

# ПРЕДМЕТ НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

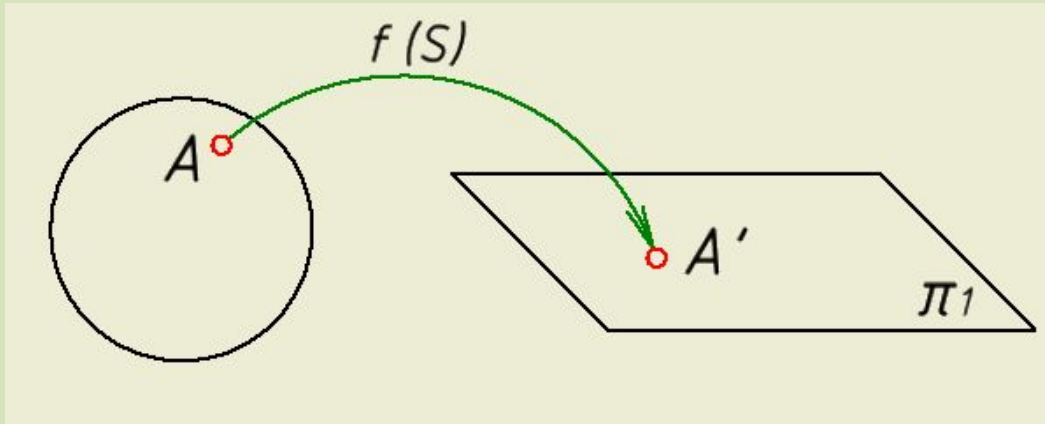
**Начертательная геометрия** является одним из разделов геометрии, в котором пространственные фигуры, представляющие совокупность точек, линий, поверхностей и тел, изучаются по их проекционным изображениям.

## **Начертательная геометрия изучает:**

- ***Методы графического отображения*** пространственных фигур на поверхностях отображения;
- ***Способы решения позиционных и метрических задач***, связанных с этими фигурами, по их графическим изображениям.

# МЕТОД ПРОЕКЦИЙ

Проецирование – **отображение фигур пространства на поверхности проекций**, причем такое, что каждой точке фигуры ставится в соответствие единственная точка – ее проекция.



**Аппарат проецирования :**

- что отображаем
- на что отображаем
- каким способом отображаем

**Две основные задачи проецирования:**

- 1. Прямая задача** – по оригиналу получить изображение
- 2. Обратная задача** – по проекции получить оригинал

# Принятые обозначения:

В пространстве	На плоскости проекций
<b><u>ТОЧКИ</u></b>	
$A, B, C...$	$A'; B'; C'; A''; B''; C''...$
<b><u>ЛИНИИ</u></b>	
$a, b, c, l...$	$a'; b'; ... a''; b''...$
<b><u>ПОВЕРХНОСТИ</u></b>	
$\alpha, \beta, \gamma...$	$\alpha'; \beta'; \gamma'...$

# Проекции с использованием прямых линий – проецирующих лучей

**Проекция точки** – точка пересечения проецирующей прямой, проходящей через данную точку, с плоскостью проекций.

**Проекция геометрической фигуры** – множество проекций ее точек.

**След геометрической фигуры** – фигура ее пересечения с плоскостью проекций.

**Конкурирующие точки** – точки, лежащие на одной проецирующей прямой.

# Центральное проецирование

Центральное проецирование – отображение, при котором **все** проецирующие прямые проходят через одну точку – центр проецирования

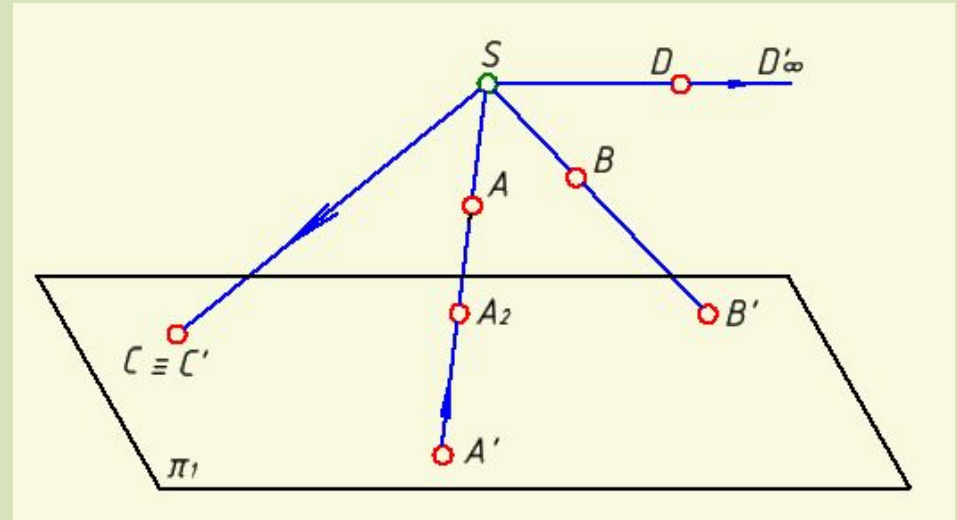
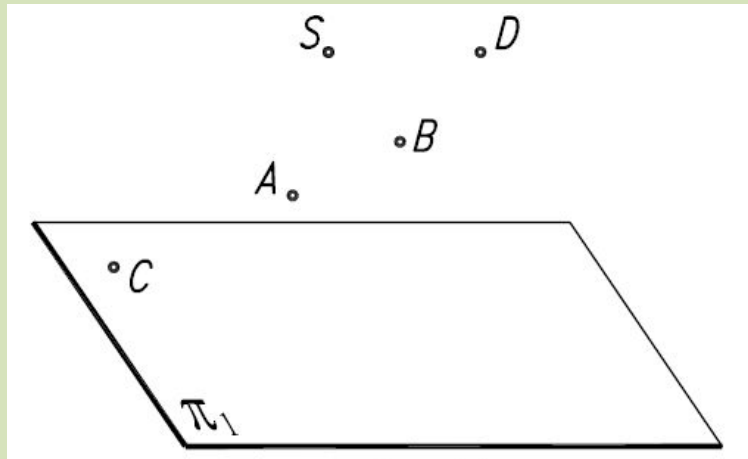


