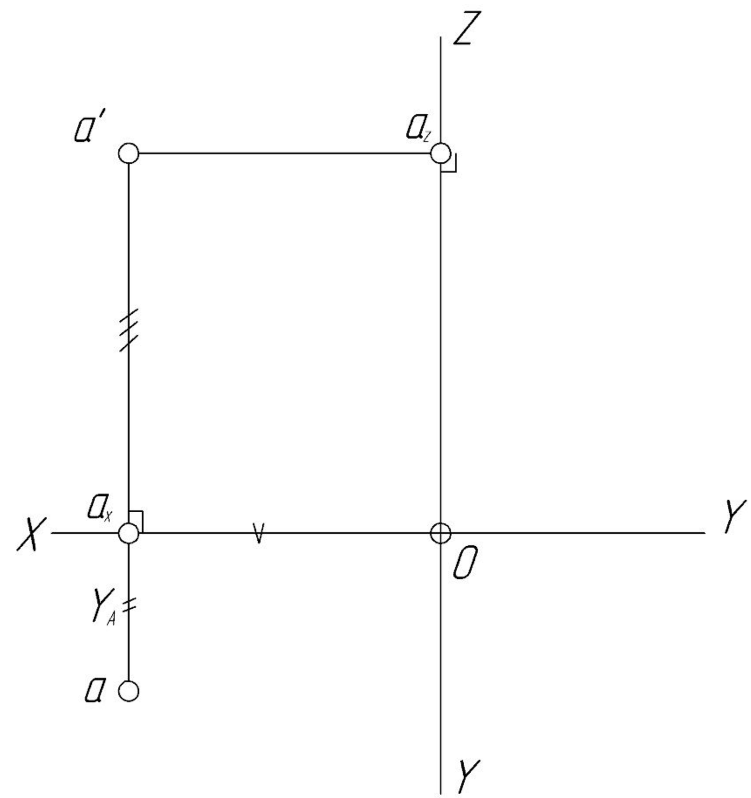
$H \cap V = X$ – ось проекций (абсцисс)

$H \cap W = Y$ – ось проекций (ординат)

$V \cap W = Z$ – ось проекций (аппликат)

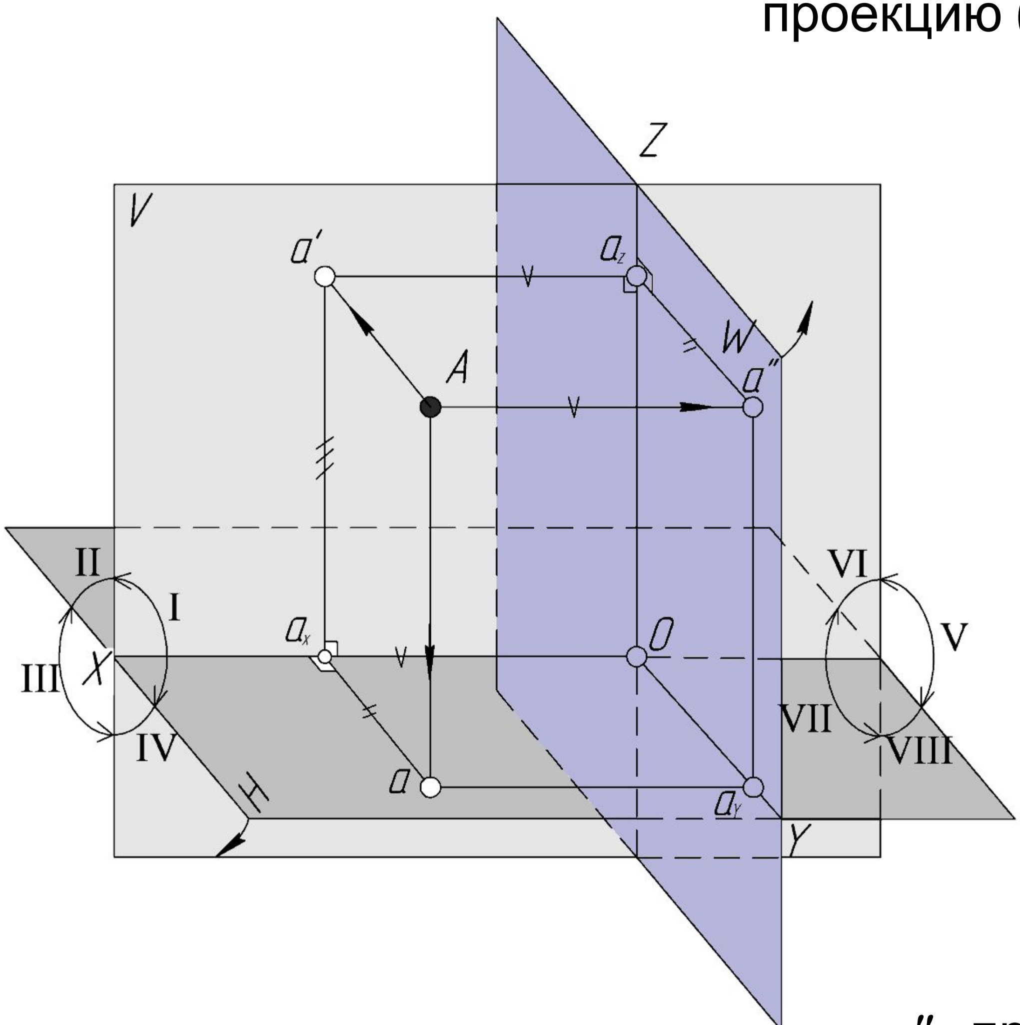
Плоскости V, H и W делят пространство на 8 *октантов*.

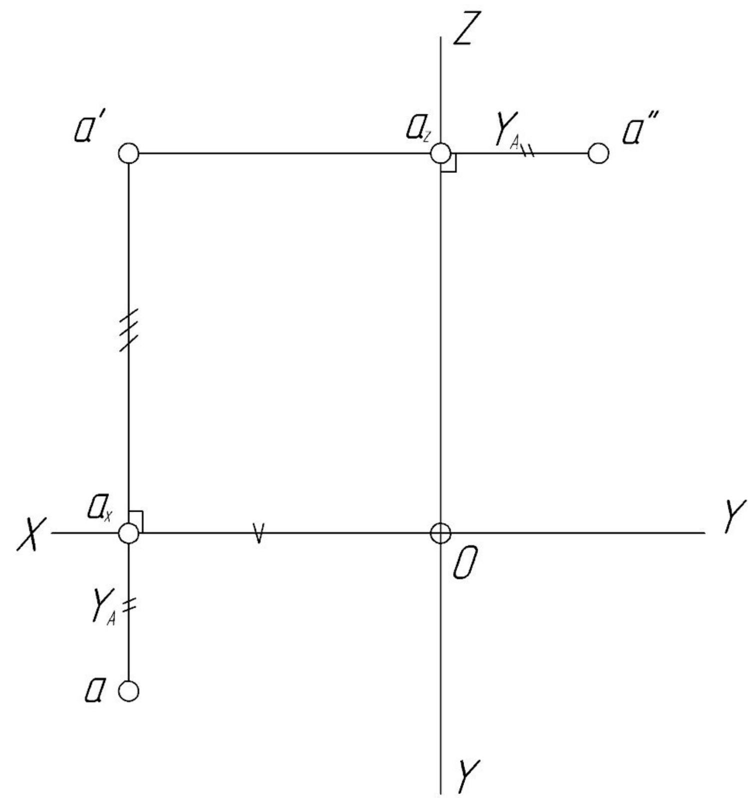




При переходе к чертежу горизонтальная и профильная плоскости проекций совмещаются с фронтальной путем вращения вокруг соответствующих осей.

По двум заданным проекциям (a и a') всегда можно построить недостающую ее третью проекцию (a''), т.к. $\boldsymbol{a''a_z = aa_x}$





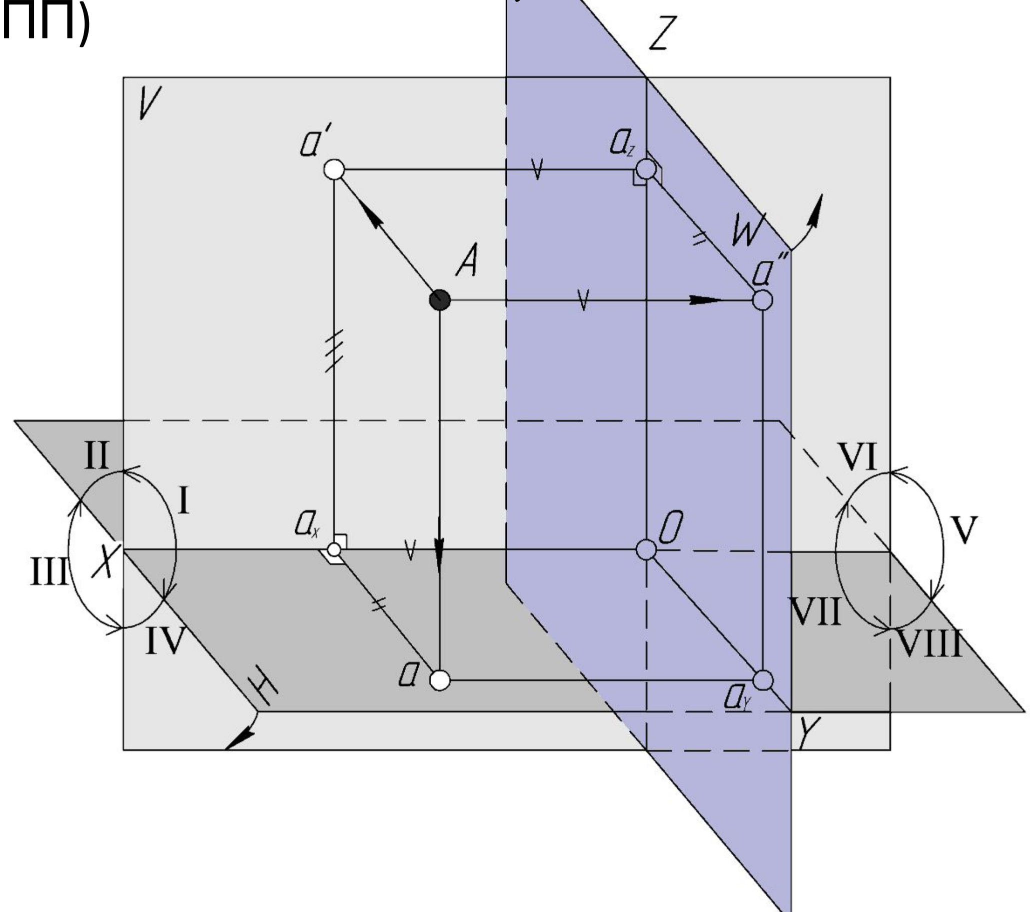
a'' - профильная проекция т.

