

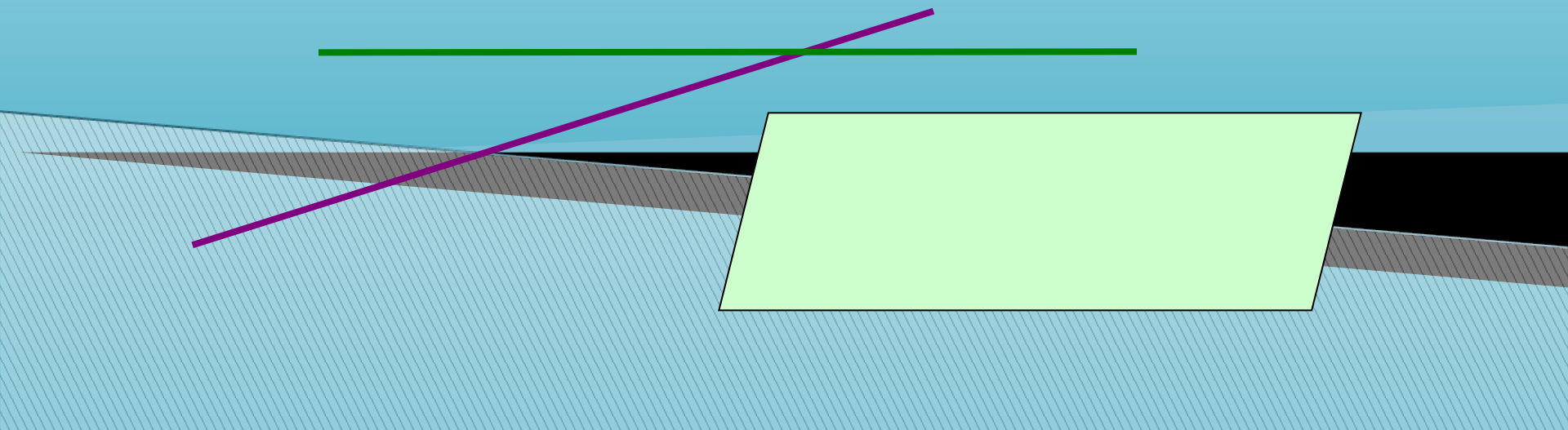
# Прямые и плоскости в пространстве

Часть 2\_1

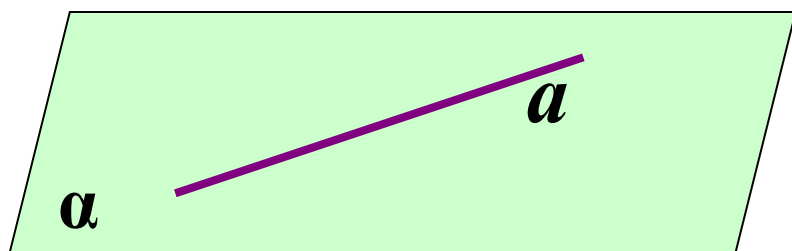


Презентацию подготовила учитель математики  
МБОУ СОШ №4 г.Покачи ХМАО-Югра  
Литвинченко Л.В.

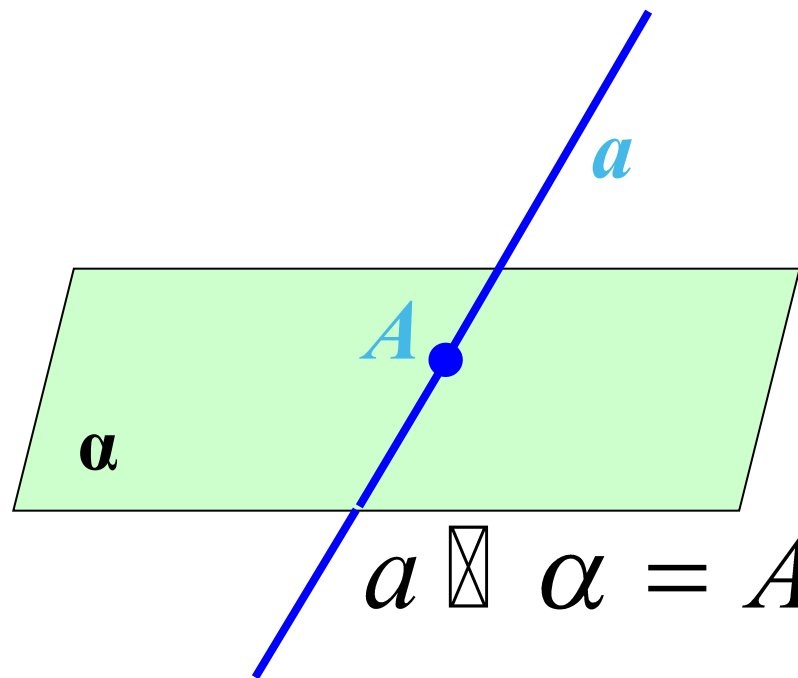
**Взаимное расположение  
прямой и плоскости.  
Признак параллельности  
прямой и плоскости.**