Рис. 1.1

$S$  – центр проецирования  
 $\pi_1$  – плоскость проекций

$SA', SB'$  – проецирующие лучи  
 $A'$  – центральная проекция точки  $A$

# Центральное проецирование

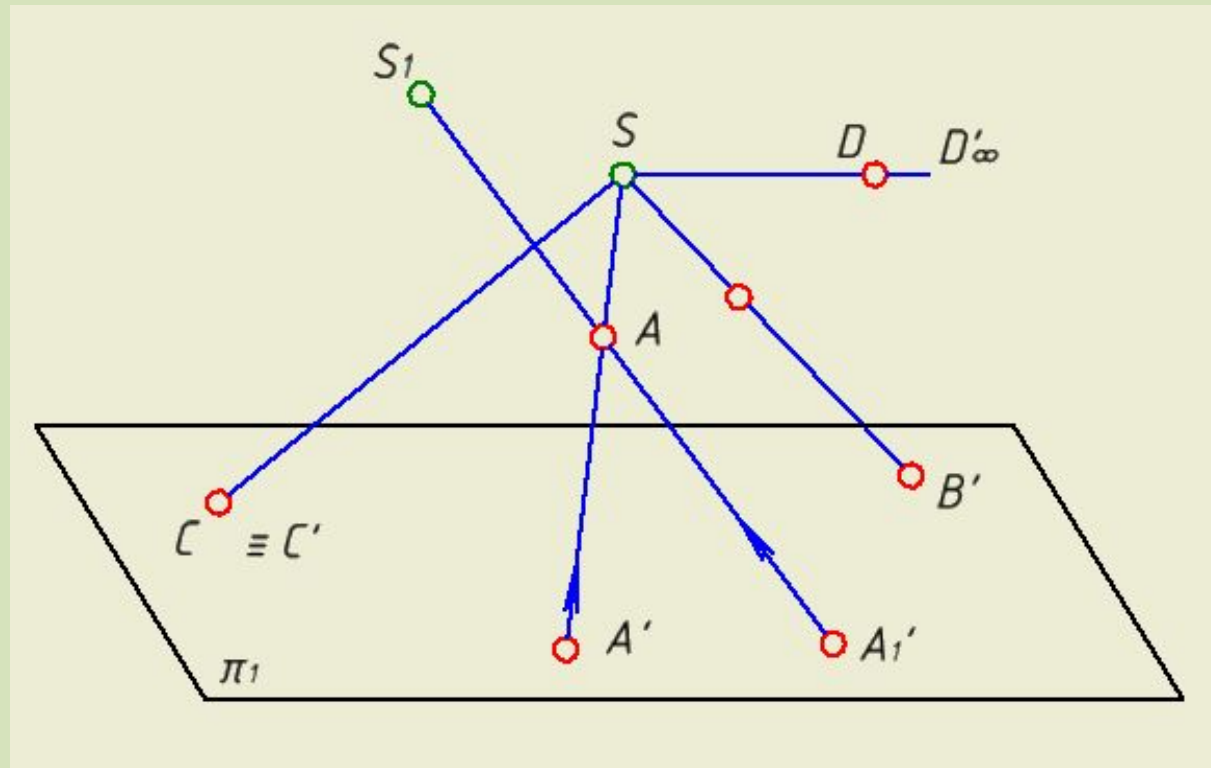


Рис. 1.1

$S_1$  – центр проецирования

$S_1A_1'$ ,  $SB_1'$  – проецирующие лучи

$A_1'$  – центральная проекция точки  $A$

# Параллельное проецирование

Параллельное проецирование – отображение, при котором **все** проецирующие прямые проходят параллельно заданному направлению

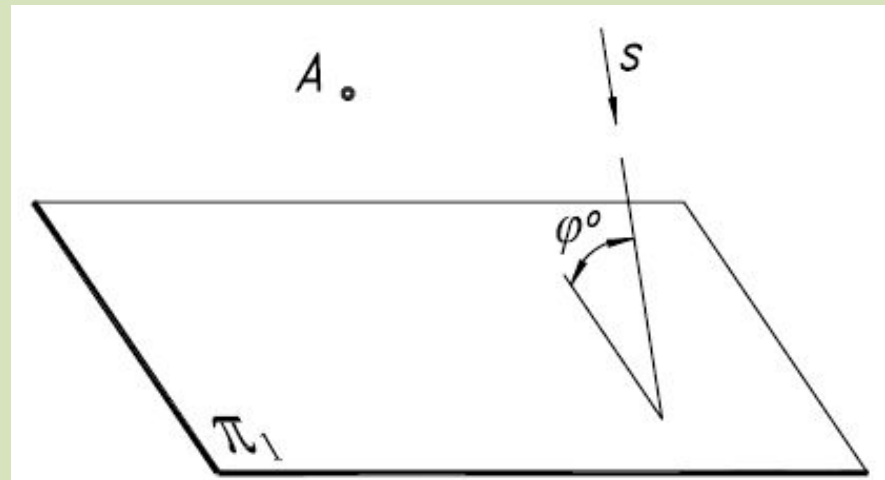


Рис. 1.2

$S$  – направление проецирования,  $\phi \neq 90^\circ$   
 $\pi_1$  – плоскость проекций