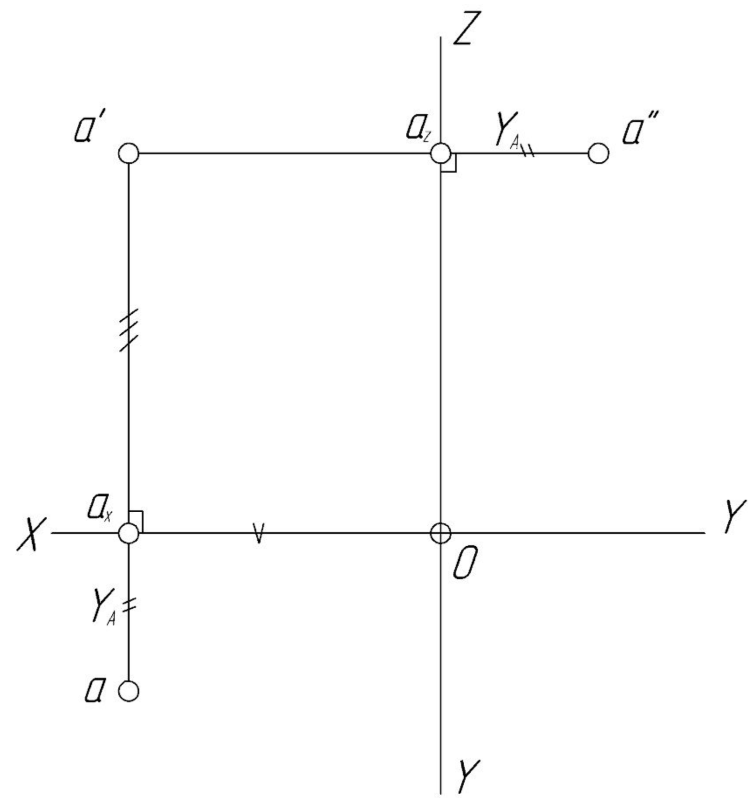
Положение т. A относительно плоскостей проекций определяется расстоянием этой точки до соответствующей плоскости проекций:

$X_A = Aa'' = a'a_z = aa_y = 0a_x$ - абсцисса (расстояние точки до профильной ПП)

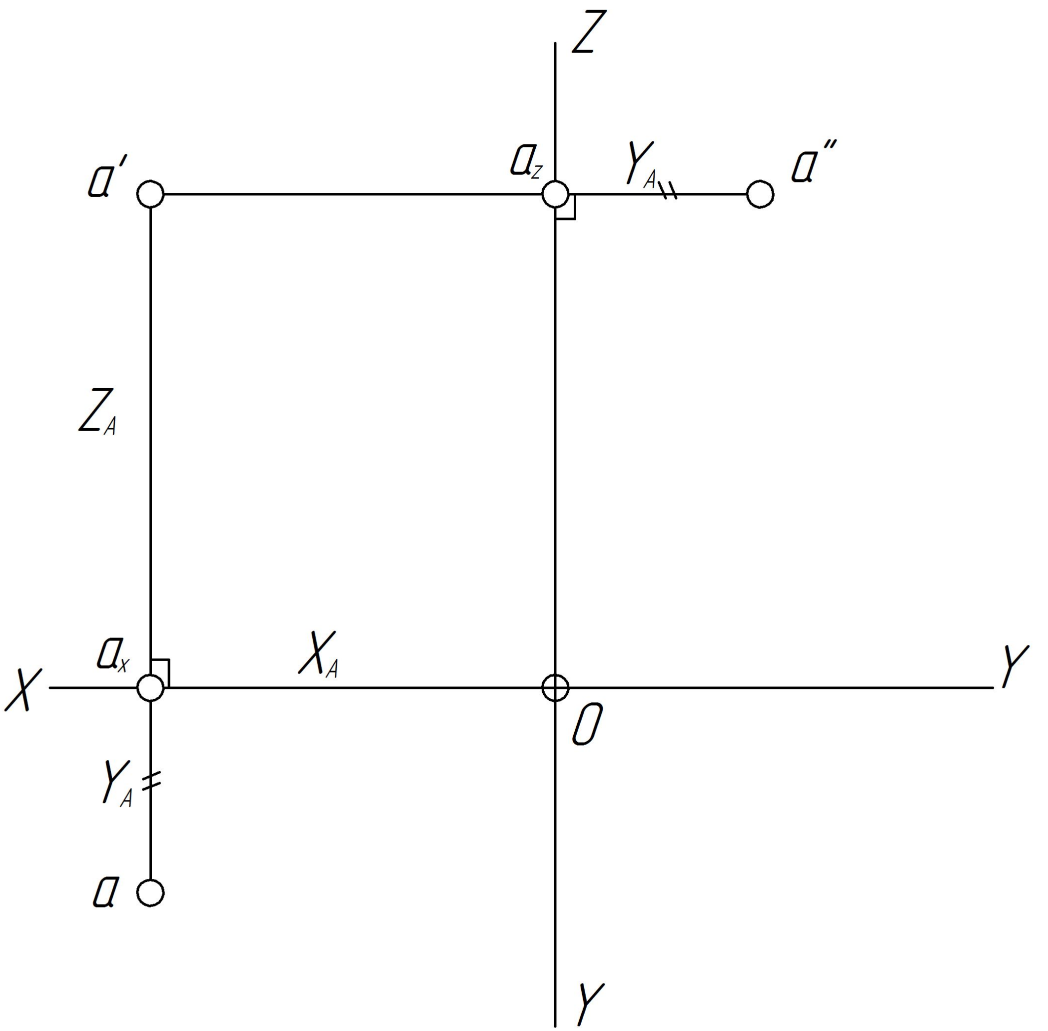
$Y_A = Aa' = \boldsymbol{a''a_z = aa_x} = 0a_y$ - ордината (расстояние точки до фронтальной ПП)

$Z_A = Aa = a'a_x = a''a_y = 0a_z$ - аппликата(расстояние точки до горизонтальной ПП)





<u>Пример:</u> построить проекции точки по ее прямоугольным координатам *A(30, 15, 40)*.



Алгоритм построения проекций точки:

1). По координате X откладываем X_A= 30 мм

2). Проводим линию связи

3). По координате Y откладываем Y_A= 15 мм

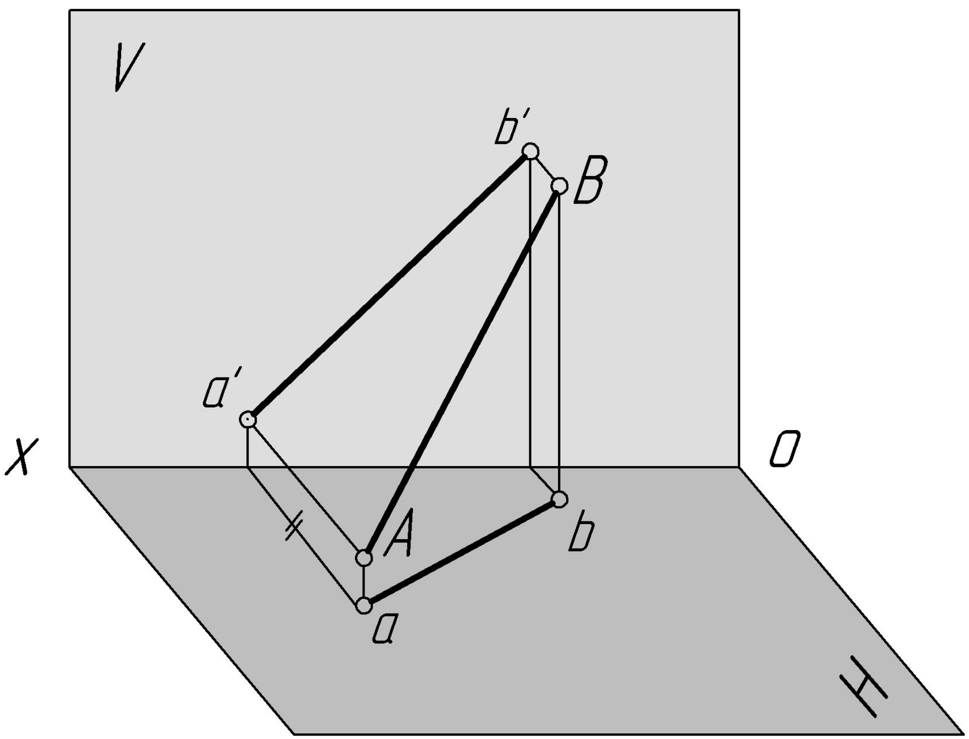
4). По координате Z откладываем Z_A= 40 мм

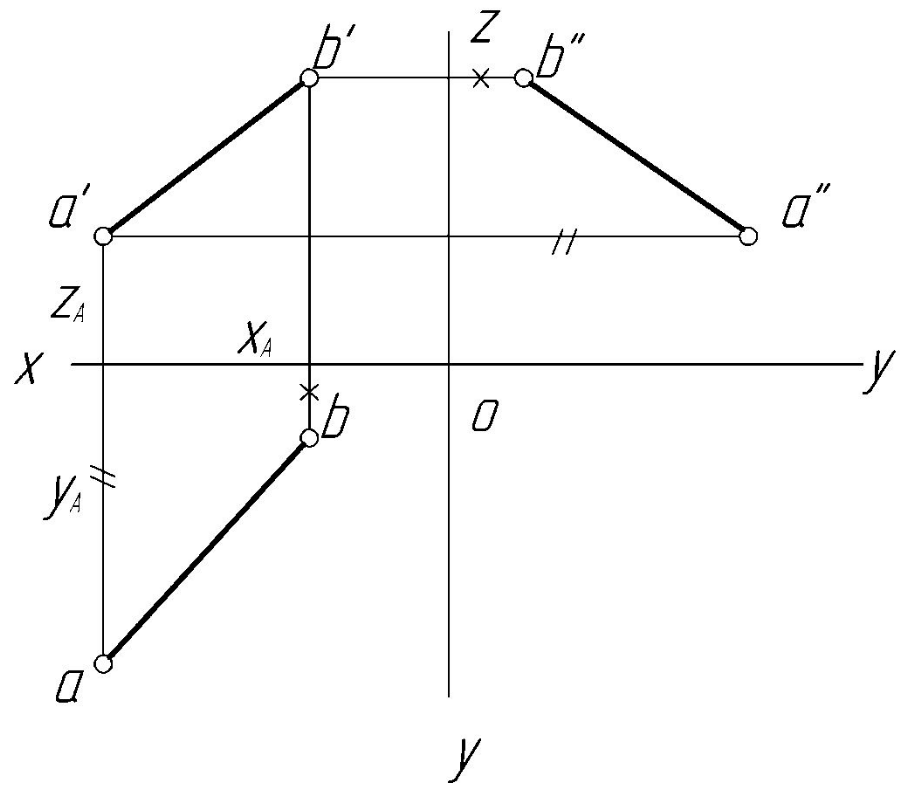
5). Координатным методом определяем профильную проекцию $\boldsymbol{a''a_z = aa_x}$

Проецирование прямой линии и ее отрезка

Линия – совокупность всех последовательных положений движущейся в пространстве точки.

Прямая линия – кратчайшее расстояние между двумя точками. Положение прямой в пространстве определяется двумя точками.





Соединяем одноименные проекции: *a-b, a′-b′* и *a″-b″* - получаем проекции пространственной прямой *AB*.

Построить проекции отрезка *AB* в системе *H, V, W* по координатам точек *A (35, 30, 10)* и *B(10, 5, 25)*

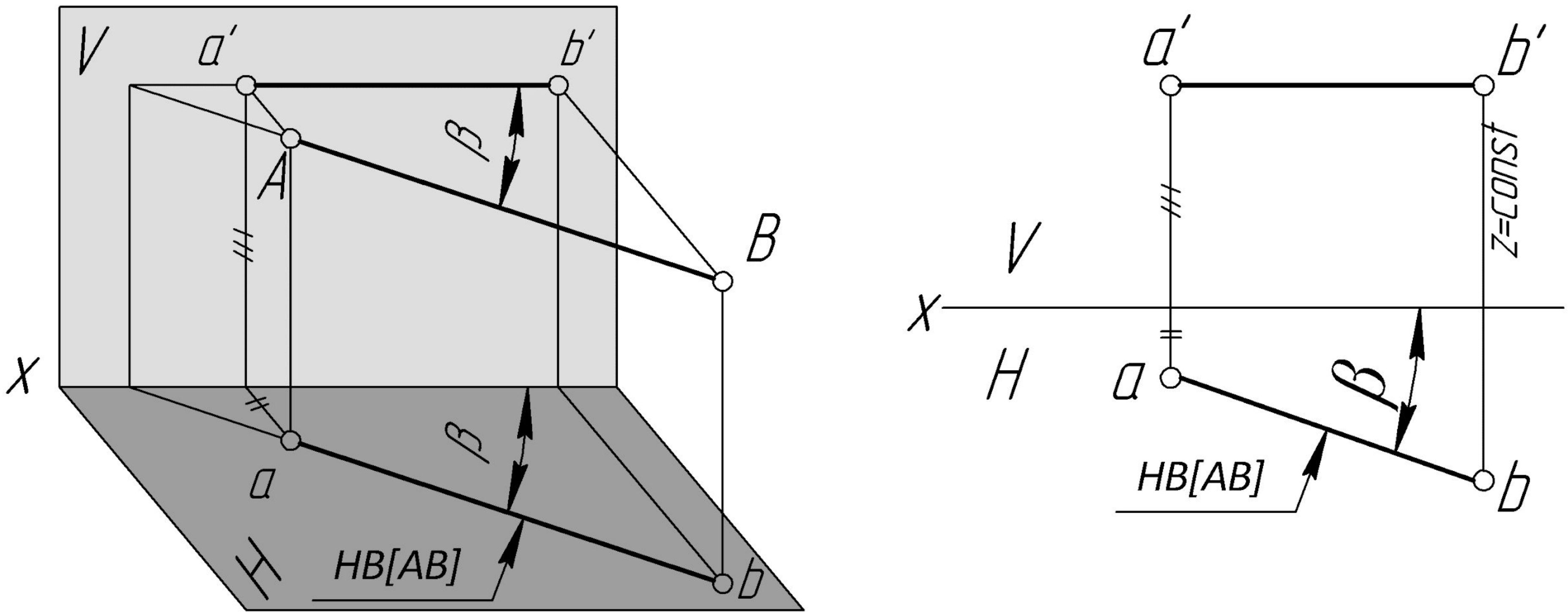
Положение отрезка прямой линии относительно плоскостей проекций

Прямые общего положения – прямые не параллельные ни одной ПП.