# Взаимное расположение прямой и плоскости.



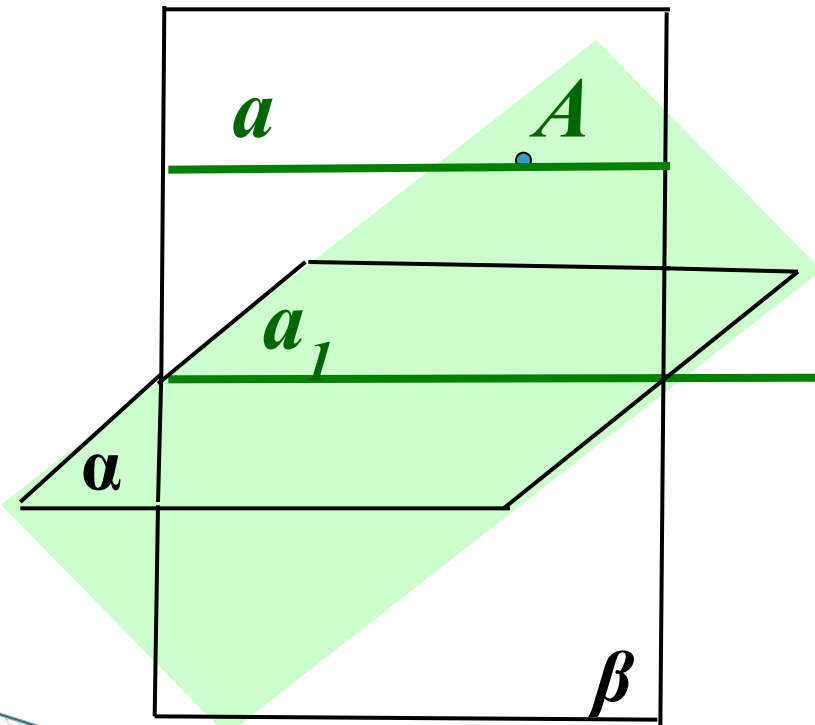
$$a \subset \alpha$$



$$a \cap \alpha = A$$



# Построение прямой, не пересекающей плоскость.

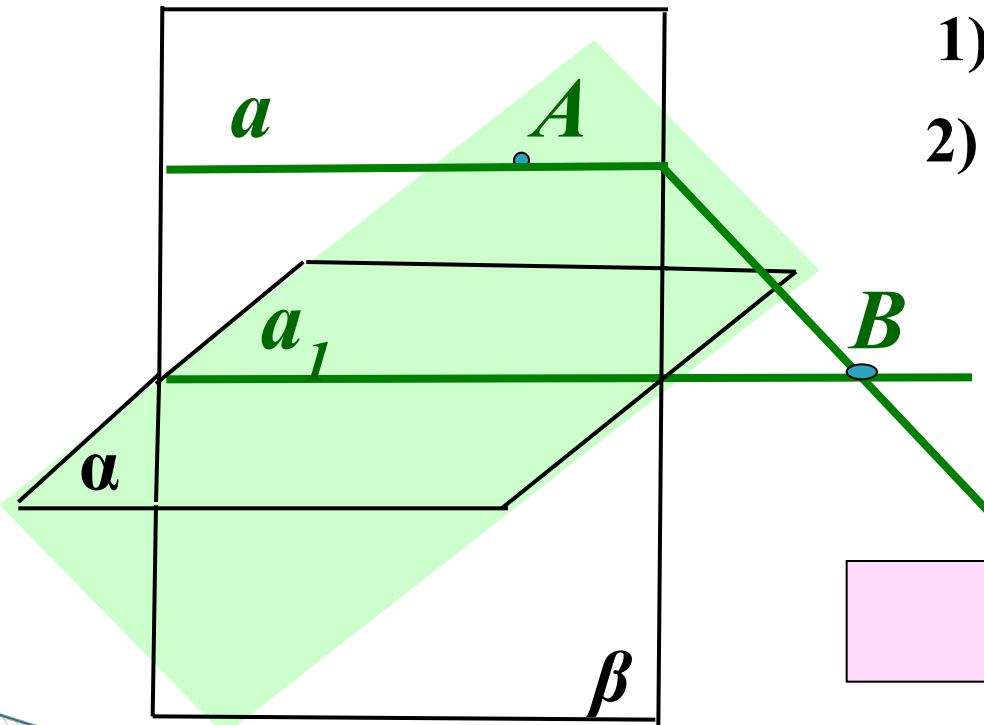


1. Проведем плоскость  $\alpha$ .
2. В данной плоскости проведем прямую  $a_1$ .
3. Возьмем вне плоскости
4. Через точку  $A$  и прямую  $a_1$  проведем плоскость  $\beta$
5. В плоскости  $\beta$  через точку  $A$  проведем прямую  $a$  параллельную прямой  $a_1$ .

$a$  – искомая прямая.

# Построение прямой, не пересекающей плоскость.

## Доказательство:



1) Пусть  $a \cap \alpha = B$ .

2)  $\beta \cap \alpha = a_1$  |  
 $B \in \beta$   
 $B \in \alpha$

$B \in a_1$ , т.е.  
 $a \cap a_1 = B$ , что  
противоречит  
построению  
( $a \parallel a_1$ )

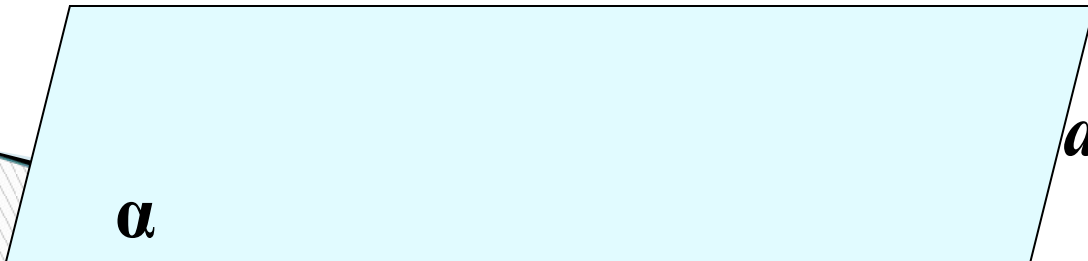
**$a$  и  $\alpha$  не пересекаются.**

**Ч.Т.Д.**

# Определение параллельности прямой и плоскости.

Прямая и плоскость называются параллельными, если они не пересекаются.