# Параллельное проецирование

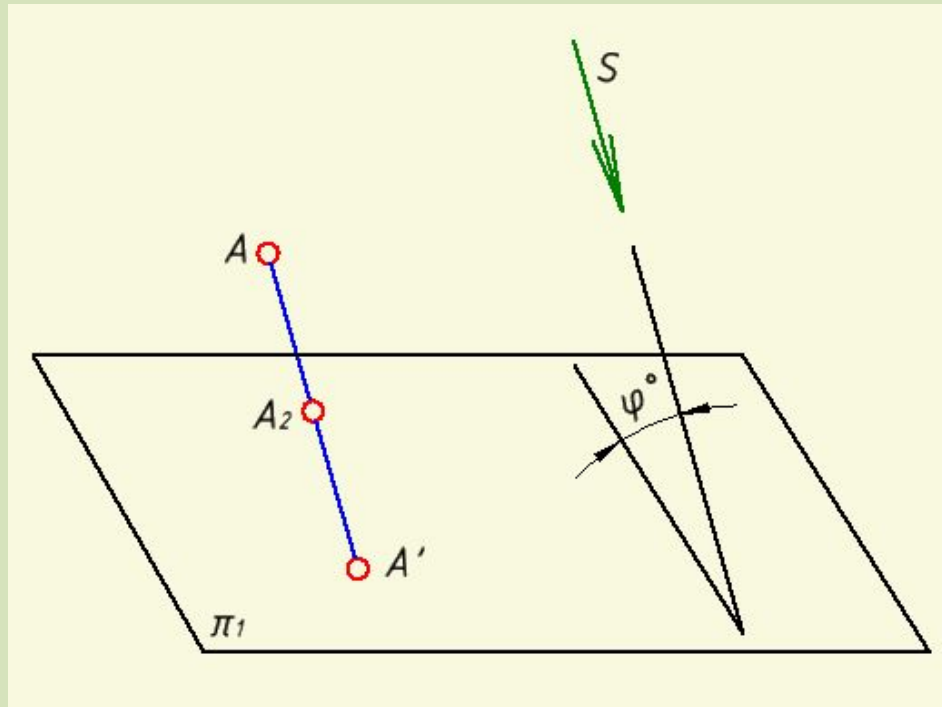


Рис. 1.2

$S$  – направление проецирования,  $\phi \neq 90^\circ$

$\pi_1$  – плоскость проекций

$AA'$  – проецирующий луч,  $AA' \parallel S$

$A'$  – параллельная проекция точки  $A$



# Параллельное проецирование

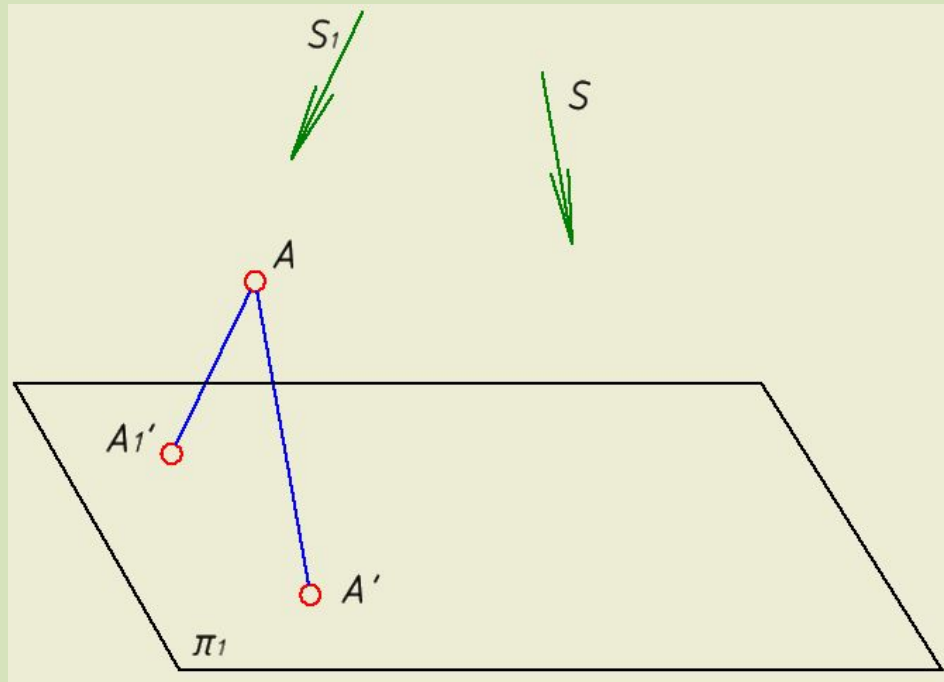


Рис. 1.2

$S$  – направление проецирования,  $\phi \neq$

$90^\circ$

$AA'$  – проецирующий луч,  $AA' \parallel S$

$A'$  – параллельная проекция точки  $A$

$S_1$  – направление проецирования,  $\phi_1 \neq$

$90^\circ$

$AA_1'$  – проецирующий луч,  $AA_1' \parallel S_1$

$A_1'$  – параллельная проекция точки  $A$

# Ортогональное проецирование

Ортогональное проецирование – отображение, при котором **все проецирующие прямые перпендикулярны плоскости проекций**

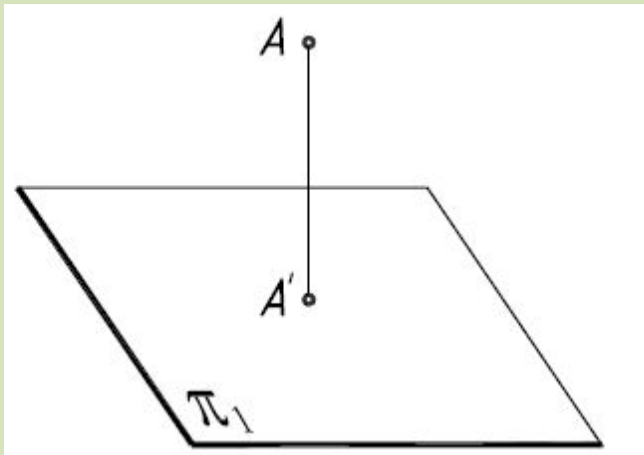
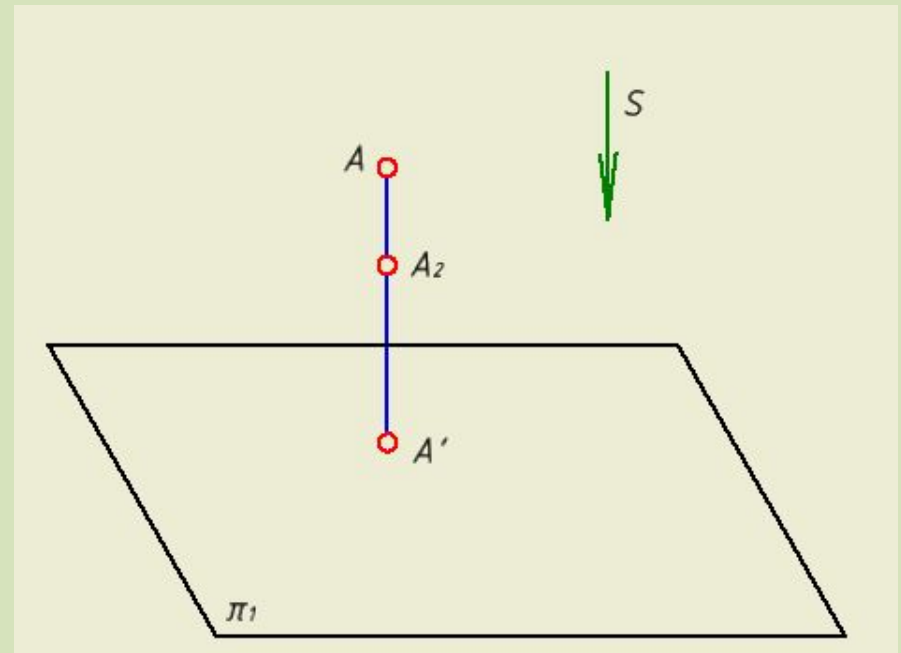