Прямые частного положения – прямые параллельные одной или двум ПП.

А). Прямые параллельные одной плоскости проекций

1). *Горизонтальная прямая* - прямая параллельная плоскости проекций H



Если $[AB] \,||\, H \;\leftrightarrow\; [a'b'] \,||\, 0X$

$[ab] \cong [AB]$; $Z=const$; β - угол наклона к пл. V

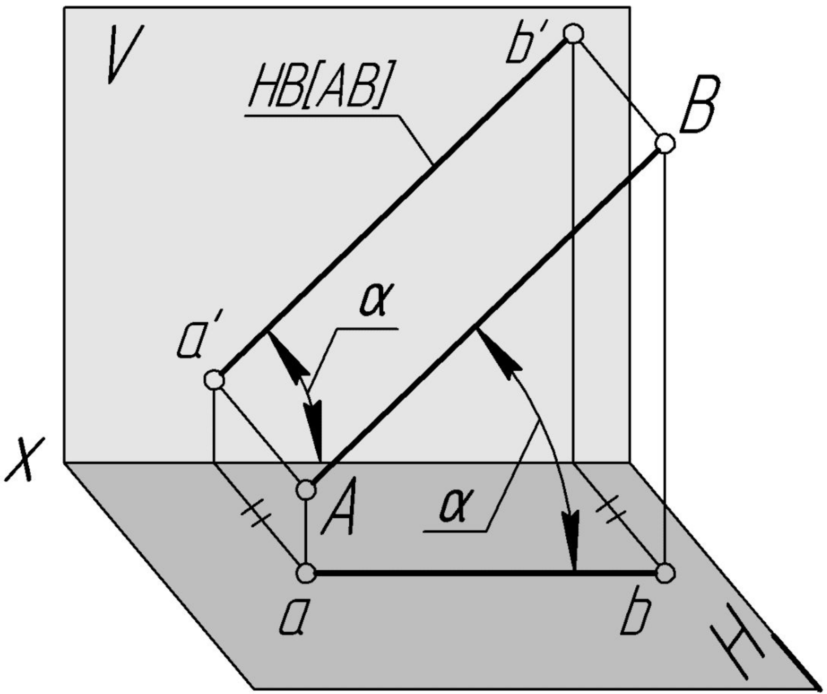
Положение отрезка прямой линии относительно плоскостей проекций

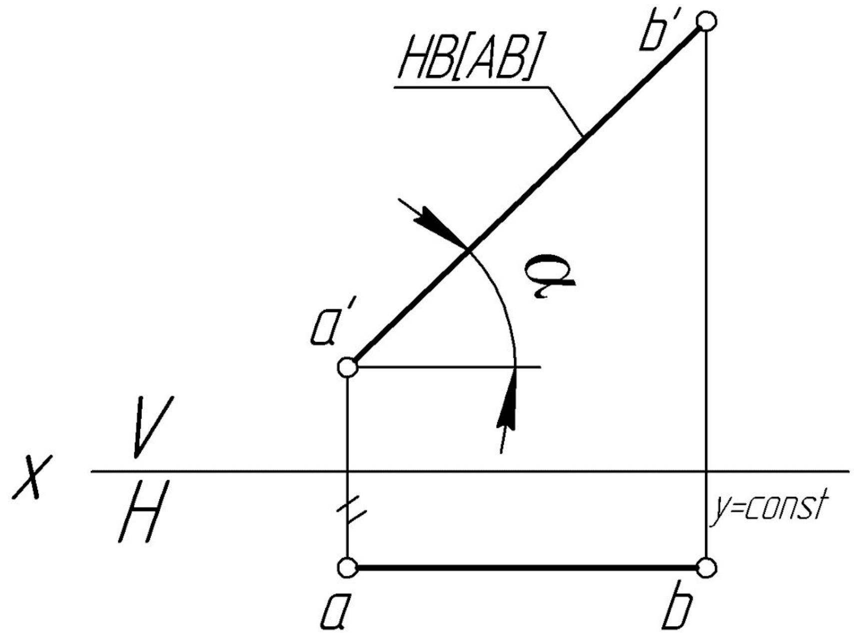
Прямые общего положения – прямые не параллельные ни одной ПП.

Прямые частного положения – прямые параллельные одной или двум ПП.

1). **Прямые параллельные одной плоскости проекций**

2). *Фронтальная прямая* - прямая параллельная плоскости проекций V





Если $[AB] \,||\, V \leftrightarrow [ab] \,||\, 0X$

$[a'b'] \cong [AB]$; $Y=const;$ α - угол наклона к пл. H

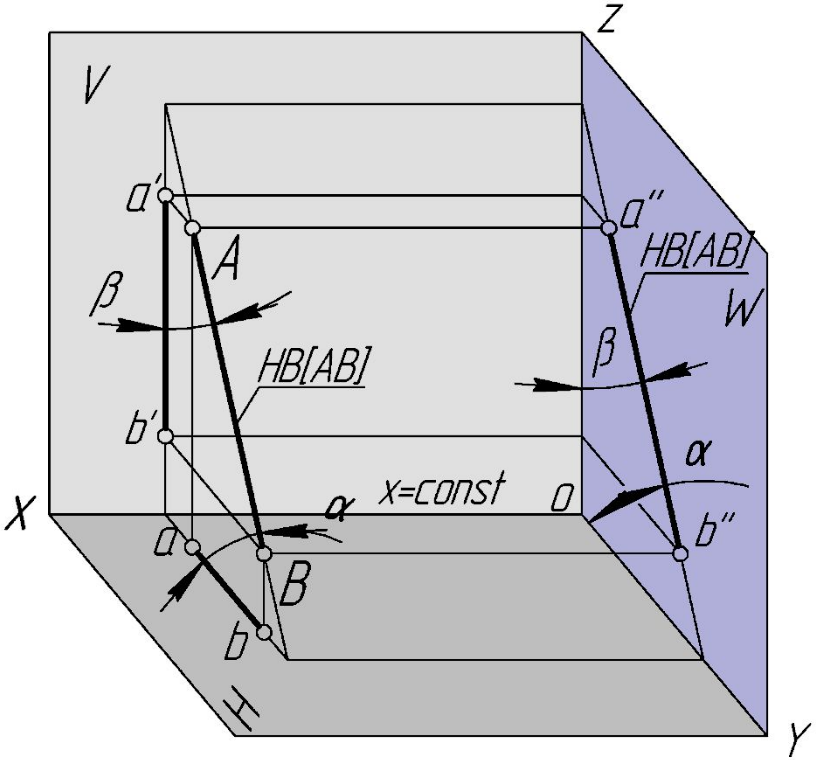
Положение отрезка прямой линии относительно плоскостей проекций

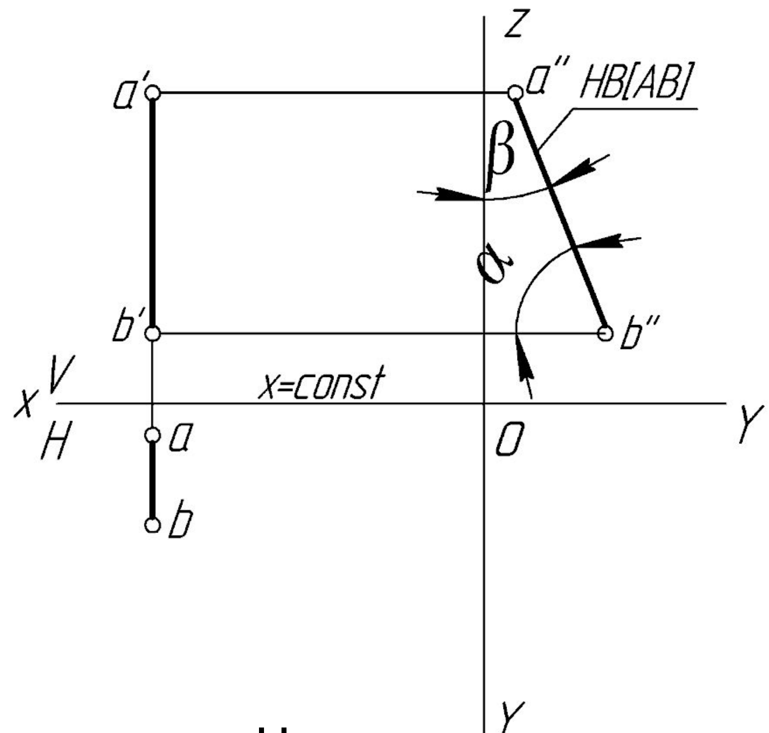
Прямые общего положения – прямые не параллельные ни одной ПП.

Прямые частного положения – прямые параллельные одной или двум ПП.

А). **Прямые параллельные одной плоскости проекций**

3). *Профильная прямая* - прямая параллельная плоскости проекций W





Если $[AB]\,||\,W \leftrightarrow X = const$ и $[ab]\,||\,0Y$; $[a'b']\,||\,0Z;$

$[a''b''] \cong [AB]$ β - к пл. V; α - к пл. H

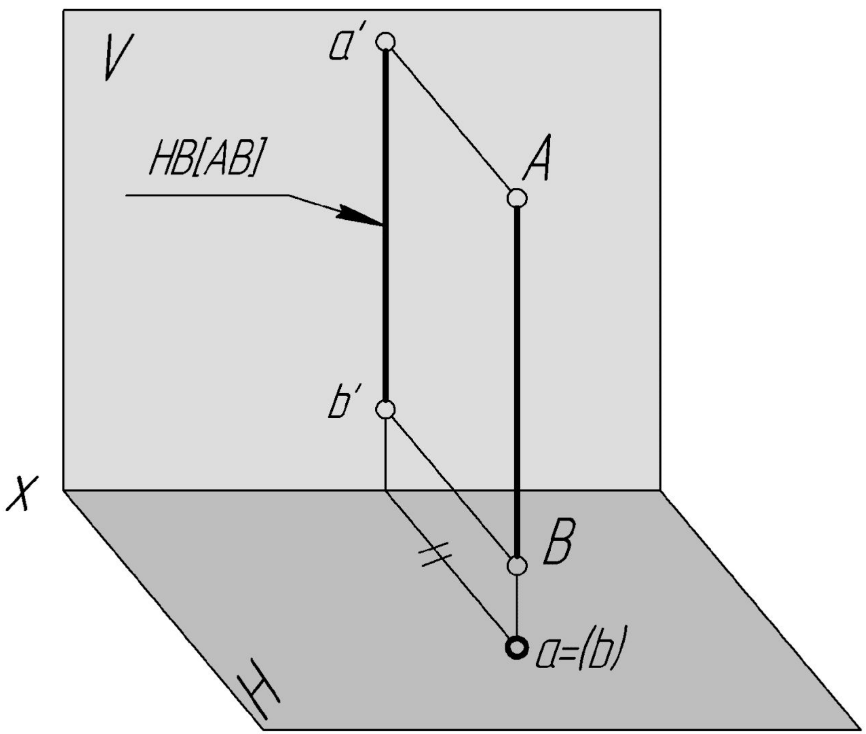
Положение отрезка прямой линии относительно плоскостей проекций

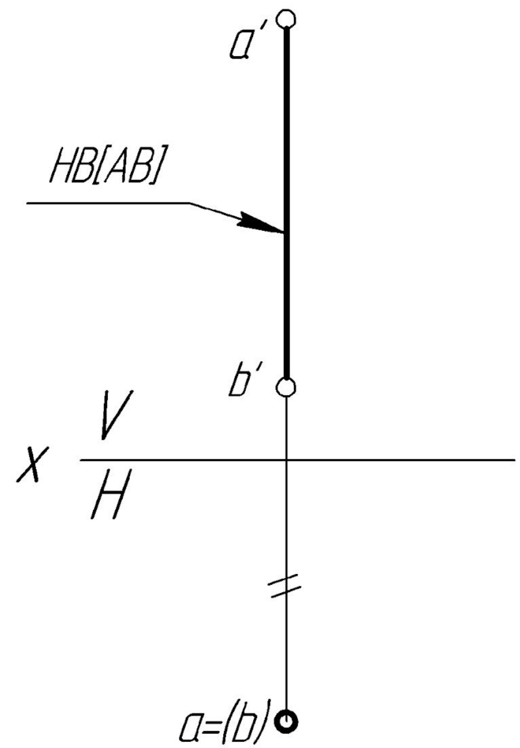
Прямые общего положения – прямые не параллельные ни одной ПП.