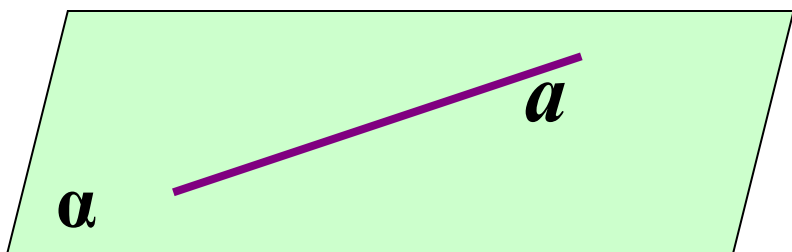
*a*



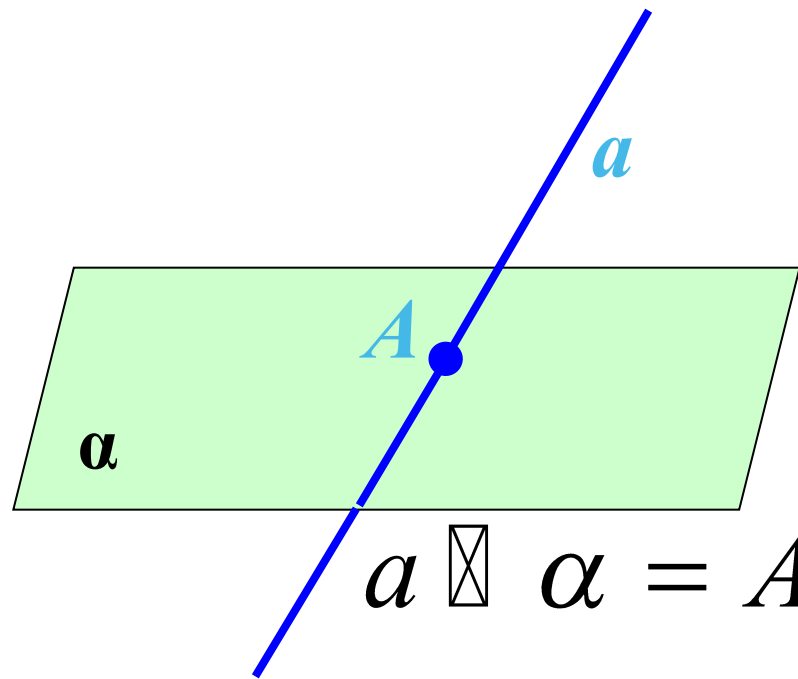
*α*

*a* || *α* или *α* || *a*

# Взаимное расположение прямой и плоскости.



$$a \subset \alpha$$



$$a \cap \alpha = A$$

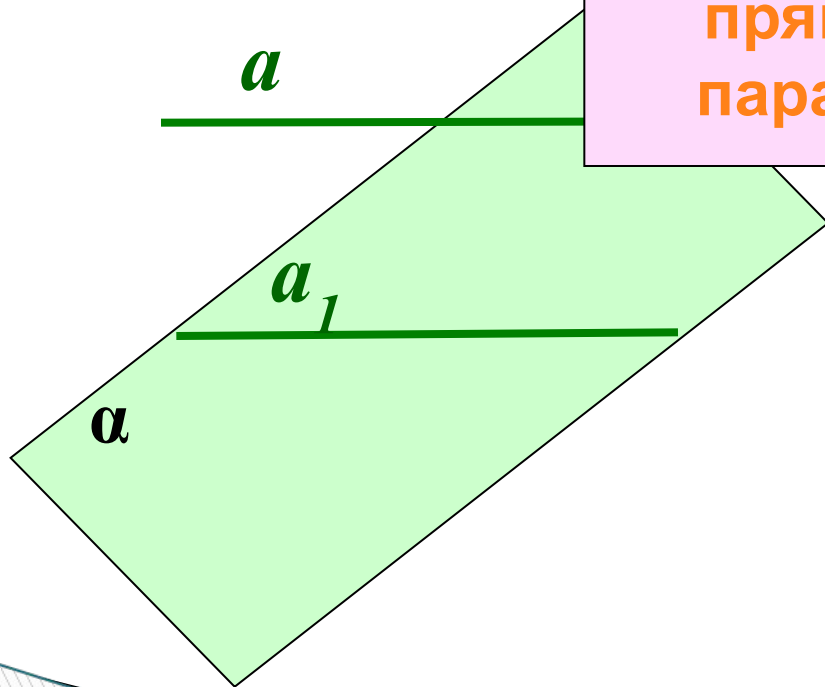


$$a \parallel \alpha$$

# Построение параллельных прямой и плоскости.

## Признак параллельности прямой и плоскости.

Если прямая, не лежащая в данной плоскости, параллельна какой-нибудь прямой в этой плоскости, то она параллельна и самой плоскости.



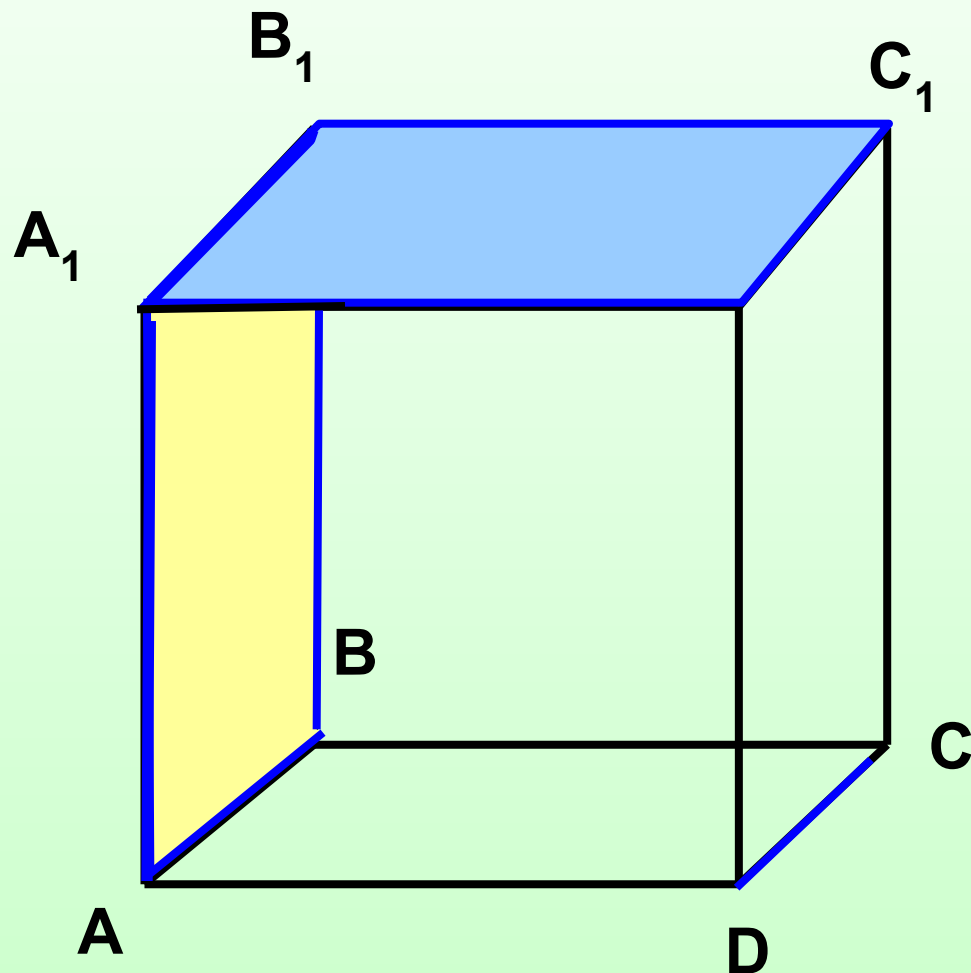
$$\begin{array}{l|l} a \not\subset \alpha & \\ a \parallel a_1 & \\ a_1 \subset \alpha & \end{array} \quad \left| \quad a \parallel \alpha \right.$$



На модели куба укажите плоскости,  
параллельные прямой  $DC$ , прямой  $DD_1$ .  
Как установить параллельность прямой и  
плоскости?