Рис. 1.3



$S$  – направление проецирования,  $\phi = 90^\circ$   $S \perp \pi_1$

$\pi_1$  – плоскость проекций

$AA'$  – проецирующий луч,  $AA' \perp \pi_1$

$A'$  – ортогональная проекция точки  $A$

# Ортогональное проецирование

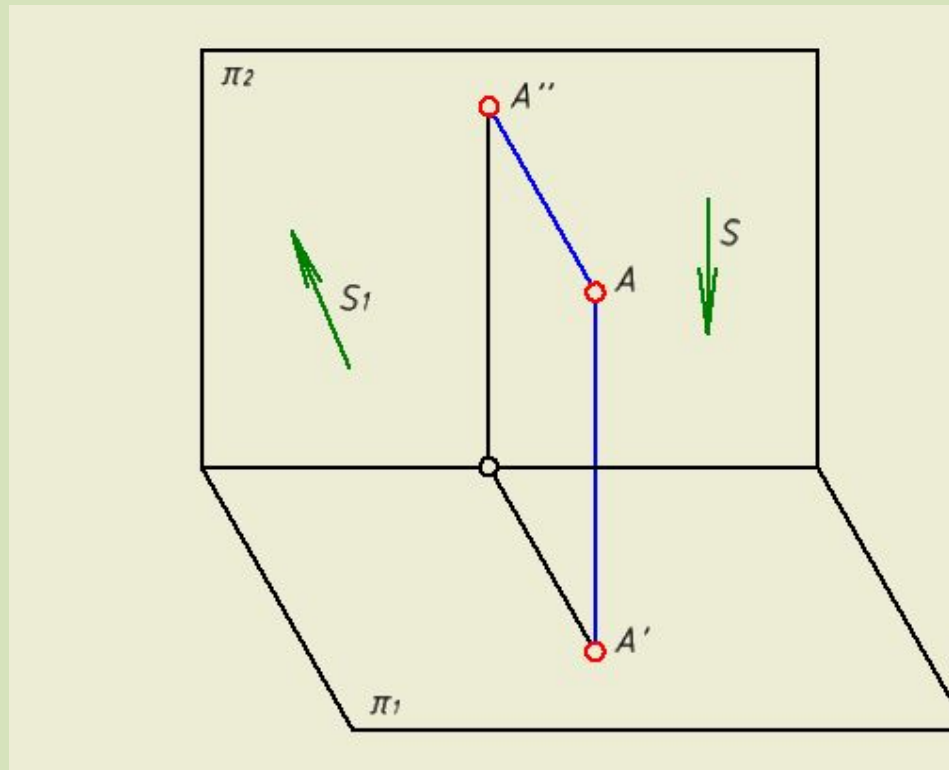
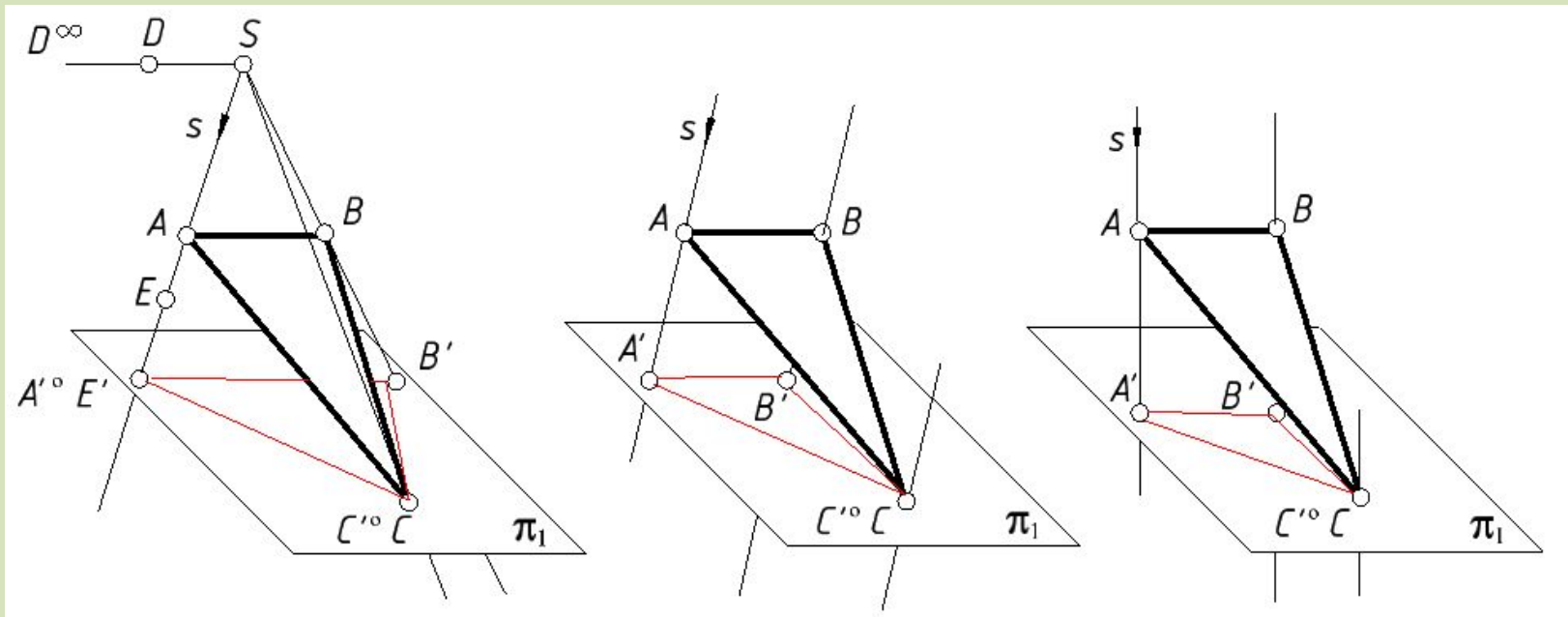


Рис. 1.3

- $S$  – направление проецирования,  $\phi = 90^\circ$        $S \perp \pi_1$   
 $S_1$  – направление проецирования,  $\phi_1 = 90^\circ$        $S_1 \perp \pi_2$   
 $\pi_1, \pi_2$  – плоскости проекций  
 $AA', AA''$  – проецирующие лучи,  $AA' \perp \pi_1, AA'' \perp \pi_2$   
 $A', A''$  – ортогональные проекции точки  $A$



Для определения положения точки в пространстве необходимо иметь **две ее проекции, полученные при двух различных направлениях проецирования.**

# ОРТОГОНАЛЬНОЕ ПРОЕЦИРОВАНИЕ

## Инвариантные свойства ортогонального проецирования

*Инвариантными* или неизменными называются такие свойства геометрических фигур и отношений между ними, которые **не изменяются в процессе отображения.**