Прямые частного положения – прямые, параллельные одной или двум ПП.

Б). *Прямые параллельные двум плоскостям проекций*

1). *Горизонтально-проецирующая прямая (ГПП)* - прямая параллельная плоскости проекций V и W –





Если $[AB] \| V(W) \leftrightarrow [AB] \perp H \Rightarrow a=b;\ [a'b']$ и $[a''b''] \cong [AB]$

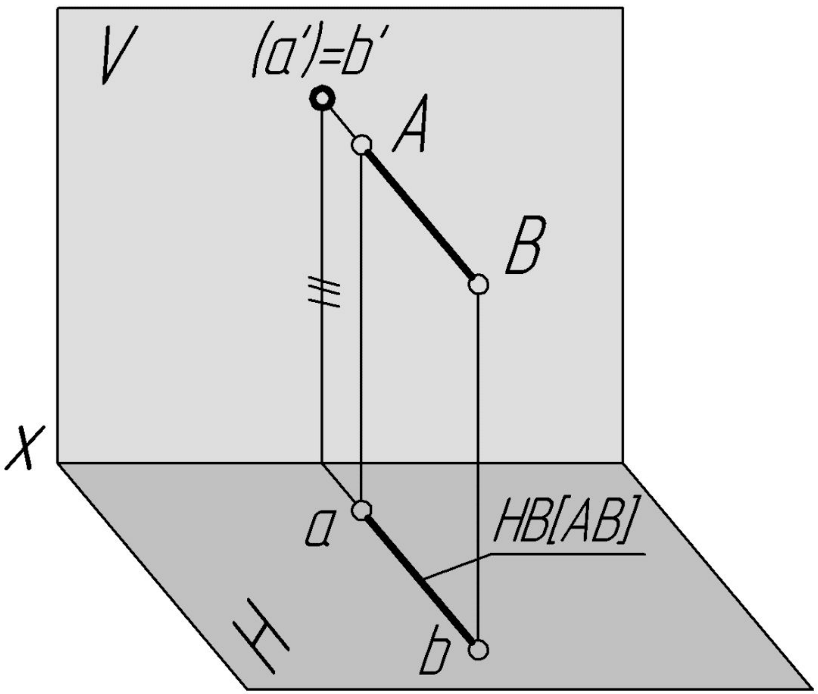
Положение отрезка прямой линии относительно плоскостей проекций

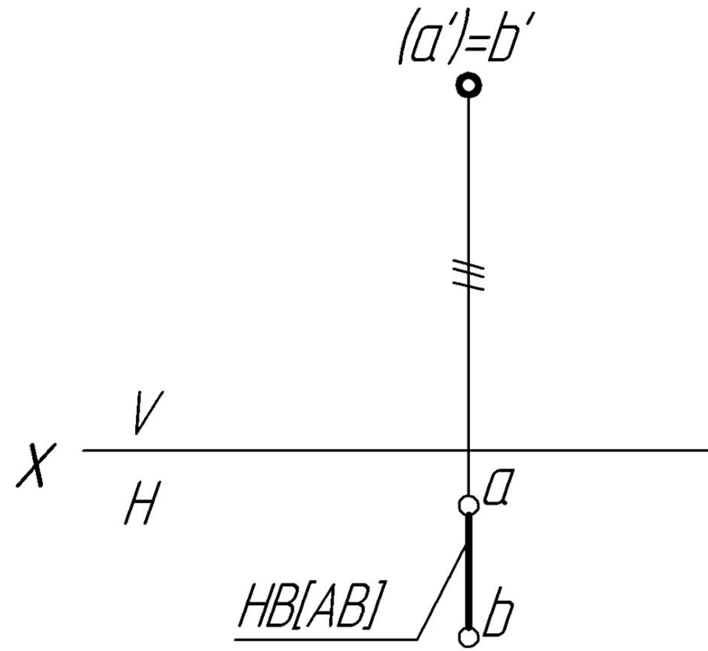
Прямые общего положения – прямые не параллельные ни одной ПП.

Прямые частного положения – прямые параллельные одной или двум ПП.

Б). ***Прямые параллельные двум плоскости проекций***

2). *Фронтально-проецирующая прямая (ФПП)* - прямая параллельная плоскости проекций H и W





Если $[AB] \,||\, H(W) \leftrightarrow [AB] \perp V \quad \Rightarrow \quad a'=b'; \; [ab]$ и $[a''b''] \cong [AB]$

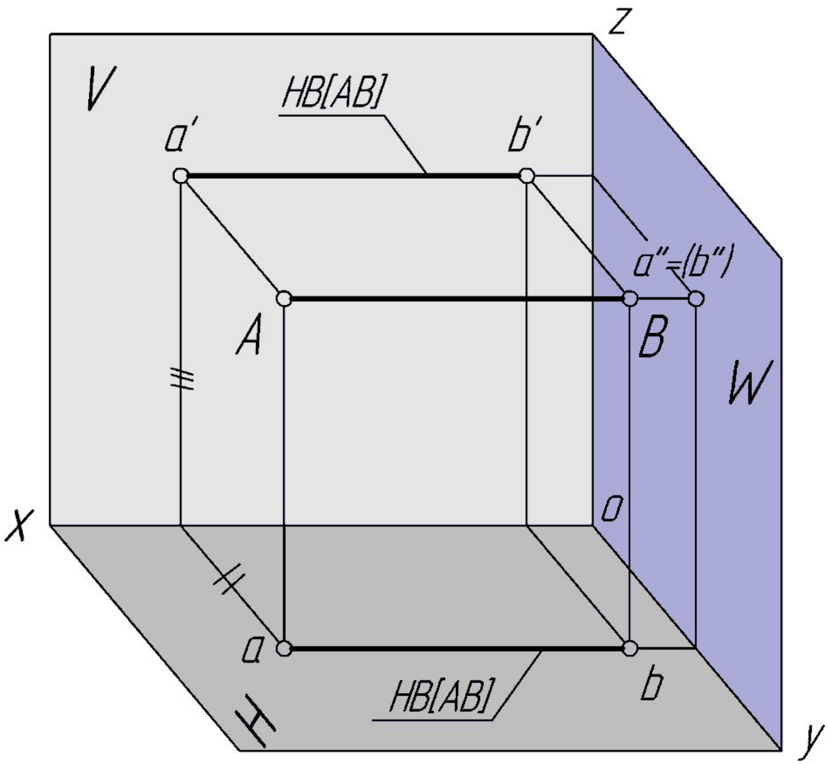
Положение отрезка прямой линии относительно плоскостей проекций

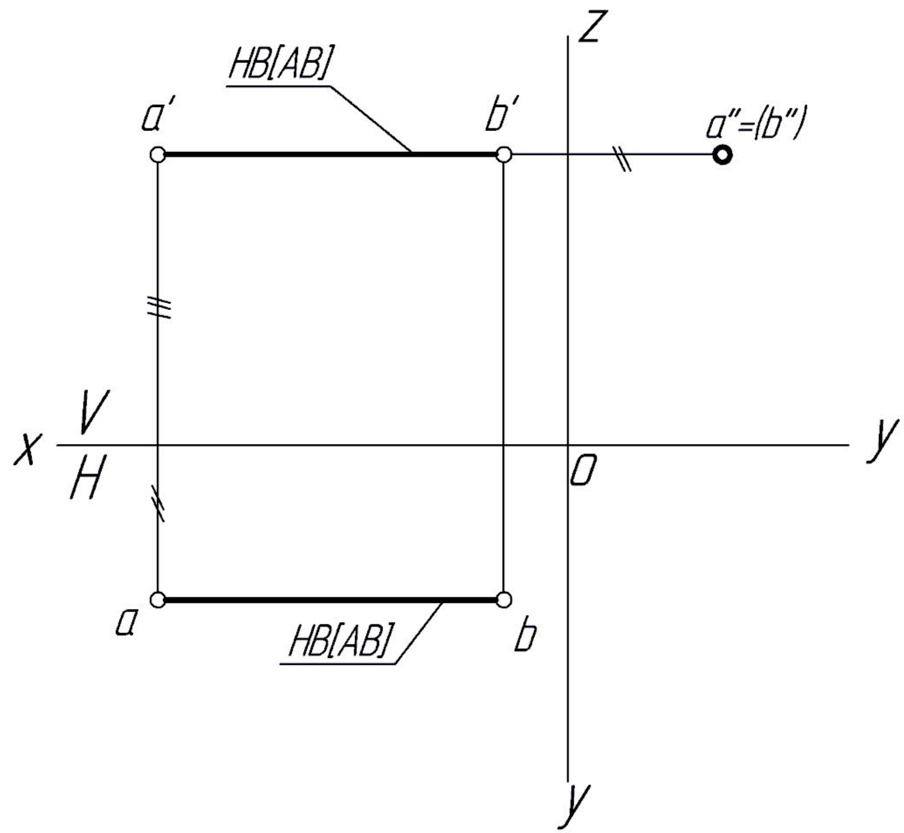
Прямые общего положения – прямые не параллельные ни одной ПП.

Прямые частного положения – прямые, параллельные одной или двум ПП.

Б). ***Прямые параллельные двум плоскости проекций***

3). *Профильно-проецирующая прямая (ППП)* - Прямая параллельная плоскости проекций H и V



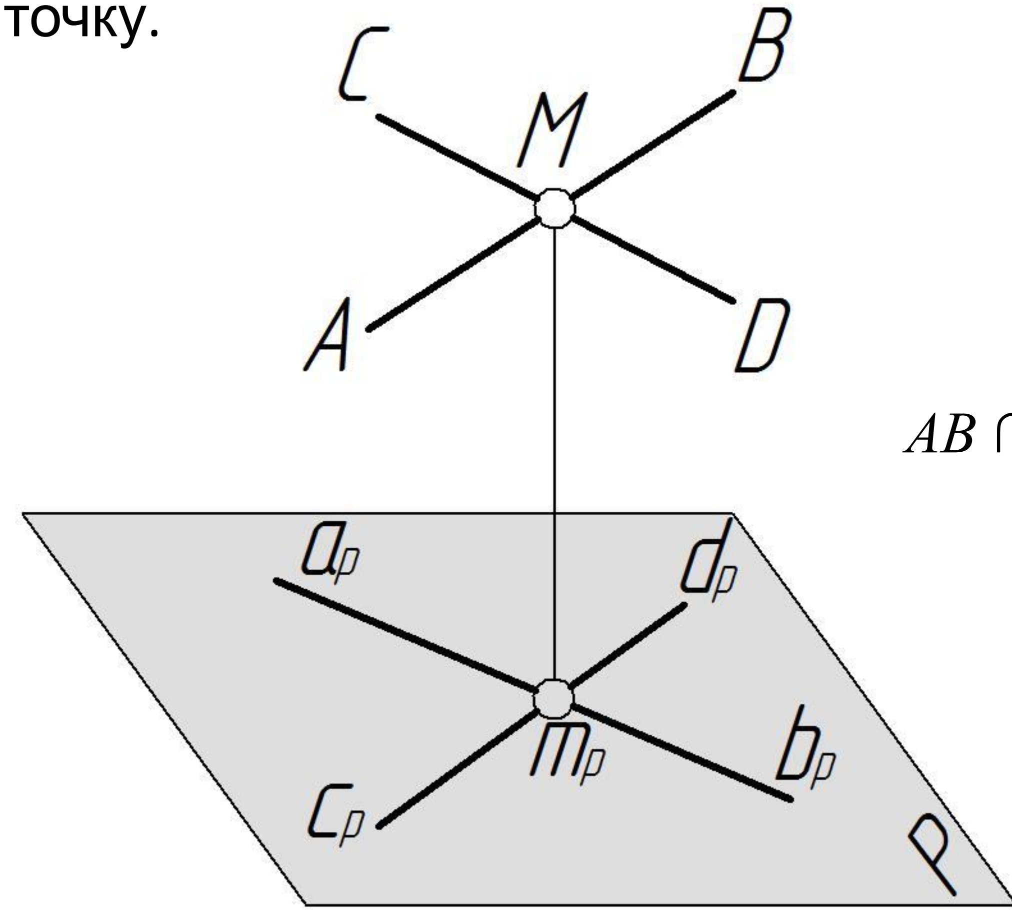


Если $[AB] \,||\, H(V) \leftrightarrow [AB] \perp W \quad \Rightarrow \quad a''=b''$; и $[ab]$ и $[a'b'] \cong [AB]$