$DC \parallel (AA_1B_1)$

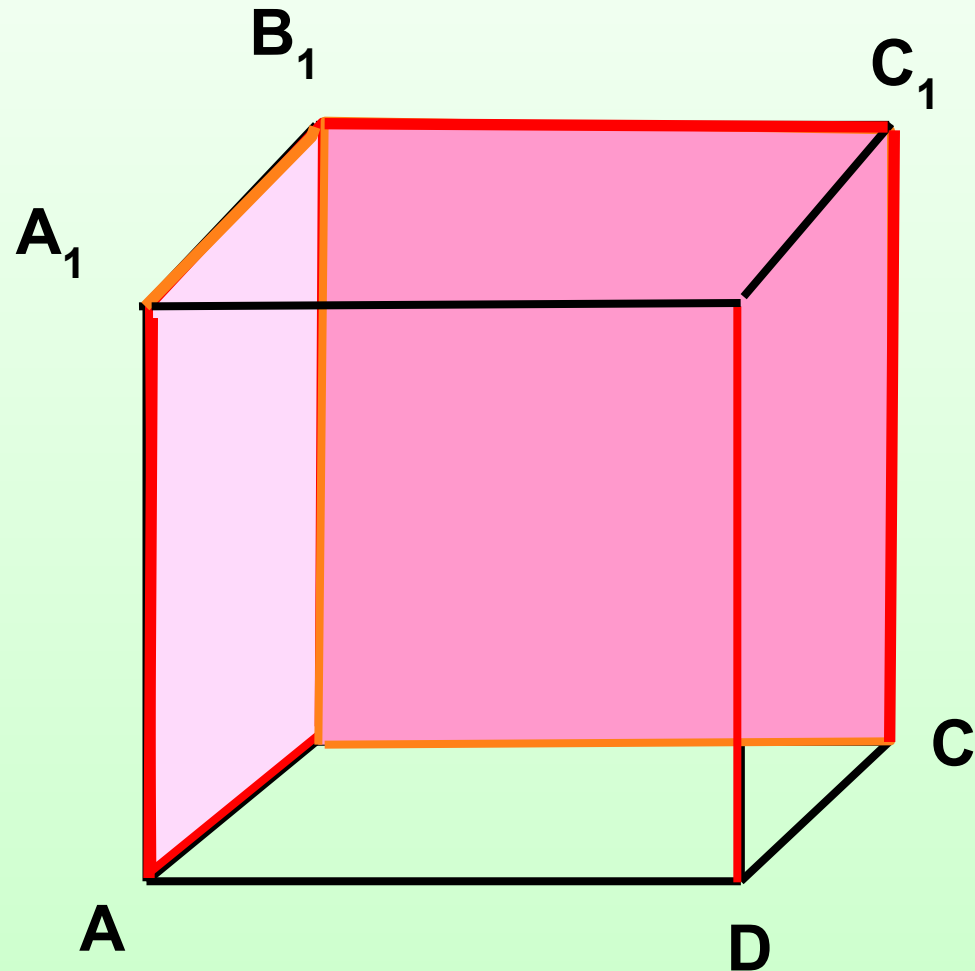
$DC \parallel (A_1B_1C_1)$



На модели куба укажите плоскости,  
параллельные прямой  $DC$ , прямой  $DD_1$ .  
Как установить параллельность прямой и  
плоскости?

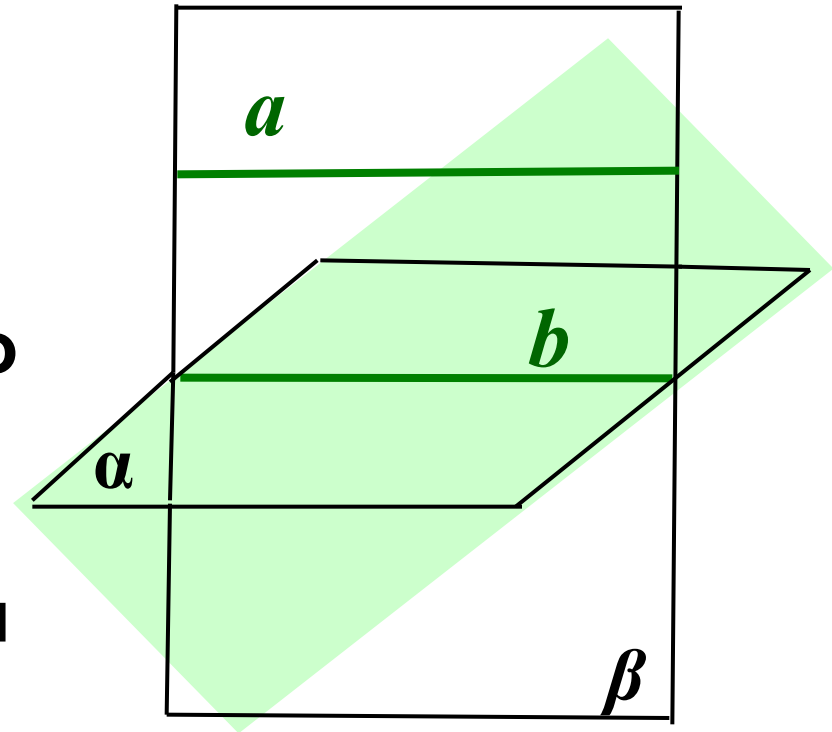
$$DD_1 \parallel (AA_1B_1)$$

$$DD_1 \parallel (B_1C_1C)$$



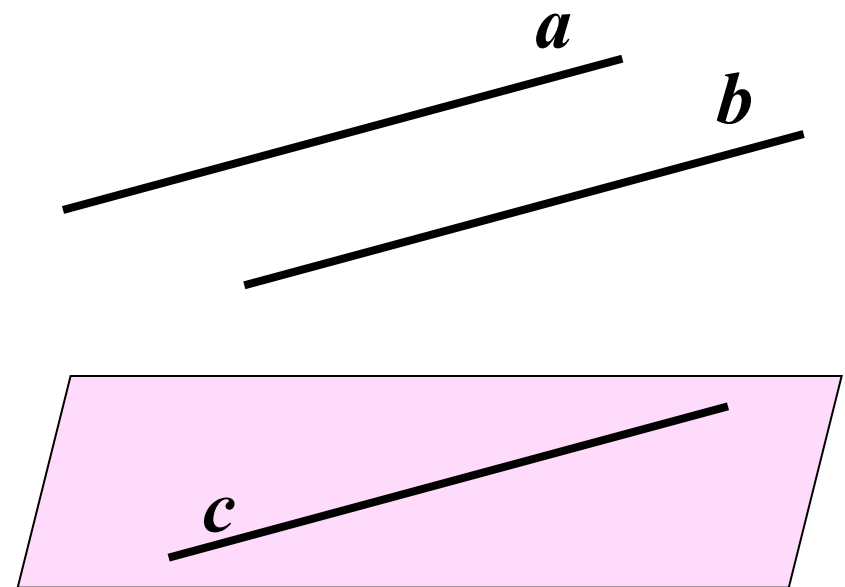
# Утверждение 1.

- Если плоскость проходит через данную прямую, параллельную другой плоскости, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой.



## Утверждение 2.

- Если одна из двух параллельных прямых параллельна данной плоскости, то другая прямая либо также параллельна этой плоскости, либо лежит в этой плоскости.