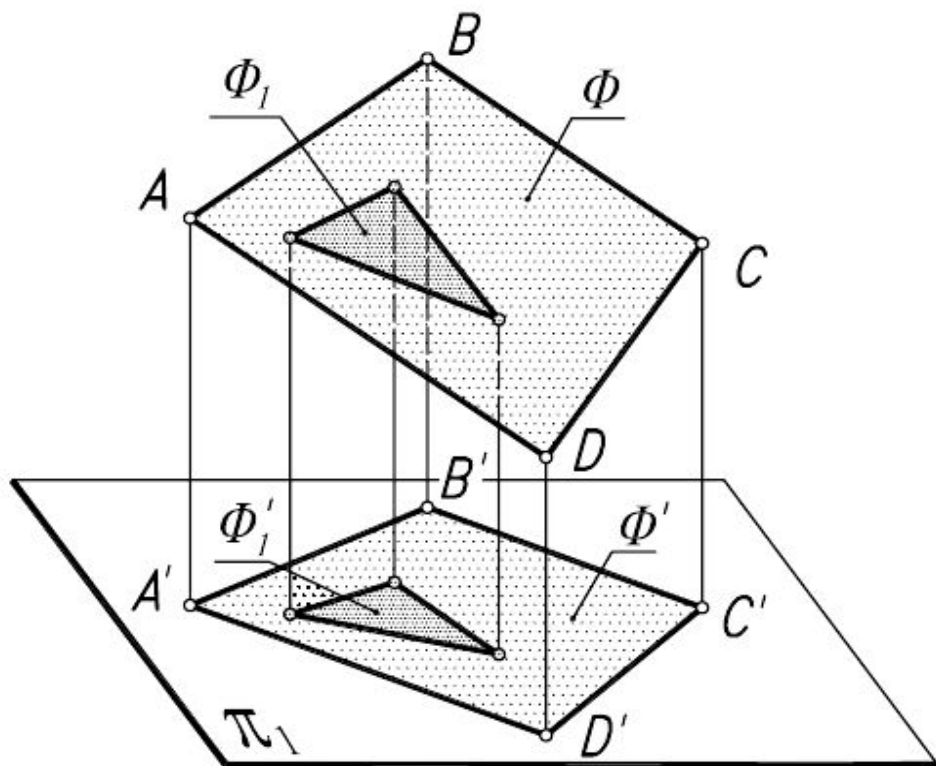


Рис.1.4

1. Проекция точки – есть точка  
 **$A'$  – проекция точки  $A$**   
 **$B'$  – проекция точки  $B$**
2. Проекция прямой, в общем случае, есть прямая  
 **$A'B'$  – проекция прямой  $AB$**   
 **$C'D'$  – проекция прямой  $CD$**
3. Если фигура  $\Phi_1$  принадлежит фигуре  $\Phi$ , то проекция фигуры  $\Phi_1$  принадлежит проекции фигуры  $\Phi$

$$\Phi_1 \subset \Phi \Rightarrow \Phi'_1 \subset \Phi'$$

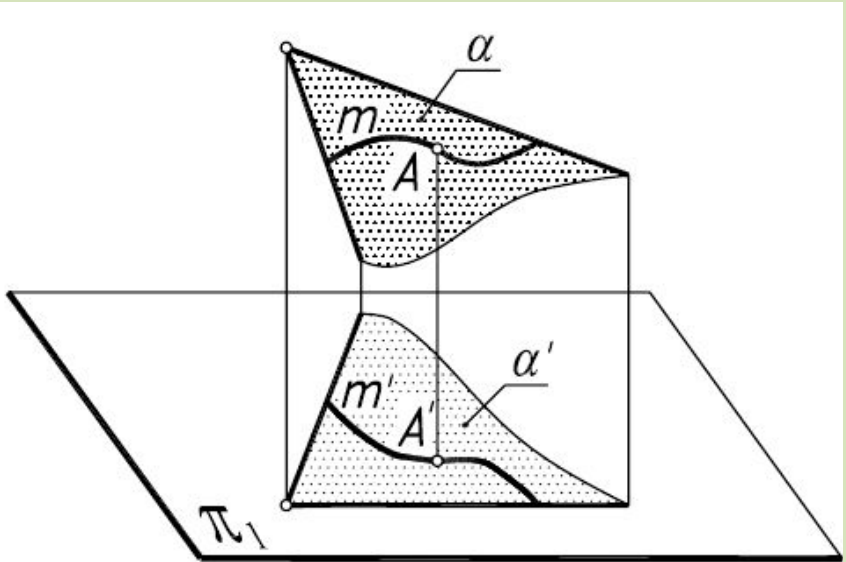


Рис.1.5

– Если точка  $A$  принадлежит линии  $m$ , то проекция точки  $A$  принадлежит проекции линии  $m$

$$A \in m \Rightarrow A' \in m'$$

– Если линия  $m$  принадлежит поверхности  $\alpha$ , то проекция линии  $m$  принадлежит проекции поверхности  $\alpha$

$$m \in \alpha \Rightarrow m' \in \alpha'$$

– Если точка  $A$  принадлежит линии  $m$ , которая принадлежит поверхности  $\alpha$ , то проекция точки  $A$  принадлежит проекции поверхности  $\alpha$

$$A \in m \in \alpha \Rightarrow A' \in \alpha'$$

– Если фигура  $\Phi$  принадлежит поверхности  $\alpha$ , перпендикулярной плоскости проекций, то **проекция фигуры  $\Phi$  принадлежит линии пересечения поверхности  $\alpha$  с плоскостью проекций – следу  $h_{0\alpha}$  поверхности  $\alpha$**

$$\Phi \subset \alpha \wedge \alpha \perp \pi_1 \Rightarrow \Phi' \subset h_{0\alpha}$$

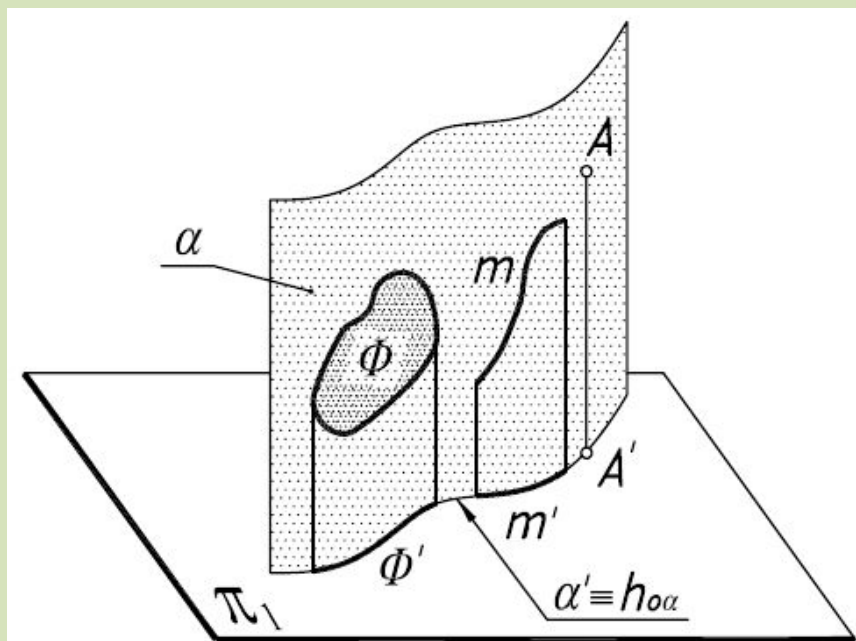


Рис.1.6

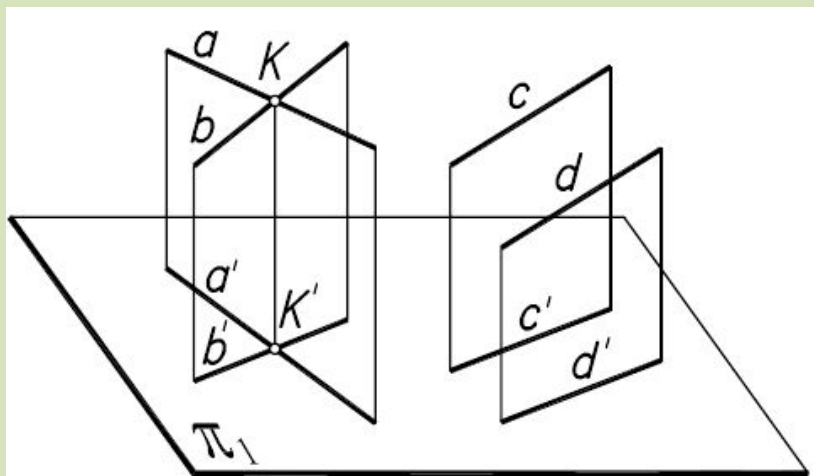


Рис.1.7

– Параллельные прямые проецируются в параллельные прямые

$$c \parallel d \Rightarrow c' \parallel d'$$

– Точка пересечения проекций пресекающихся прямых  $K'$  есть проекция точки пересечения самих прямых

