



# ТЕПЛОМАССООБМЕН

***Лекция 16. Основы теории массообмена***

Процессы массообмена широко распространены в холодильной технике и в той или иной степени определяют эффективность работы соответствующих аппаратов и устройств

- в абсорбционных машинах,
- в испарителях и конденсаторах при наличии в хладагенте неконденсирующихся газов-примесей,
- в контактных аппаратах холодильников, кондиционеров, разделительных устройств.

Массообмен в аппаратах холодильной техники обычно протекает в *многофазных системах*:

- масса одного или нескольких компонентов перемещается внутри одной фазы (газ, жидкость),
- достигает раздела фаз,
- пересекает её (фазовый переход)
- и распространяется в другой фазе.

# Основные положения

**Массообмен (перенос массы, массоперенос)** – процесс, в результате которого **вещество** переносится из одной точки пространства в другое. Массообмен происходит в **смесях** нескольких веществ – **компонентов**.

При этом изменяется **концентрация** компонентов – их количество в единице объёма смеси:

**мольная (молярная)**  $C_i = N_i / V$ , кмоль/м<sup>3</sup>

или **массовая**  $\rho_i = m_i / V = (N_i M_i) / V = M_i C_i$ , кг/м<sup>3</sup>,

где  $m$  – масса, кг;  $M$  – молекулярная масса, кг/кмоль;  $N$  – количество киломолей,  $V$  – объем смеси, м<sup>3</sup>.

(Иногда массовая концентрация также обозначается  $C_i$ )

**Характеристики смеси** :  $V_{см}$  – объем,  $m_{см}$  – масса,  $\rho_{см}$  – плотность,  $p_{см}$  – давление,  $N_{см}$  – количество киломолей,  $w_{см}$  – скорость смеси (*индекс "см" обычно опускается*).

**Массовая** доля компонента в смеси: 
$$g_i = (Y_i) = \frac{m_i}{m} = \frac{m_i}{\sum_n m_i} = \frac{\rho_i}{\rho}$$

**Объёмная (мольная)** доля для **идеальных** газов:

$$r_i = (X_i) = \frac{V_i}{V} = \frac{N_i}{N} = \frac{p_i}{p}$$

**Связь:** 
$$g_i = \frac{m_i}{\sum_n m_i} = \frac{N_i M_i}{\sum_n N_i M_i} = \frac{r_i M_i}{\sum_n r_i M_i}$$

**ПРИМЕР.** Воздух – смесь двух газов: кислорода  $O_2$  ( $r_{O_2} = 0.21$ ,  $M_{O_2} = 32$  кг/кмоль) и азота  $N_2$  ( $r_{N_2} = 0.79$ ,  $M_{N_2} = 28$  кг/кмоль).

$$g_{O_2} = \frac{m_{O_2}}{m_{O_2} + m_{N_2}} = \frac{N_{O_2} M_{O_2}}{N_{O_2} M_{O_2} + N_{N_2} M_{N_2}} = \frac{0.21 \cdot 32}{0.21 \cdot 32 + 0.79 \cdot 28} = 0.233$$

$$N_{\text{возд}} M_{\text{возд}} = \sum_n N_i M_i \Rightarrow M_{\text{возд}} = \sum_n r_i M_i = 0.21 \cdot 32 + 0.79 \cdot 28 = 29$$

**Энтальпия** смеси: 
$$h_{см} = \sum_n g_i h_i$$

# МЕХАНИЗМЫ ПЕРЕНОСА МАССЫ

**Молекулярная диффузия** – самопроизвольный процесс переноса массы в неподвижных жидких, газообразных и твердых средах, обусловленный движением микрочастиц (молекул, атомов, ионов) данного компонента и их взаимодействием (столкновениями и т.д.) с другими частицами.