# Задача №18 (б)

Дано:  $C \in AB$ ;  $A \in \alpha$ ;  $BB_1 \parallel CC_1$

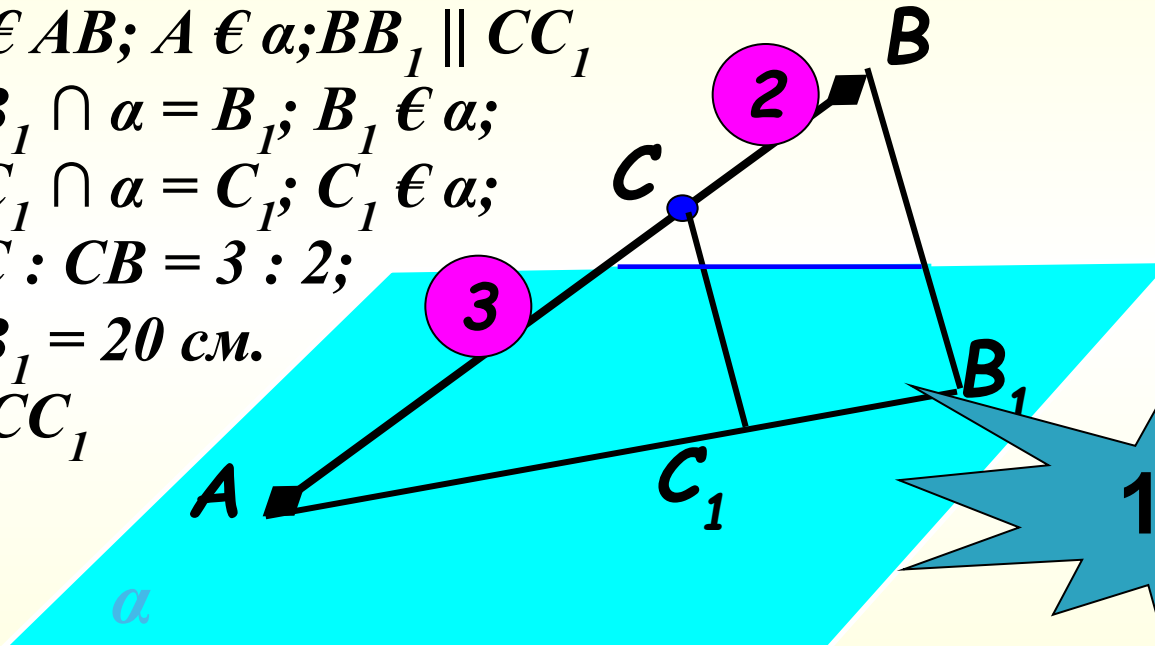
$BB_1 \cap \alpha = B_1$ ;  $B_1 \in \alpha$ ;

$CC_1 \cap \alpha = C_1$ ;  $C_1 \in \alpha$ ;

$AC : CB = 3 : 2$ ;

$BB_1 = 20$  см.

Найти:  $CC_1$



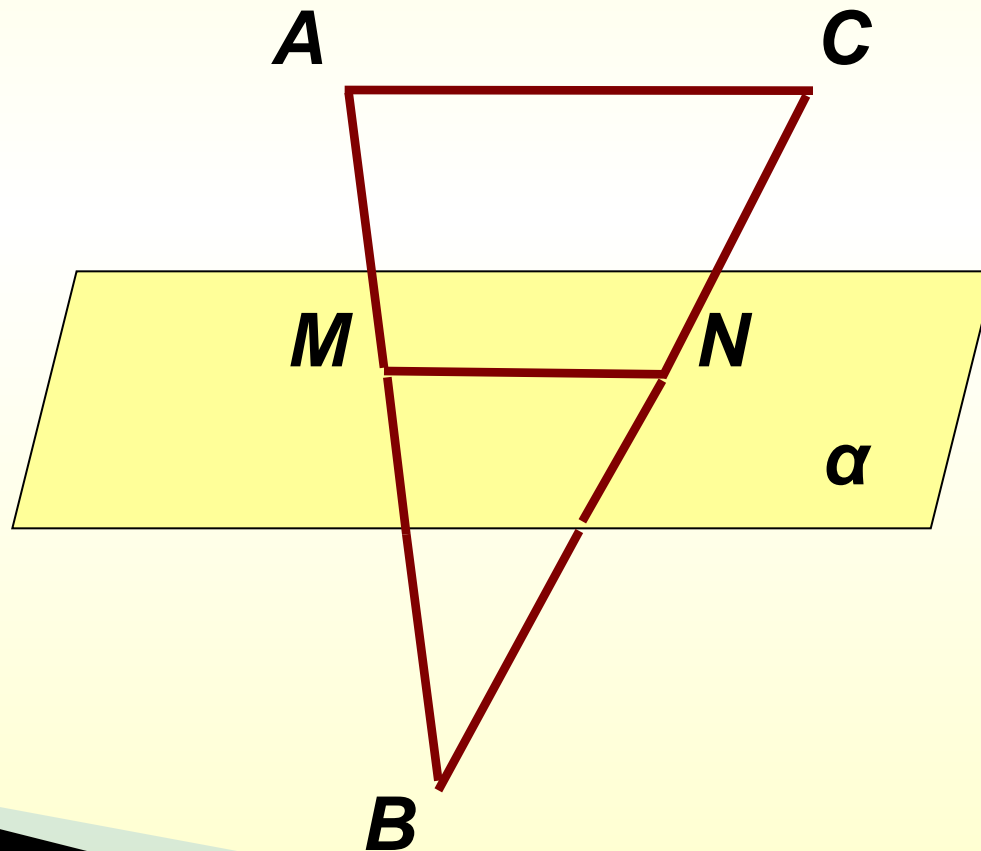
1. Доказать, что точки  $A$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  лежат на одной прямой.

2. Найти  $CC_1$  используя подобие треугольников.

№ 26

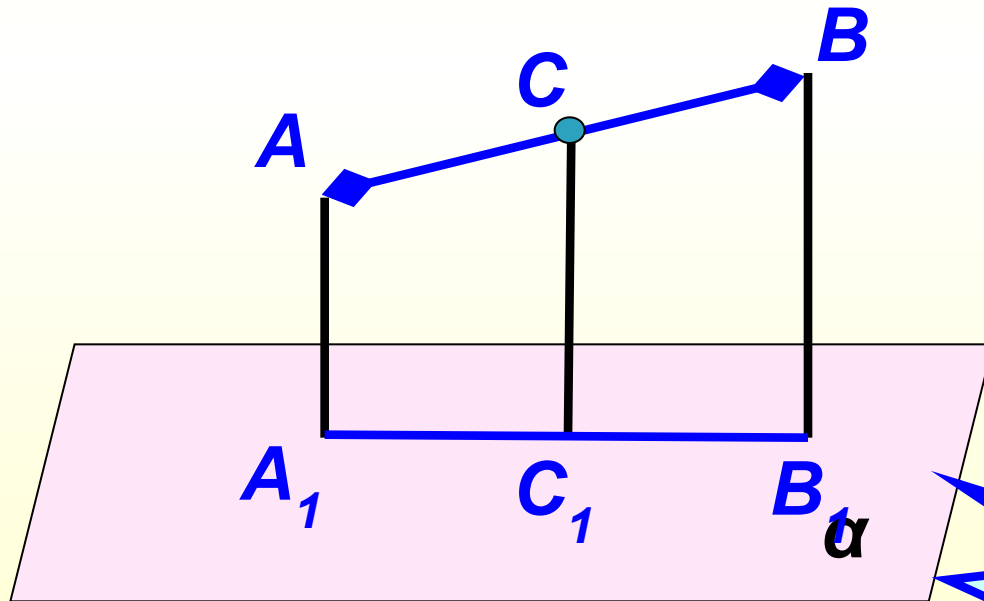
Дано:  $AC \parallel \alpha$ ,  $AB \cap \alpha = M$ ;  
 $CB \cap \alpha = N$ .