$$a \cap b = K \Rightarrow a' \cap b' = K'$$

– Отношение длин отрезков параллельных прямых равно отношению длин их проекций

$$\frac{|AB|}{|CD|} = \frac{|A'B'|}{|C'D'|}$$

– Если точка  $K$  делит отрезок в данном отношении, то и проекция точки  $K$  разделит проекции отрезка в том же отношении

$$\frac{|MK|}{|KN|} = \frac{|M'K'|}{|K'N'|}$$

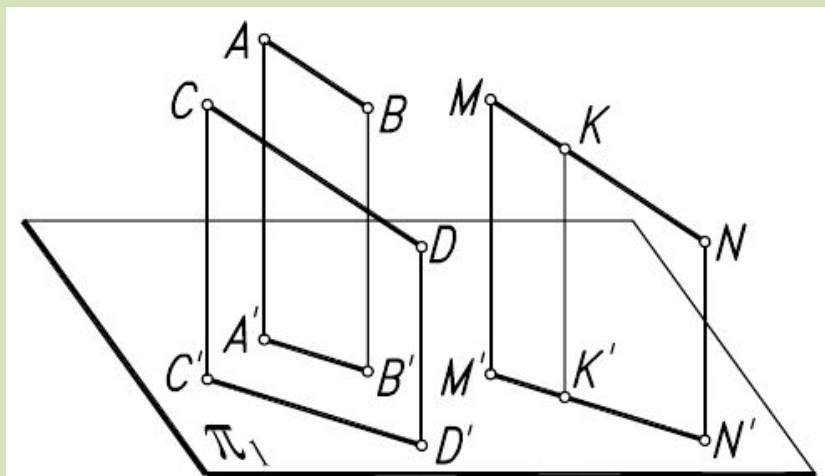
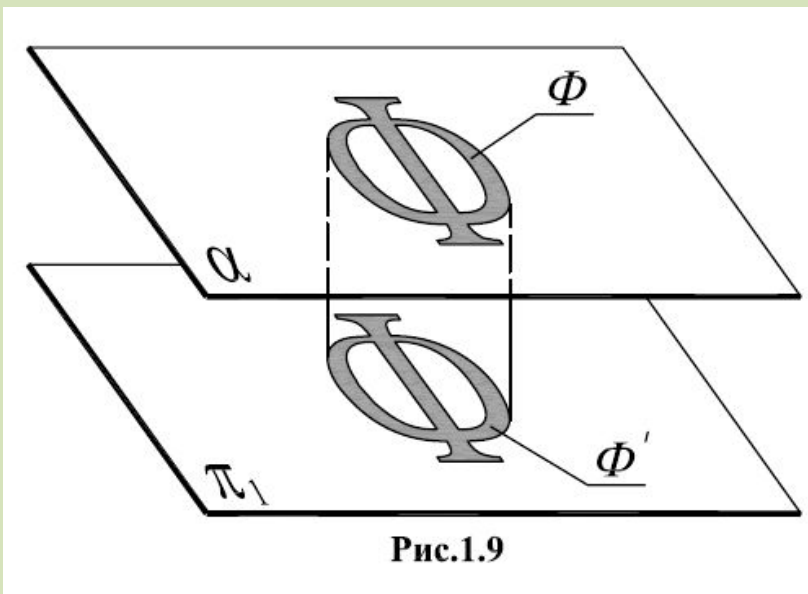


Рис.1.8



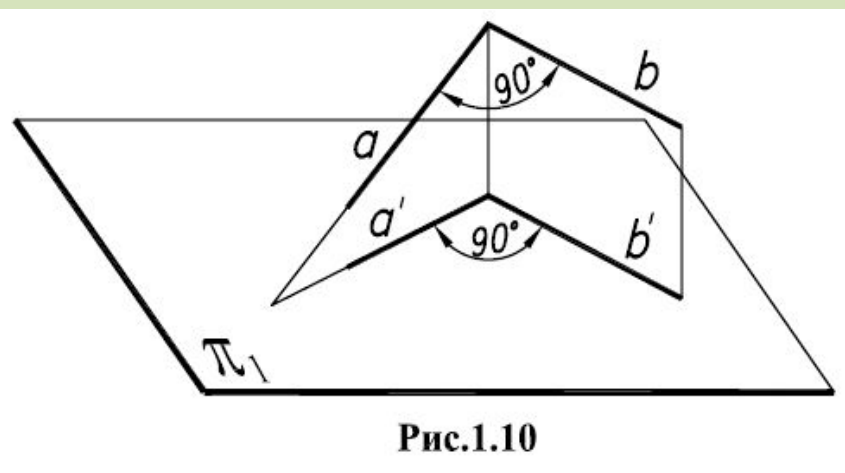


– Если фигура принадлежит плоскости, параллельной плоскости проекций, то на эту плоскость проекций данная фигура проецируется без искажения

$$\Phi \subset \alpha \quad \wedge \quad \alpha \parallel \pi_1 \Rightarrow \Phi = \Phi'$$

***Теорема о проецировании прямого угла:***

Если одна сторона прямого угла параллельна плоскости проекций, а другая сторона не перпендикулярна к ней, то прямой угол проецируется без искажения на данную плоскость проекций