Взаимное положение двух прямых

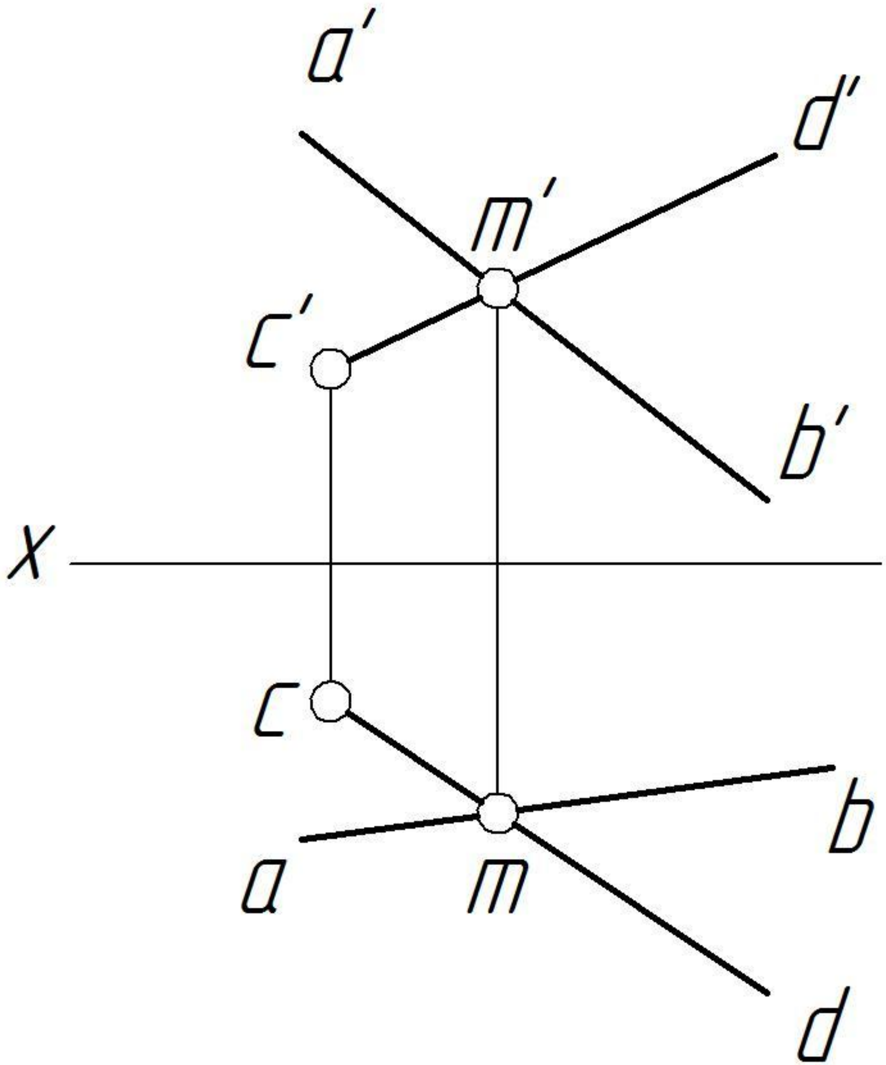
Прямые линии в пространстве могут занимать различные положения: пересекаться, быть параллельными и скрещивающимися.

1). *Пересекающиеся прямые* - это прямые, имеющие общую точку.



$$AB \cap CD = M \leftrightarrow a_p b_p \cap c_p d_p = m_p$$

1). <u>Пересекающиеся прямые</u> - это прямые, имеющие общую



<u>Теорема</u>: Если прямые линии пересекаются в пространстве, то на чертеже их одноименные проекции пересекаются, и точки пересечения одноименных проекций лежат на одной линии связи, перпендикулярной к оси проекций.

$$AB \cap CD = M \leftrightarrow$$

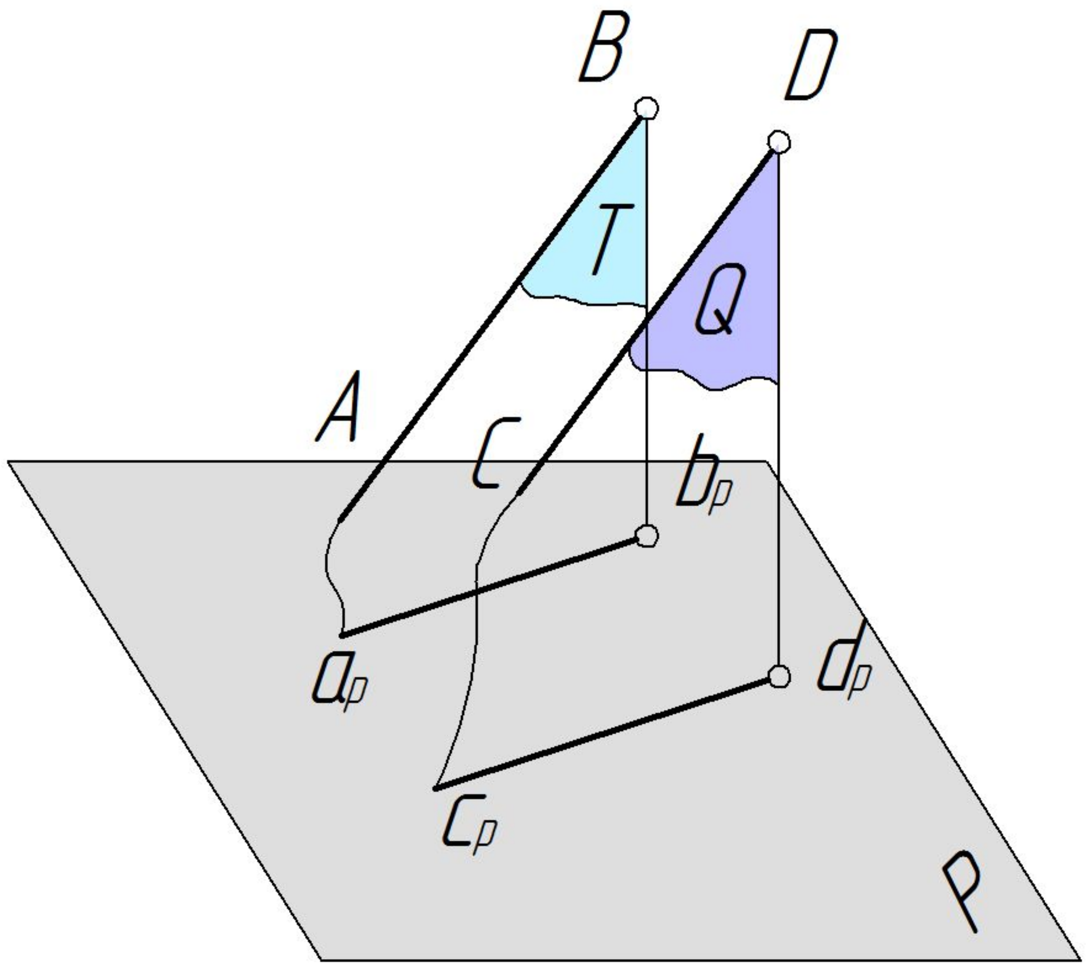
$$ab \cap cd = m;$$

$$a'b' \cap c'd' = m';$$

$$a''b'' \cap c''d'' = m'';$$

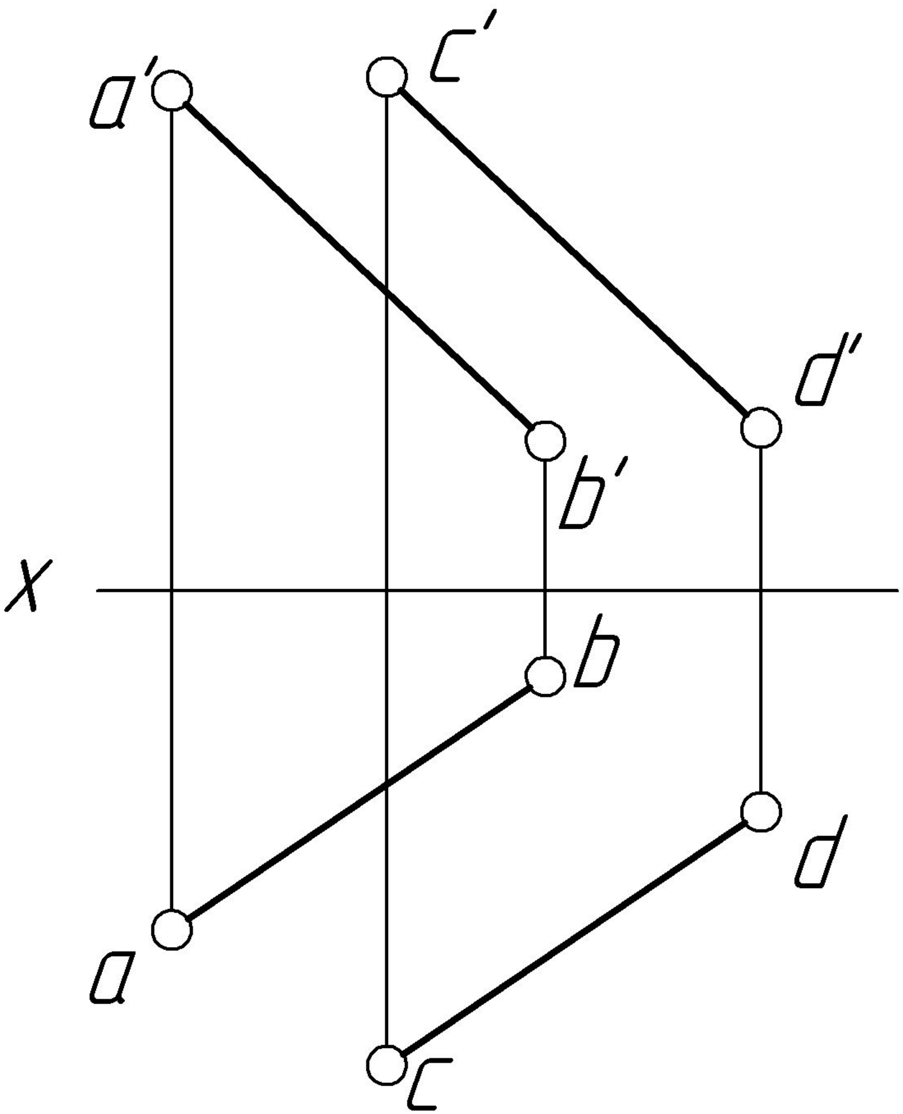
Взаимное положение двух прямых

2). *Параллельные прямые* - это прямые, пересекающиеся в несобственной точке.



$$AB \parallel CD \leftrightarrow a_p b_p \parallel c_p d_p$$

2). *__Параллельные прямые__* - это прямые, пересекающиеся в несобственной точке.