Доказать:  $\triangle ABC$  подобен  $\triangle MNB$ .



## Задача.

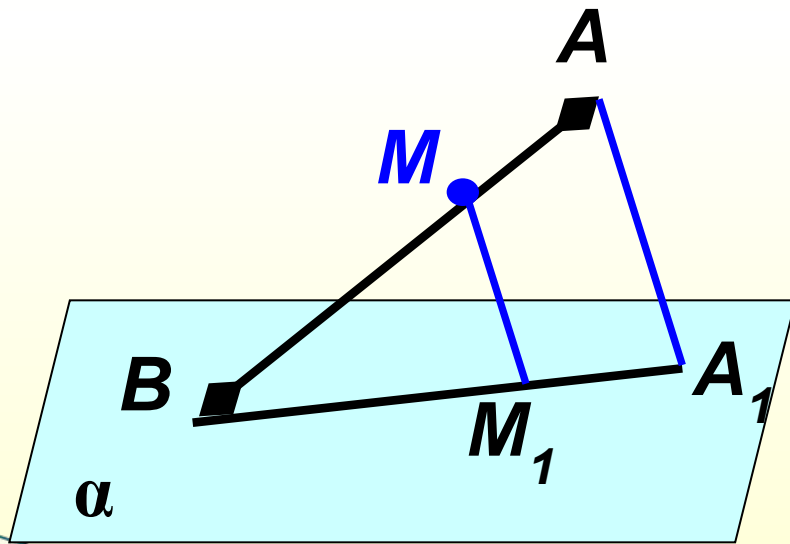
- Отрезок  $AB$  не пересекает плоскость  $\alpha$ . Через середину отрезка  $С$  и концы отрезка  $A$  и  $B$  проведены прямые, параллельные между собой и пересекающие плоскость  $\alpha$  в точках  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$ .  
Вычислить длину отрезка  $CC_1$ , если  $AA_1 = 5$ ,  $BB_1 = 7$ .



**Ответ: 6**

# Задача.

- Точка  $M$  лежит на отрезке  $AB$ . Отрезок  $AB$  пересекает плоскость  $\alpha$  в точке  $B$ . Через  $A$  и  $B$  проведены параллельные прямые, пересекающие  $\alpha$  в точках  $A_1$  и  $M_1$ .



а) Докажите, что  $A_1$ ,  $M_1$  и  $B$  лежат на одной прямой.

б) Найдите длину отрезка  $AB$ , если  $AA_1 : MM_1 = 3 : 2$ ,  $AM = 6$ .

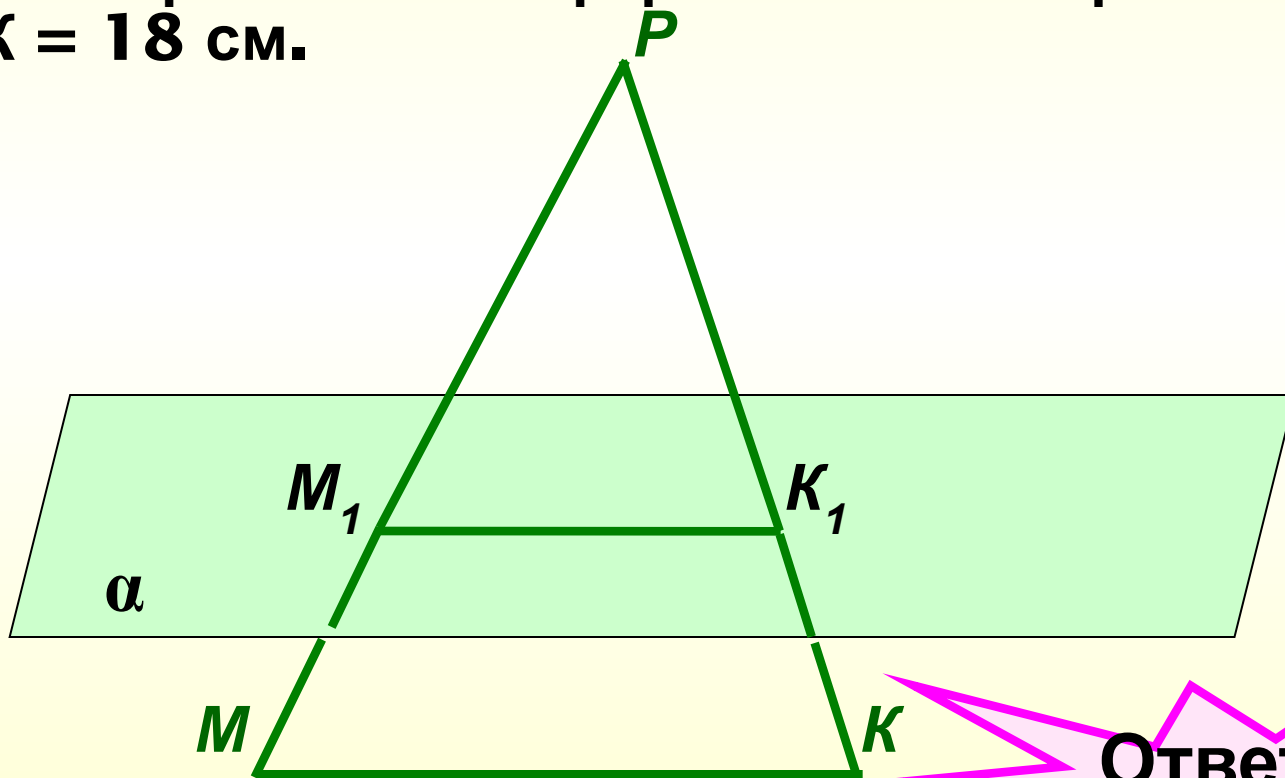
Ответ: 1

2



# Задача.

- Дан треугольник  $МКР$ . Плоскость, параллельная прямой  $МК$ , пересекает  $МР$  в точке  $М_1$ ,  $РК$  – в точке  $К_1$ . Найдите  $М_1К_1$ , если  $МР : М_1Р = 12 : 5$ ,  $МК = 18$  см.