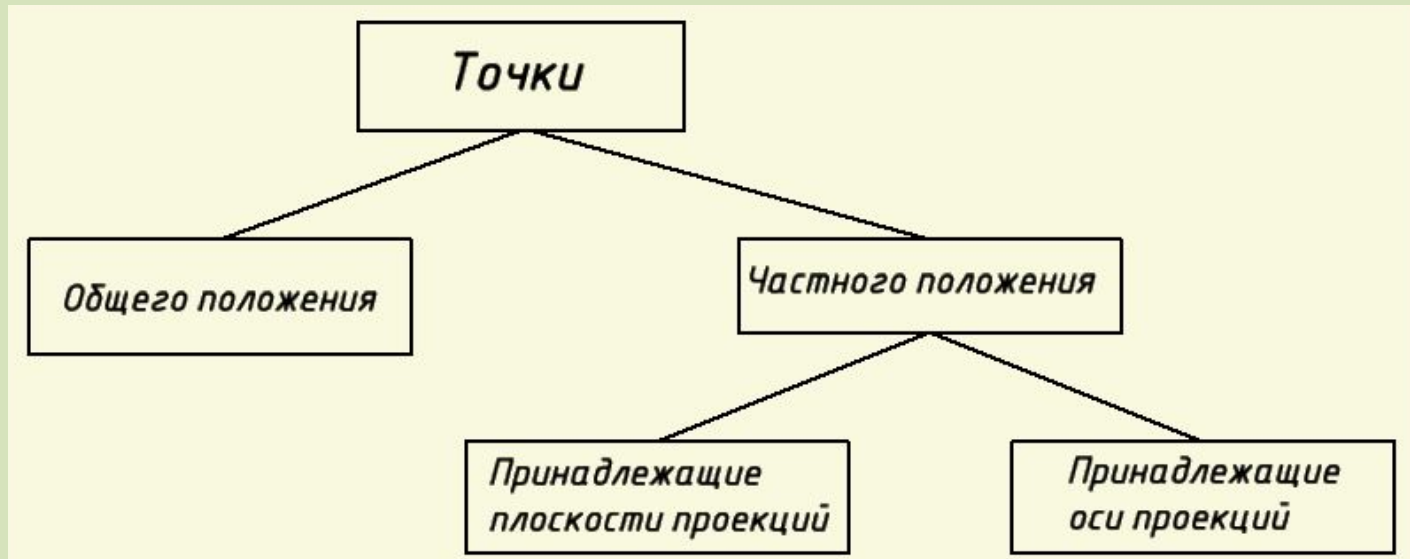
$$a \cap b; a \perp b; b \parallel \pi_1; a \cap \pi_1 \neq 90^\circ \\ \Rightarrow a' \perp b'$$

# ПРОЕКЦИРОВАНИЕ ТОЧКИ

**Точка** – неопределяемое понятие геометрии

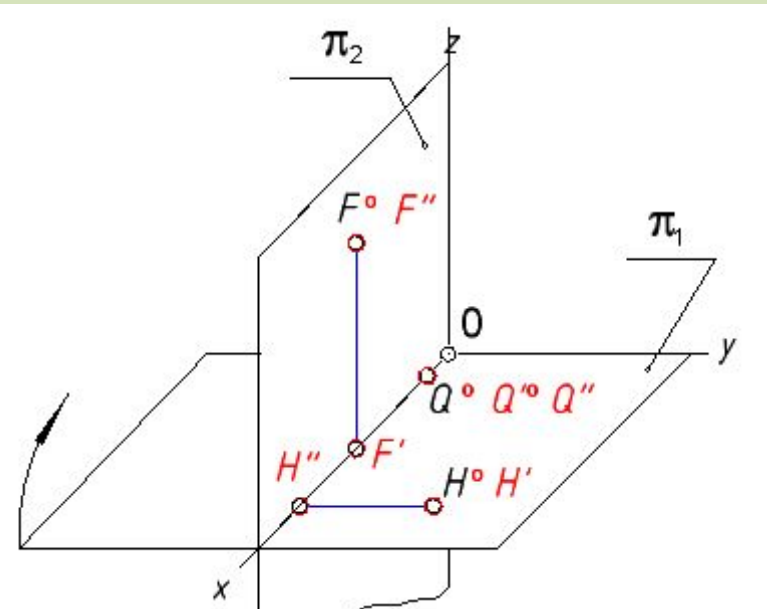
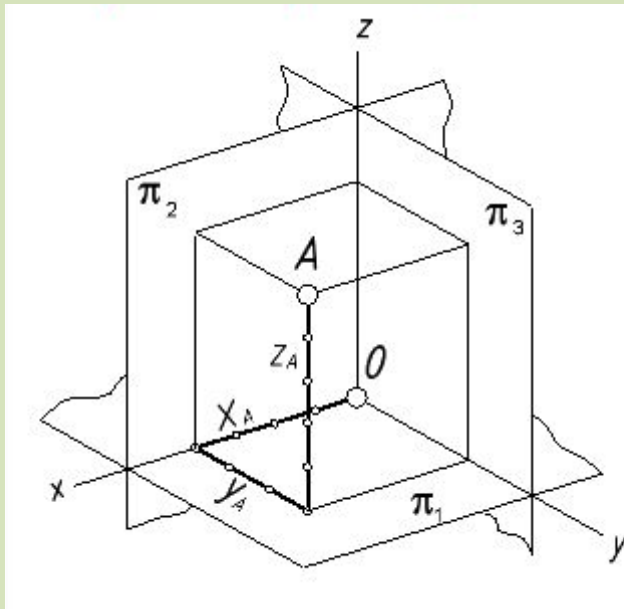
**В пространстве** точка задается **ее координатами  $A(x, y, z)$**

**На чертеже** точка задается **двумя ее проекциями**



**Точки общего положения** – точки, у которых **ни одна из координат не равна нулю**

**Точки частного положения** – точки, у которых **одна, две или три координаты равны нулю**



Точка  $A$  – точка **общего положения**

Точки  $H, F, Q$  - точки **частного положения**

$$H \in \pi_1; H'' \in x$$

$$F \in \pi_2; F' \in x$$

$$Q \in x; Q', Q'' \in x$$

**Координаты точки** – упорядоченные **числа**, определяющие **положение точки** на прямой, поверхности (плоскости), в пространстве

**Плоскости проекций** – **взаимно перпендикулярные плоскости**, на которых получают отображения геометрических фигур

**Оси проекций** – взаимно перпендикулярные прямые, по которым пересекаются плоскости проекций

**Начало координат** – точка пересечения осей проекций

**Четверти пространства** – **четыре подпространства**, получаемые в результате деления пространства двумя взаимно перпендикулярными плоскостями проекций

**Октанты пространства** – **восемь подпространств**, получаемые в результате деления пространства тремя взаимно перпендикулярными плоскостями проекций

**Ортогональная проекция точки** – **основание перпендикуляра, опущенного из данной точки на плоскость проекций**

**Комплексный чертеж (Эпюр Монжа)** – **чертеж, получаемый разворотом плоскостей проекций до совмещения их с фронтальной плоскостью и содержащий упорядоченные проекции геометрических фигур**

**Линия связи** – **перпендикуляр к оси проекций**, на котором располагается **упорядоченная пара проекций точки** на комплексном чертеже