__Теорема__: Если прямые линии параллельны в пространстве, то на чертеже их одноимен-ные проекции также парал-лельны

$$AB \,||\, CD \;\leftrightarrow$$

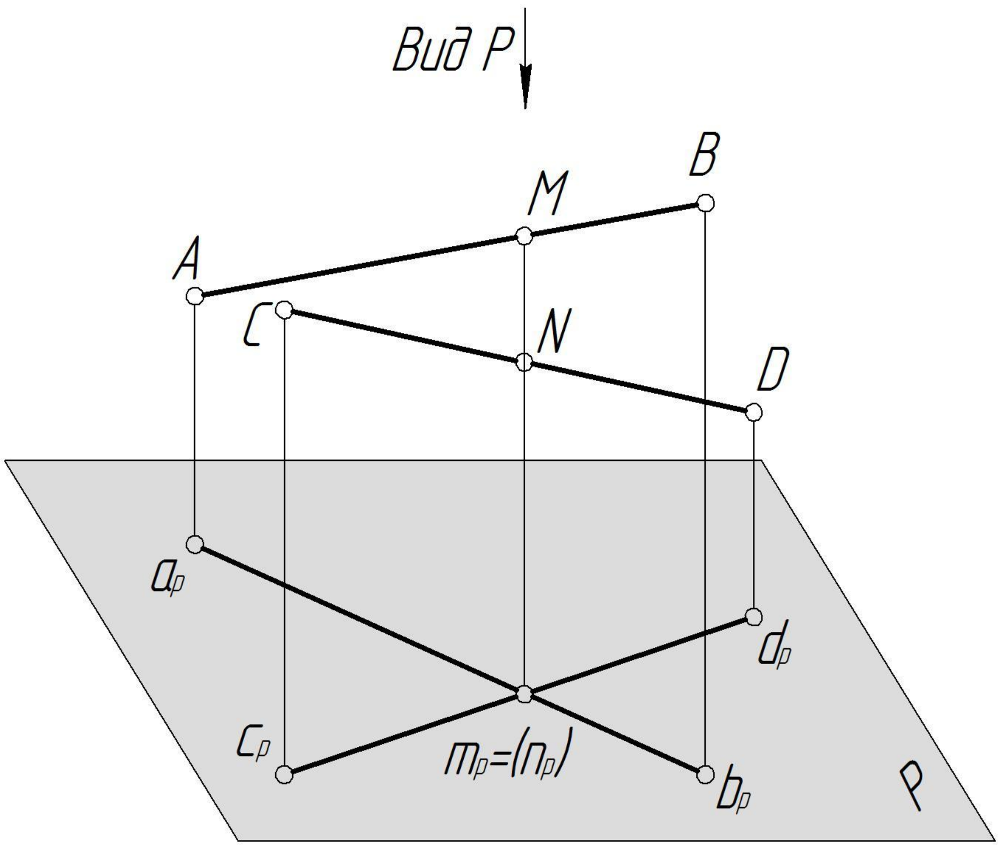
$$ab \,||\, cd;$$

$$a'b' \,||\, c'd';$$

$$a''b'' \,||\, c''d''$$

Взаимное положение двух прямых

3). <u>*Скрещивающиеся прямые*</u> - это прямые, не лежащие в одной плоскости и не имеющие общей точки (не пересекаются и не параллельны).

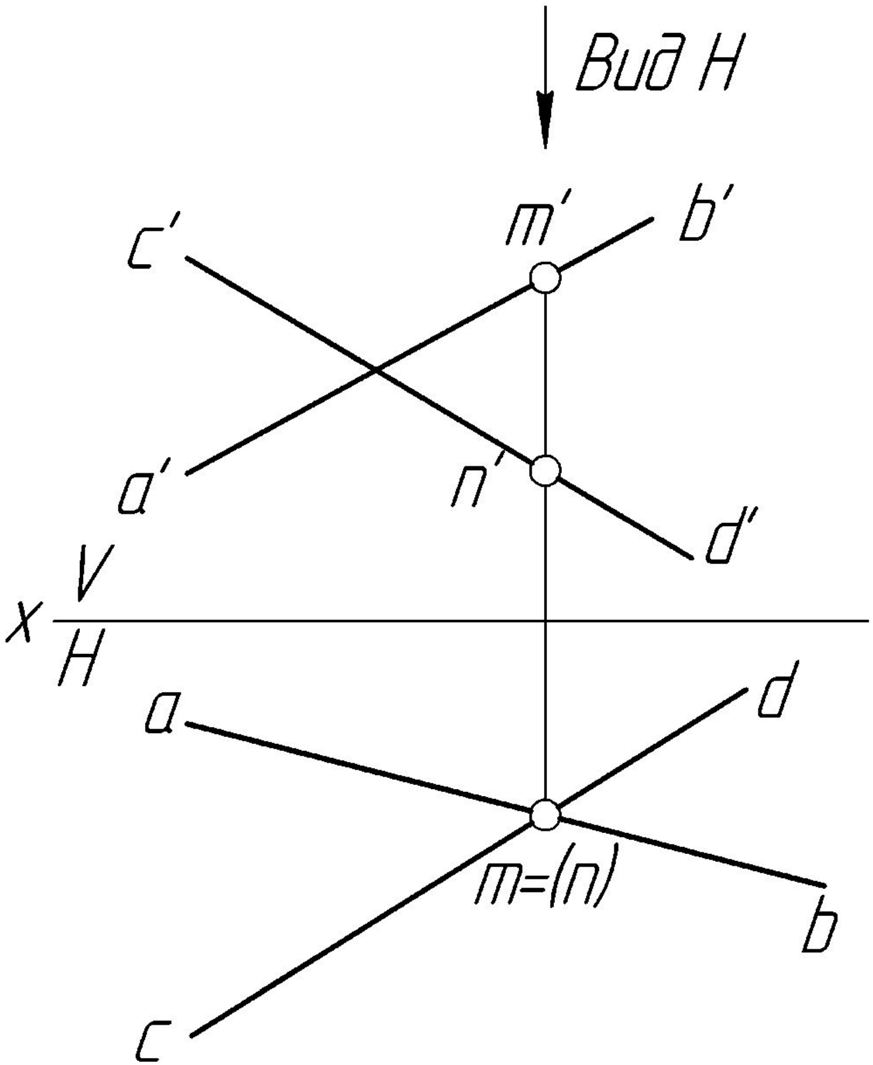


Точки пресечения одноименных проекций (m_P и n_P) представляют проекции двух точек M и N принадлежащих разным прямым:

- точка с проекцией m_P принадлежит прямой AB
- точка с проекцией n_P принадлежит прямой CD

Эти точки по разному удалены от плоскости P и называются “конкурирующими”

Определение: Если прямые скрещивающиеся, то точки пересечения их одноименных проекций не лежат на одной



Точки пресечения одноименных проекций (m и n) представляют проекции двух точек принадлежащих разным прямым:

- точка с проекциями m и m' принадлежит прямой AB
- точка с проекциями n и n' принадлежит прямой CD

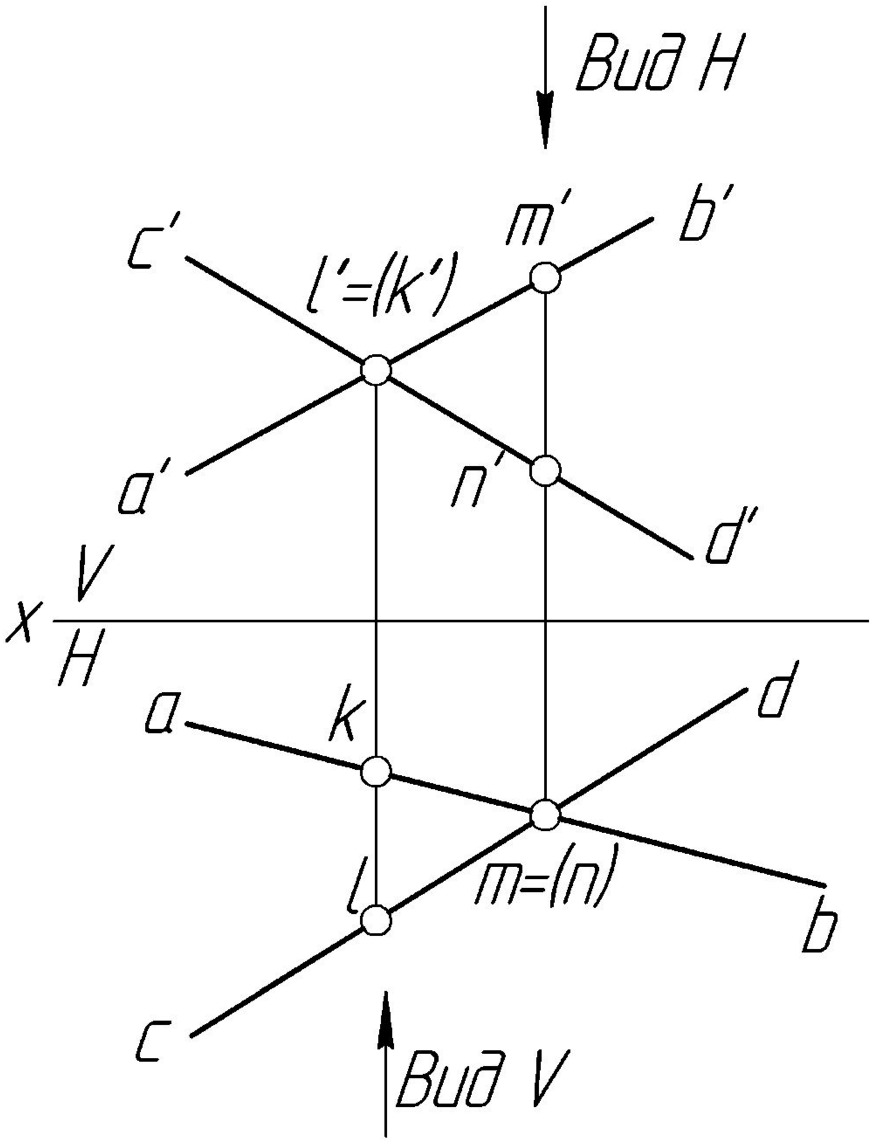
Эти точки одинаково удалены от плоскос- ти V, но по разному от плоскости H.

Они принадлежат одному горизонтально-проецирующему лучу и имеют разные аппликаты: $Z_M > Z_N$

Эти точки называются "*конкурирующими*".

Проекция одной из конкурирующих точек наиболее удаленной от ПП H считается "*видимой*" – т. M.

Определение: Если прямые скрещивающиеся, то точки пересечения их одноименных проекций не лежат на одной



Точки пресечения одноименных проекций (k' и l') представляют проекции двух точек принадлежащих разным прямым:

- точка с проекциями k и k' принадлежит прямой AB
- точка с проекциями l и l' принадлежит прямой CD

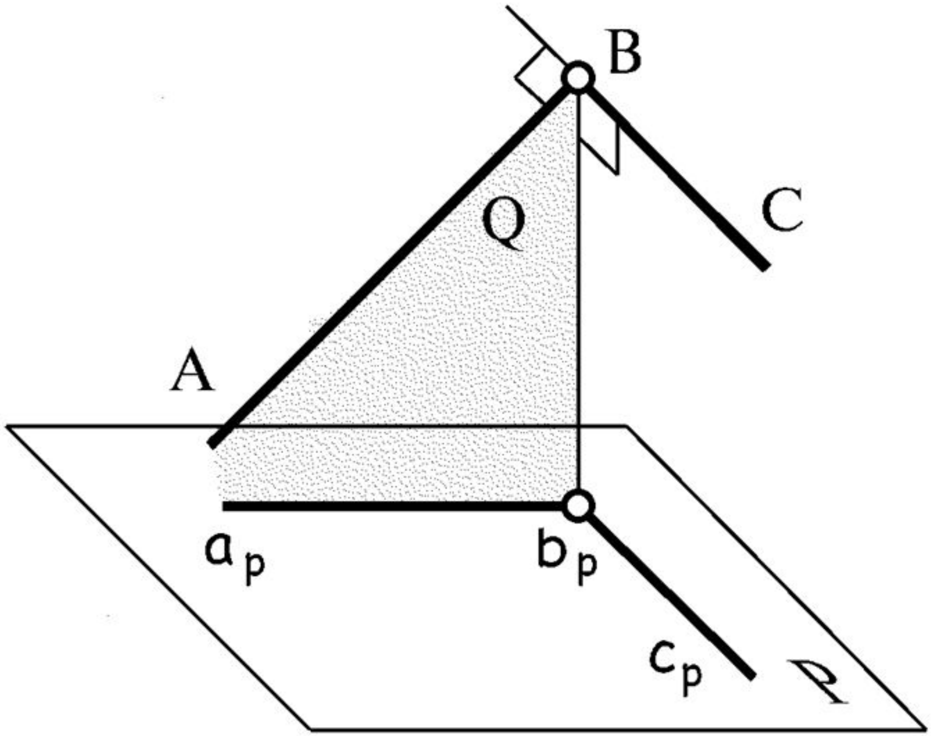
Эти точки одинаково удалены от плоскос-ти H , но по разному от плоскости V.