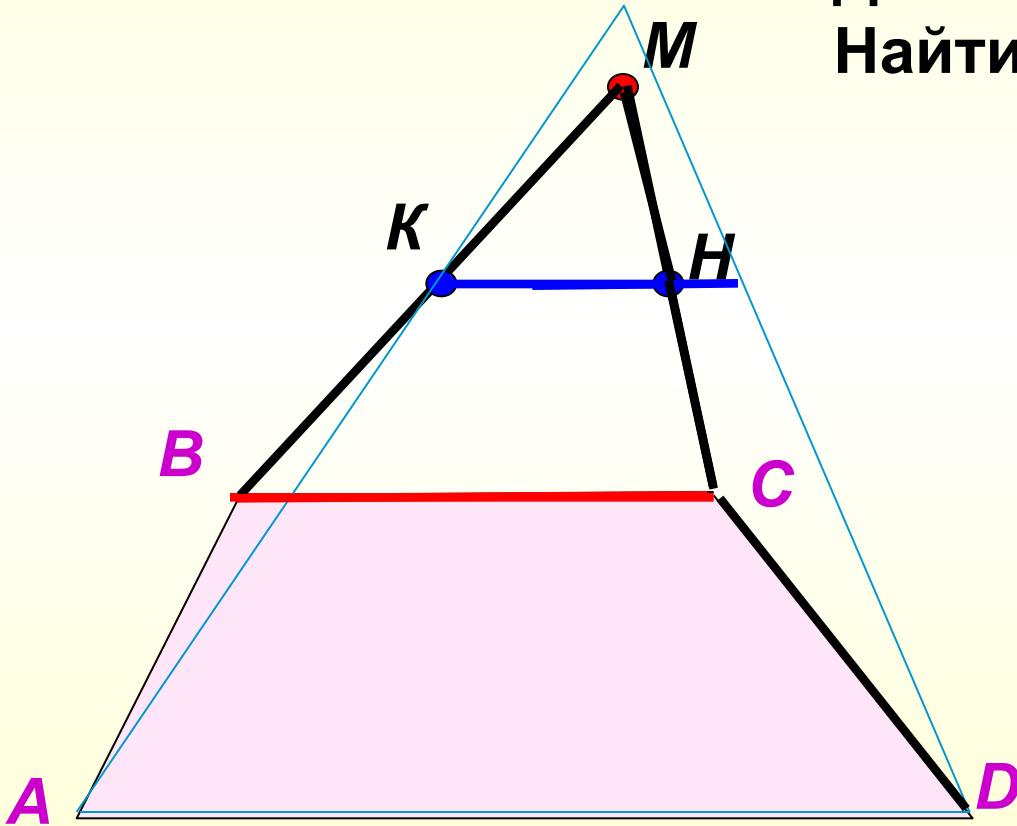
**Ответ: 7,5**

**см**

???

Дано:  $ABCD$  – трапеция,  $BC = 12$  см,  
 $M \notin (ABC)$ ,  $BK = KM$ .

Доказать:  $(ADK) \cap MC = H$   
Найти:  $KH$ .



Ответ: 6

см

**Дано:  $a$  – прямая,  $c$  – прямая**  
 **$a \in \alpha$ ,  $a \in \beta$**

**25.**

Пусть плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  пересекаются по прямой  $a$  (см. рис. 9). Пусть и  $c \in \alpha$ ,  $c \in \beta$ .

Тогда так как  $a \subset \alpha$ , а  $c \not\subset \alpha$  и  $c \parallel a$ , то по теореме п. 6  $a \parallel \alpha$ . Аналогично, так как  $a \subset \beta$ ,  $c \not\subset \beta$  и  $c \parallel a$ , то по теореме п. 6  $a \parallel \beta$ .

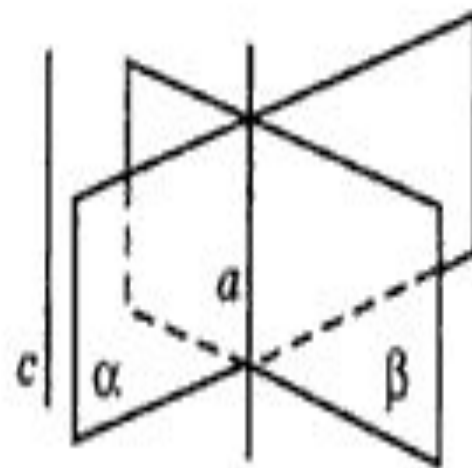


Рис. 9

27.

Дано:  $C \in AB$ ,  $AB : BC = 4 : 3$ ,  $CD = 12$  см,  $CD \parallel \alpha$ ,  $B \in \alpha$ .

Доказать:  $AD \cap \alpha = E$ .

Найти:  $BE = ?$

1. Докажем, что  $AD$  пересекает  $\alpha$  (см. рис. 10, а).

Предположим что это не так. Тогда  $AD$  либо

1) лежит в  $\alpha$ , либо 2) параллельна  $\alpha$ .

1) Если  $AD \subset \alpha \Rightarrow C \in \alpha$ , но  $C \in CD \parallel \alpha$ , т. е. по определению  $CD$  не имеет общих точек с  $\alpha$ , следовательно, 1) неверно.

2) Рассмотрим плоскость  $ABD$ , она пересекает  $\alpha$  по некоторой прямой  $a$ , содержащей точку  $B$  (аксиома А3) и по следствию 1 теоремы п. 6  $CD \parallel a$  (так как  $CD \subset ABD$  и  $CD \parallel \alpha$ ).

Если  $AD \parallel \alpha$ , то  $AD \parallel a$  по тому же следствию 1 (так как  $AD \subset ABD$ )  $\Rightarrow AD \parallel a \parallel CD$ , но  $AD$  и  $CD$  пересекаются в точке  $D$ , следовательно 2) тоже неверно.

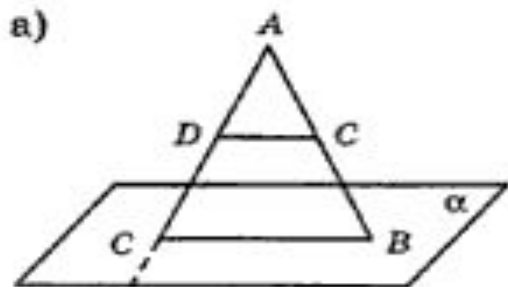
Следовательно,  $AD$  пересекает  $\alpha$  в какой-то точке  $E$ , причем  $E \in a$  (так как  $E \in \alpha$  и  $ABD$ , а значит, их общей прямой является  $a$ ).

2. Найдем  $BE$ .

$BE$  лежит на линии пересечения  $a \Rightarrow BE \parallel CD \Rightarrow \triangle ABE \sim \triangle ACD \Rightarrow BE : CD = AB : AC$ , так как  $AB : BC = 4 : 3$ ,  $AC = AB - BC = AB - \frac{3}{4}AB = \frac{1}{4}AB \Rightarrow BE = 4 \cdot CD = 4 \cdot 12 = 48$  (см).

О т в е т: 48 см.