**Конвективная диффузия** – **молярный** перенос массы, обусловленный перемещением макрообъемов компонентов, составляющих систему:

плотность потока массы  $j = wC$ , кмоль/(м<sup>2</sup>·с) или кг/(м<sup>2</sup>·с)



# Виды молекулярной диффузии

**Концентрационная диффузия** – молекулярный перенос массы происходит в системе, в различных точках которой температура и давление одинаковы, а концентрации компонентов различны (потенциал переноса – разность концентраций). Описывается **1-ым законом Фика** (аналог з-на Фурье): **плотность потока массы компонента  $i$**

$$j_i = -D \frac{d\rho_i}{dn} = -D \frac{d(\rho_i)}{dn} = -\rho D \nabla g_i$$

**поток массы (массовый расход компонента  $i$ )**

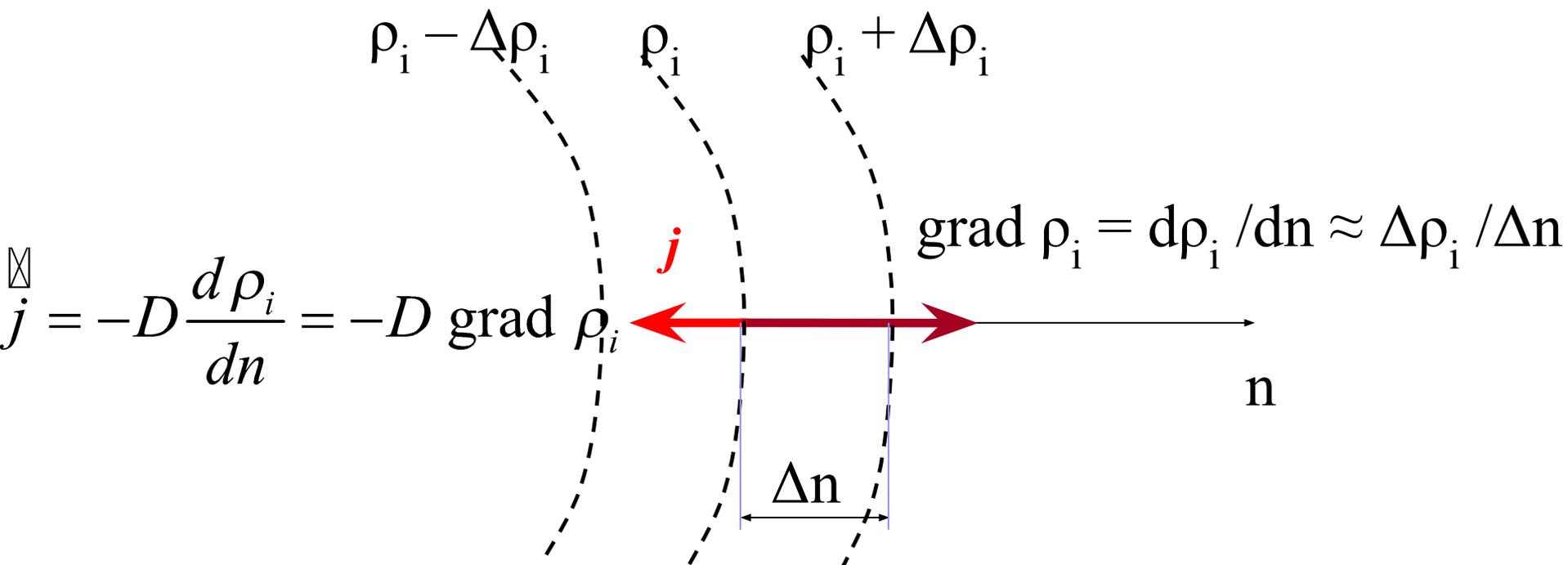
$$J_i = -D \nabla \rho_i F$$

**масса компонента, переданная за время  $\tau$**

$$M_i = -D \nabla \rho_i F \tau$$

**$D$ , м<sup>2</sup>/с** – коэффициент молекулярной диффузии, физический параметр переносимого вещества и среды, в которой оно переносится.

# Градиент концентрации и поток массы



изоконцентрационные поверхности

## 2-й закон Фика – дифференциальное уравнение концентрационной диффузии

В отсутствие источников (стоков) массы (например, при химических реакциях)