Они принадлежат одному фронтально-проецирующему лучу и имеют разные ординаты: $Y_l > Y_k$

Эти точки называются "*конкурирующими*".

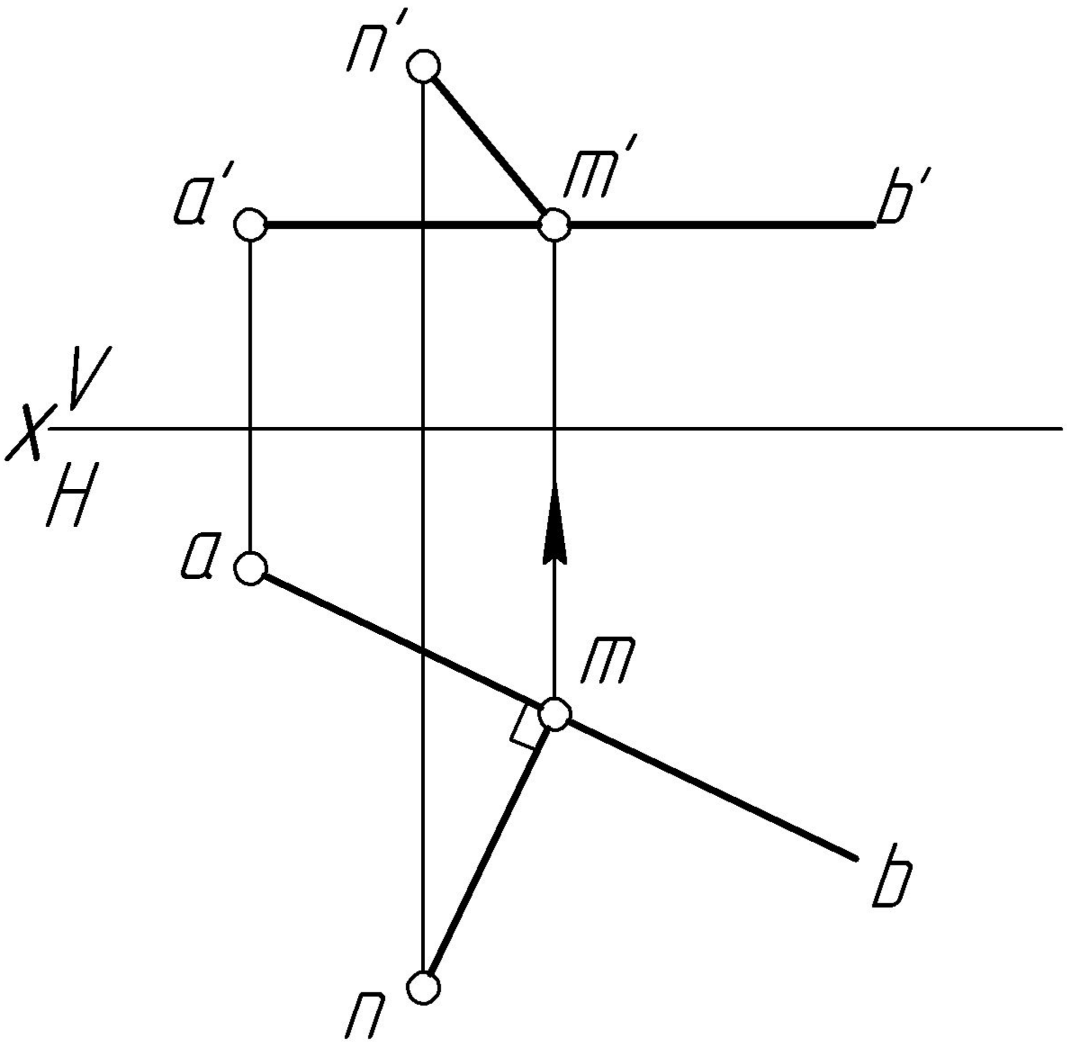
Проекция одной из конкурирующих точек наиболее удаленной от ПП V считается "*видимой*" – т. L.

!Частный случай проецирования прямого угла



Теорема (прямая): Если плоскость прямого угла не перпендикулярна к плоскости проекций, а хотя бы одна из сторон угла параллельна этой плоскости, то прямой угол проецируется на нее в виде прямого же угла.

Пример: Из т. N провести перпендикуляр NM к прямой AB.



Теорема (обратная)**:**
Если проекция плоского угла представляет собой прямой угол, то проецируемый угол будет прямым лишь при условии, что, по крайней мере, одна из сторон этого угла параллельна ПП.

$$AB \,||\, H \rightarrow nmb = 90^0$$

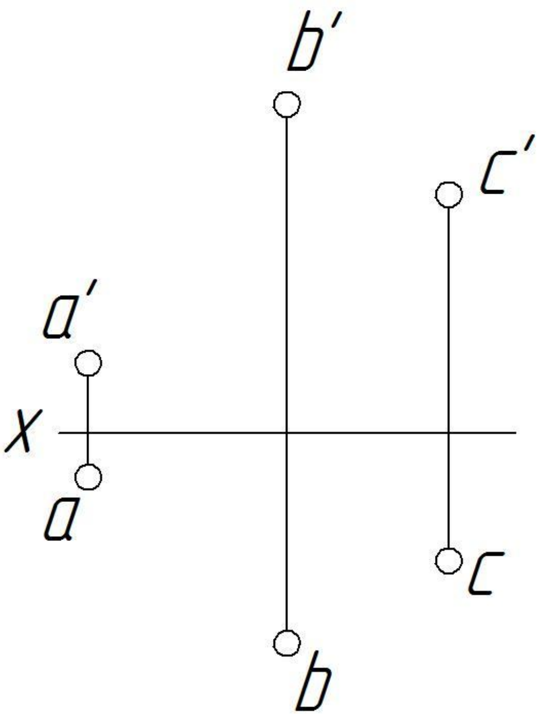
ПЛОСКОСТЬ

- *Поверхность* – совокупность всех последовательных положений движущейся в пространстве линии.
- В ВМ *плоскость* является простейшей поверхностью – поверхность первого порядка.
- В НГ *плоскость* представляют как предельное понятие ровности или как бесконечная поверхность, имеющая на всем протяжении одинаковое направление.

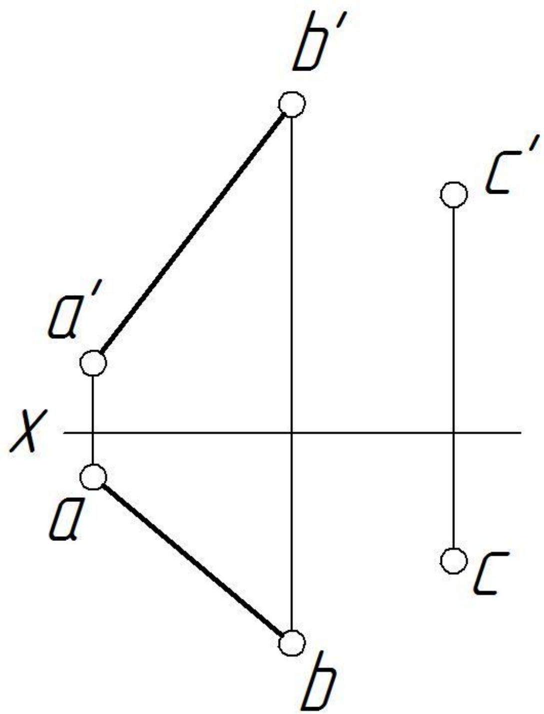
Способы задания плоскости на чертеже

Плоскость на чертеже задают проекциями:

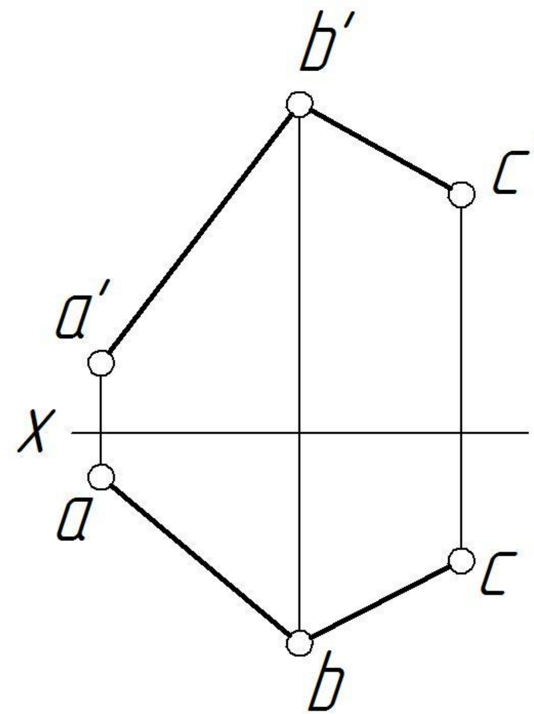
1). Трех точек не лежащих на одной прямой *P (ABC)*



2). Прямой и точки, не лежащей на прямой *P*(*AB* и *C*)



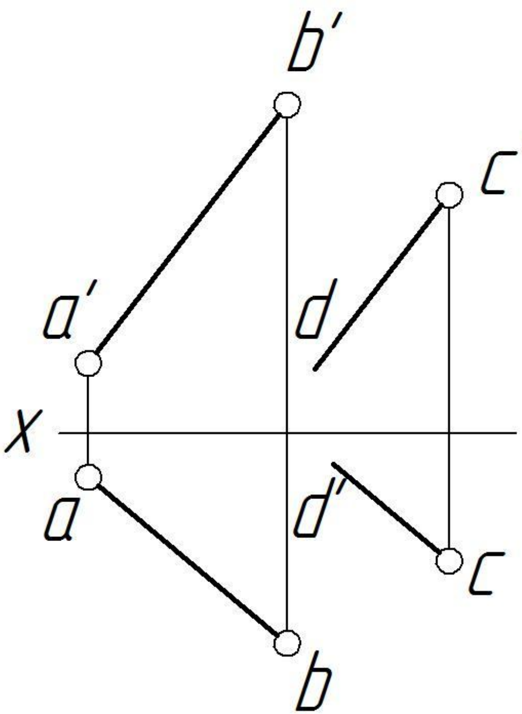
3). Двух пересекающихся прямых $P(AB \cap BC)$



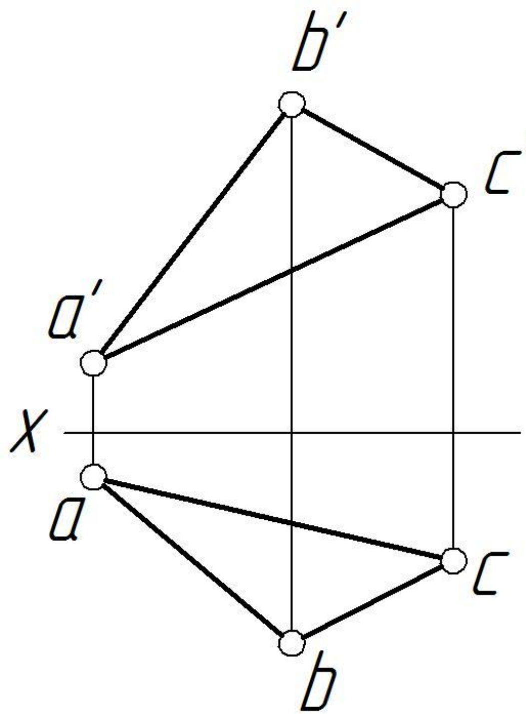
Способы задания плоскости на чертеже

Плоскость на чертеже задают проекциями:

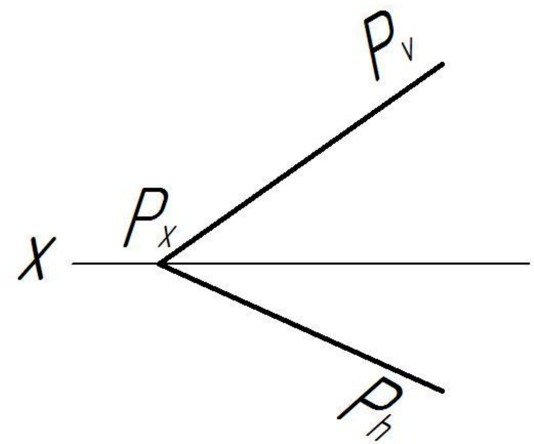
4). Двух параллель-ных прямых $P(AB \parallel CD)$