а)



б)

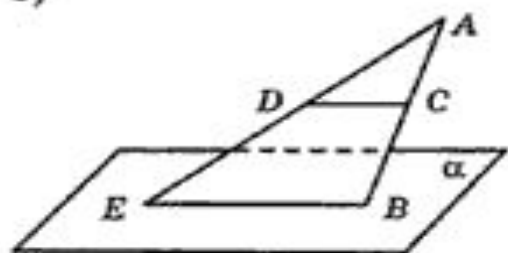


Рис. 10

29.

См. рис. 11.

Дано:  $ACBD$  — трапеция,  $BC = 12$  см — основание  $M \in ABC$ ,  $K$  — середина  $BM$ .

Доказать:  $MC \cap ADK = H$ .

Найти:  $KH$ .

1. Рассмотрим плоскость  $MBC$ , она пересекает  $ABC$  по прямой  $BC$ , а  $AD \parallel BC$  (как основания трапеции) и не лежит в  $MBC \Rightarrow AD \parallel MBC$  по следствию 1.

2. Проведем плоскость  $ADK$ :  $BC \parallel AD, AD \subset ADK, BC \notin ADK \Rightarrow$  по следствию 1  $BC \parallel ADK$ .

3.  $ADK$  и  $MBC$  имеют общую точку  $K \Rightarrow$  по аксиоме А3 пересекаются по прямой  $a$ , проходящей через точку  $K$ .

Так как  $AD \subset ADK$  и по п. 1  $AD \parallel MBC \Rightarrow$  по следствию 1  $AD \parallel a$ .

Пусть  $a$  пересекает  $MC$  в точке  $H$ . Тогда получим  $HK \parallel AD \parallel BC \Rightarrow HK$  — средняя линия треугольника  $MBC$  (так как  $K$  — середина  $MB$  и  $HK \parallel BC$ )  $\Rightarrow HK = \frac{1}{2} \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6$ .

Ответ: 6 см.

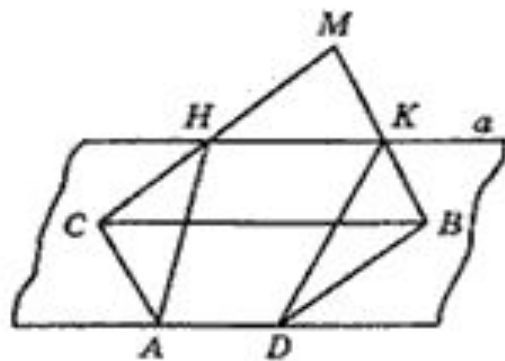


Рис. 11

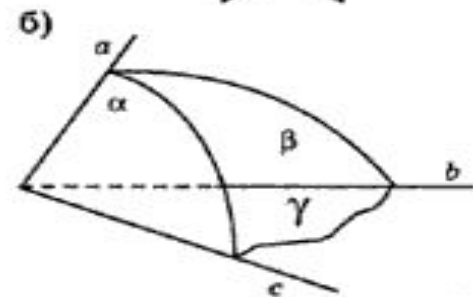
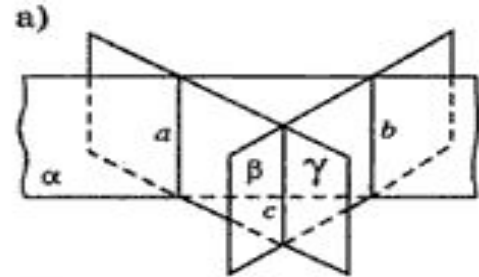


Рис. 12

33.

Пусть даны плоскости  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ . И пусть  $\alpha \cap \beta = a$ ,  $\beta \cap \gamma = b$ ,  $\gamma \cap \alpha = c$ .  
 Прямые  $a$  и  $b \subset \alpha \Rightarrow$  либо  $a \parallel b$ , либо  $a \cap b$ .

Рассмотрим первый случай:  $a \parallel b$  (см. рис. 12, а).

1. Так как  $a \subset \alpha$ ,  $a \subset \beta \Rightarrow a \not\subset \gamma$  (иначе все три плоскости проходят через  $a$ , что противоречит условию).

2. Таким образом,  $a \not\subset \gamma$ ,  $b \subset \gamma$  и  $a \parallel b \Rightarrow a \parallel \gamma$  по теореме п. 6.

3.  $a \parallel \gamma$ ,  $a \subset \beta$ ,  $\beta \cap \gamma = c \Rightarrow a \parallel c$  по следствию 1.

Отсюда следует, что  $a \parallel b \parallel c$ .

Рассмотрим второй случай  $a \cap b$  (см. рис. 12, б):

<p>1. Пусть <math>a \cap b = A</math>. <math>A \in a \subset \alpha</math>,  <math>A \in b \subset \beta</math> и <math>A \in b \subset \gamma \Rightarrow A \in \alpha, \beta, \gamma</math></p> <p>2. Пусть <math>c \cap b = B</math>. <math>B \in c \subset \gamma</math>,  <math>B \in b \subset \beta</math> и <math>B \in b \subset \alpha \Rightarrow B \in \alpha, \beta, \gamma</math></p>	}	<p>если <math>A \neq B \Rightarrow</math> прямая <math>AB \subset \alpha, \beta, \gamma</math>,              т. е. всем трем плоскостям, что              противоречит условию <math>\Rightarrow A = B</math>.</p>
---	---	--

3. Пусть  $c \cap a = C$ .  $C \in c \subset \gamma$ ,  $C \in c \subset \beta$  и  $C \in a \subset \alpha \Rightarrow C \in \alpha, \beta, \gamma \Rightarrow C = B$ ,  
 иначе  $CB$  принадлежит всем трем плоскостям, что неверно по условию.

Отсюда следует, что  $A = B = C$ , т. е. прямые пересекаются в одной точке.

35.

Обозначим эти прямые  $b$  и  $c$  (см. рис. 14), следовательно,  $c \cap b = M$ .

Если  $a \cap b$ , то либо 1)  $a \parallel b$ , либо 2)  $a \perp b$  и аналогично, если  $a \cap c$ , то либо 1)  $a \parallel c$ , либо 2)  $a \perp c$ .

Если в обоих случаях выполняется первый вариант, т. е.  $a \parallel b$  и  $a \parallel c \Rightarrow b \parallel c$ , но по условию  $b \cap c = M$ .

Значит выполняется хотя бы один из случаев 2) т. е. либо  $a \perp b$ , либо  $a \perp c$ .

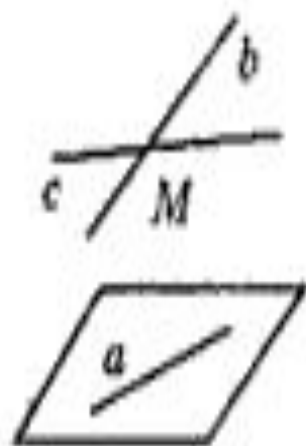


Рис. 14

# Начало и продолжение теории: часть 1, 2\_2, 3