# Ортогональное проектирование точки на две плоскости проекций

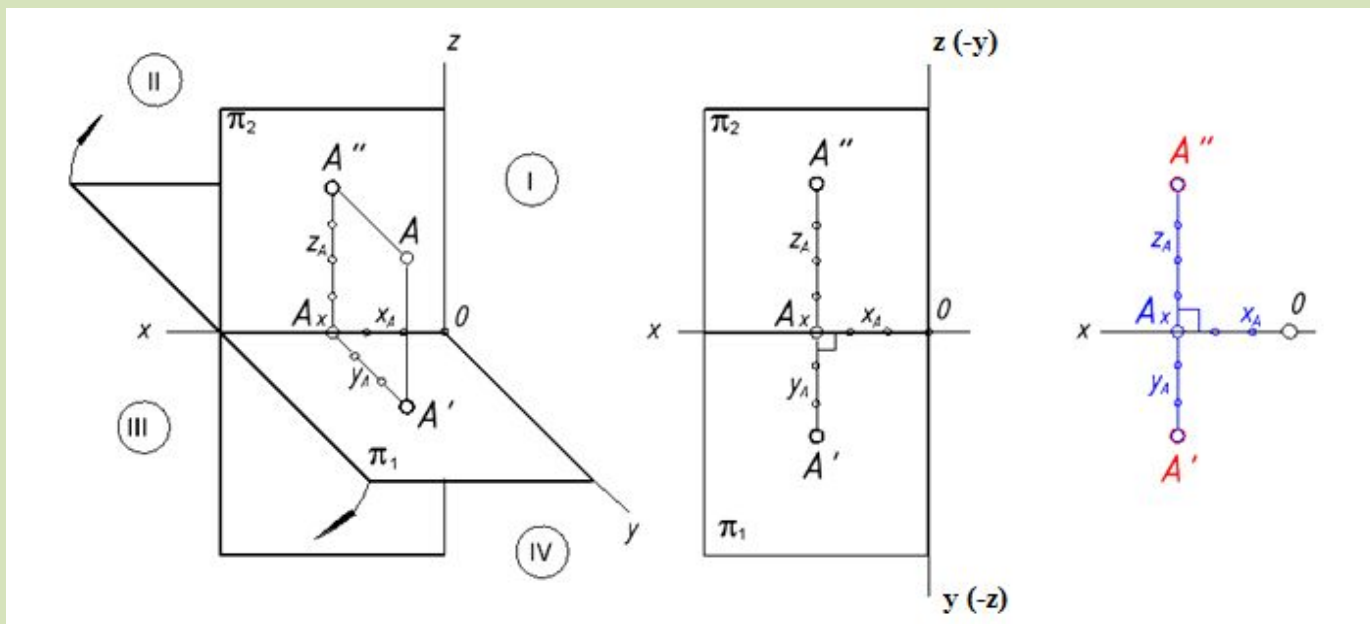


Рис. 1.11

Рис. 1.12

Рис. 1.13

- $\pi_1$  – горизонтальная плоскость проекций
- $A'$  – горизонтальная проекция точки  $A$
- $\pi_2$  – фронтальная плоскость проекций
- $A''$  – фронтальная проекция точки  $A$
- $x, y, z$  – оси проекций

$$AA' = A''A_x = z$$

$$AA'' = A'A_x = y$$

$$OA_x = x$$

$$A'(x, y), A''(x, z) \Rightarrow A(x, y, z)$$

Две проекции точки лежат на одном перпендикуляре к оси проекций. Поскольку плоскости проекций являются и координатными плоскостями – две проекции точки определяют ее положение в пространстве.

# Ортогональное проектирование точки на три плоскости проекций

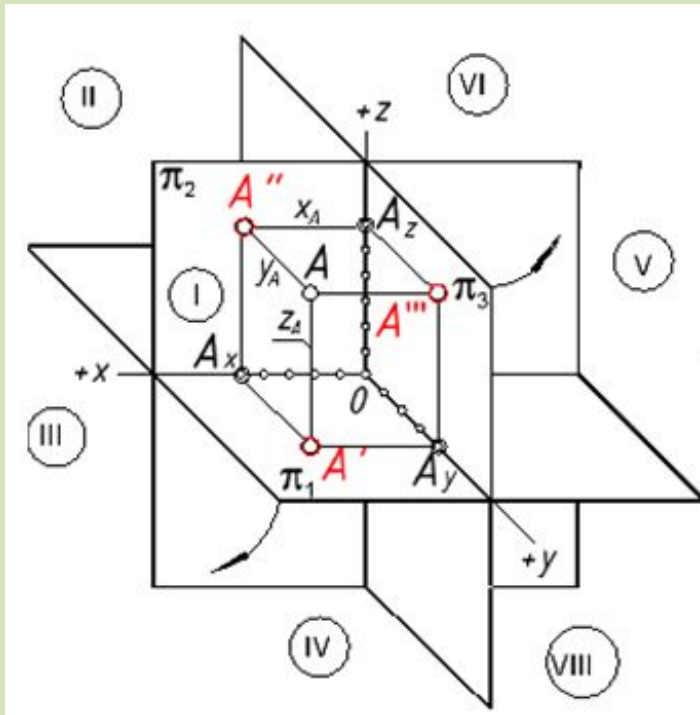


Рис. 1.14

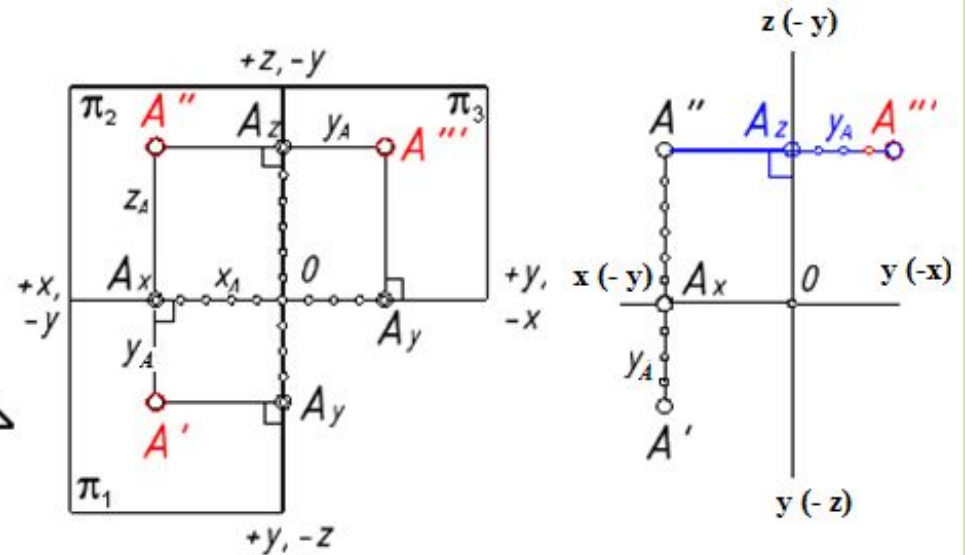


Рис. 1.15

$\pi_3$  – профильная плоскость проекций  
 $A'''$  – профильная проекция точки  $A$

$$AA' = A''A_x = A_z O = A'''A_y = z$$

$$AA'' = A'A_x = A_y O = A'''A_z = y$$

$$A_x O = A''A_z = A'A_y = AA''' = x$$

Любые две проекции точки полностью определяют ее положение в пространстве.

Любая третья проекция точки может быть построена по двум заданным ее проекциям.