5). Плоской фигуры $P(\Delta ABC)$



6). Следами плоскости



<u>Прямая и точка в плоскости</u>

<u>Взаимное положение прямой и плоскости:</u>

I. Прямая лежит в плоскости

II. Прямая не лежит в плоскости:

1). Прямая параллельна плоскости

2). Прямая наклонена к плоскости:

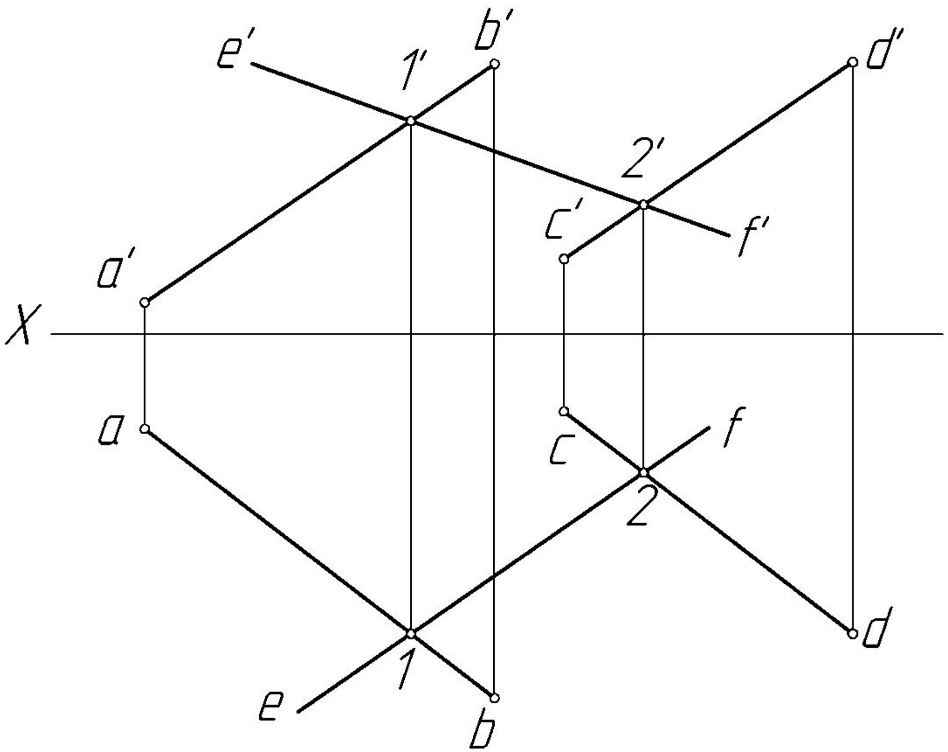
а). прямая перпендикулярна плоскости

б). прямая наклонена к плоскости под острым углом

Прямая лежит в плоскости

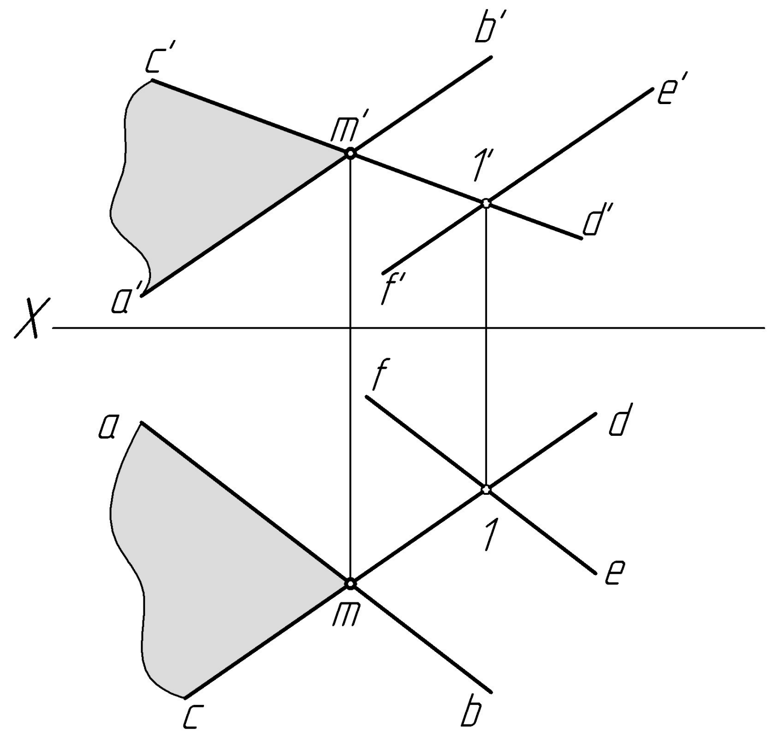
Условия принадлежности прямой плоскости:

1. Прямая принадлежит плоскости, если она проходит через две точки, принадлежащих данной плоскости.
2. Прямая принадлежит плоскости, если она проходит через одну точку, принадлежащую данной плоскости и параллельна прямой данной плоскости или прямой параллельной данной плоскости.



$P(AB \,||\, CD)$;

$EF \subset P \rightarrow EF \in 1;\ EF \in$

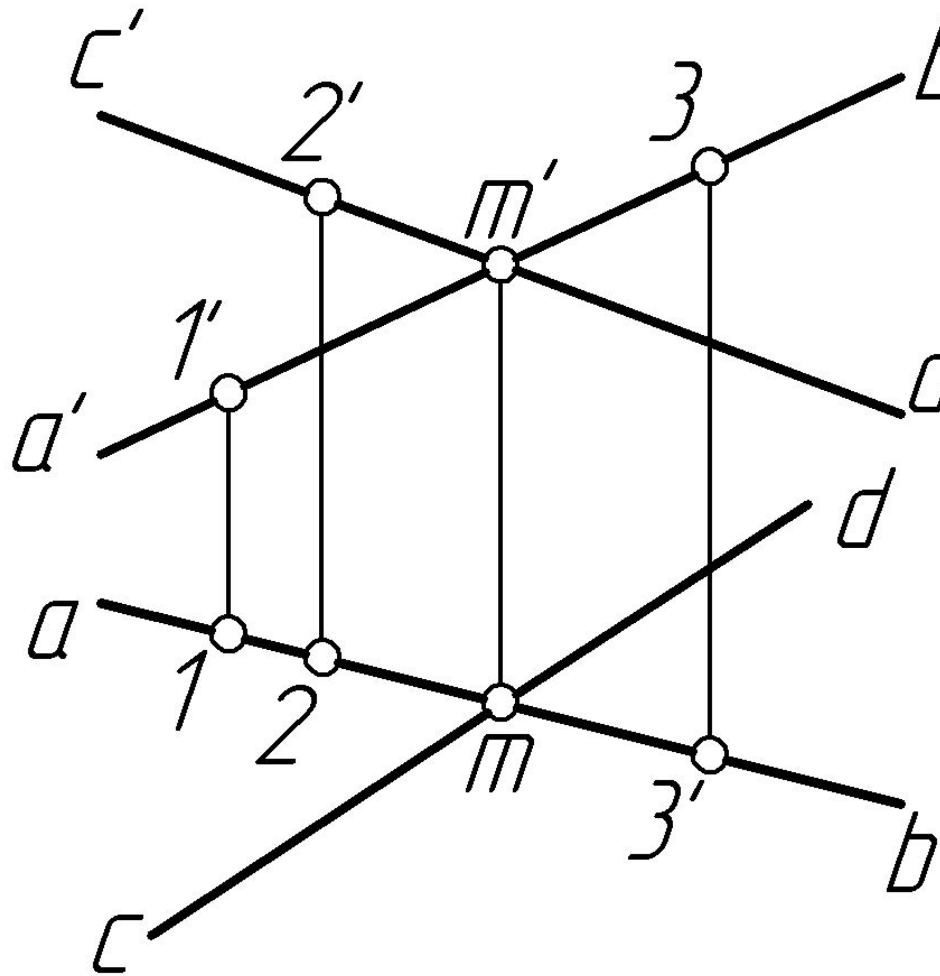


$P(AB \cap CD = M)$;

$EF \subset P \rightarrow EF \in 1;\ EF \,||\, AB$

Условие принадлежности точки плоскости:

Точка принадлежит плоскости, если она принадлежит прямой данной плоскости



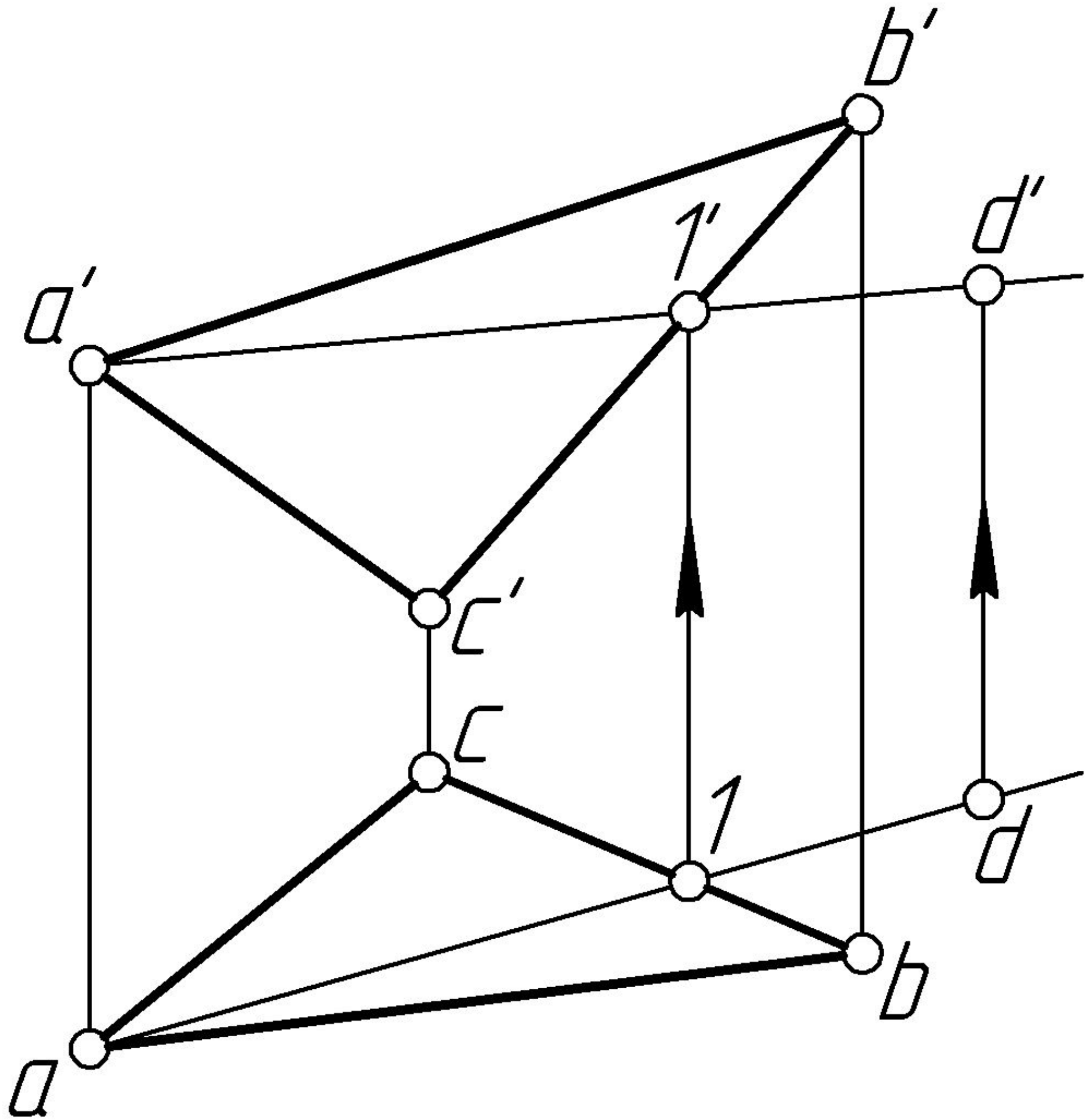
$P(AB \cap CD) = M$:

$1 \in P$

$2 \notin P$

$3 \notin P$ (т. 3 в III четверти)

Условие принадлежности точки плоскости:
Точка принадлежит плоскости, если она принадлежит прямой данной



<u>Пример</u>: $P\ (\Delta ABC)$
$D \in P; \quad d'$ - ?

$d \in a1 \rightarrow d' \in a'1'$