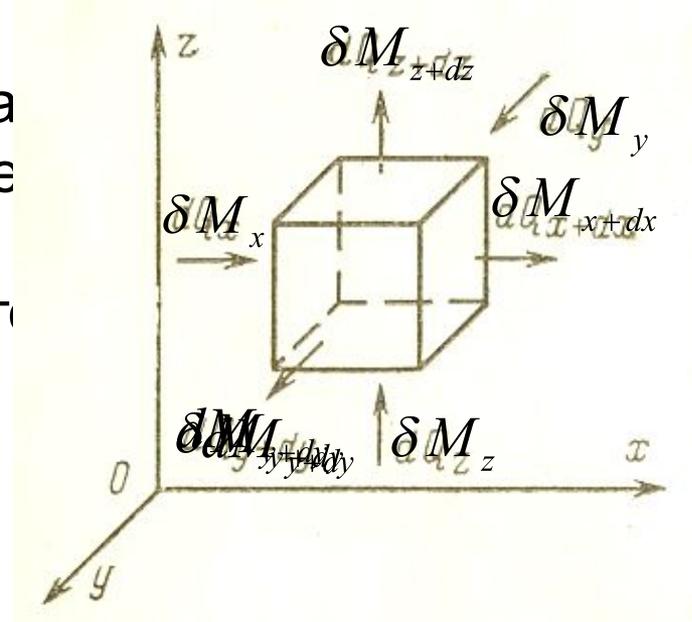
изменение массы (количества вещества) содержащегося в элементарном объёме  $dv$ , равно разнице количеств вещества, подведённого к  $dv$  и отведённого от него диффузией за время  $d\tau$

$$dM = dM_x + dM_y + dM_z$$

$$dM = dv \frac{\partial \rho_i}{\partial \tau} d\tau$$

$$dM_x = \delta M_x - \delta M_{x+dx} = \left[ -D \frac{\partial \rho_i}{\partial x} + D \frac{\partial \left( \rho_i + \frac{\partial \rho_i}{\partial x} dx \right)}{\partial x} \right] dy dz d\tau = D \frac{\partial^2 \rho_i}{\partial x^2} dv d\tau$$

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial \tau} = D \left( \frac{\partial^2 \rho_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \rho_i}{\partial z^2} \right) = D \operatorname{div} \operatorname{grad} \rho_i = D \nabla^2 \rho_i \quad \text{— аналог диф. ур-я Фурье}$$



• **Термодиффузия (эффект Соре)** – молекулярный перенос массы происходит в системе, в различных точках которой концентрации компонентов и давление изначально одинаковы, а температура различна (потенциал переноса – разность температур).

**Более крупные и/или массивные** молекулы перемещаются (диффундируют) в более холодные области, **мелкие и/или лёгкие** → в более тёплые.

В **ионизированном газе (плазме)** направление термодиффузии изменяется на обратное: **крупные и/или массивные ионы** → в тёплые области.

В результате **ТД** в системе складывается градиент концентрации и возникает **концентрационная диффузия**, направленная **навстречу термодиффузии**, т.е. **противодействующая ей**.

**Термодиффузионное отношение:**

$D_T$  – к-т термодиффузии, м<sup>2</sup>/с

$$k_T = \frac{D_T}{D} < 0.1$$

Следствие явления *термодиффузии* – ***диффузионный термоэффект Дюфо***: возникновение разности температур в изначально изотермической смеси газов в результате концентрационно-диффузионного перемещения компонентов.

Складывающийся *градиент температуры* направлен так, что возникающая термодиффузия противодействует исходной концентрационной.

В смеси  $\text{H}_2$  и  $\text{N}_2$  термоэффект приводит к возникновению разности температур  $\Delta T \sim$  несколько градусов.

**Бародиффузия** – эффект молекулярного переноса массы в системе, в различных точках которой *концентрации компонентов и температура изначально одинаковы, а давление различно* (потенциал переноса – разность давлений).

**Более массивные (тяжёлые)** молекулы → в область высокого давления, а **лёгкие** → низкого. В результате **БД** складывается градиент концентрации, приводящий к противодействующей концентрационной диффузии.

**Бародиффузионное отношение:**

$$k_p = \frac{D_p}{D} = \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho^2} \frac{M_2 - M_1}{M}$$

$D_p$  – к-т бародиффузии, м<sup>2</sup>/с

Суммарная плотность молекулярного потока массы:

$$\begin{aligned}
 \vec{j}_{cm} &= -\rho \left( D \nabla g_i + \frac{D_T}{T} \nabla T + \frac{D_p}{p} \nabla p \right) = \\
 &= -\rho_{cm} \left( D \nabla g_i + \frac{k_T D}{T} \nabla T + \frac{k_p D}{p} \nabla p \right) \\
 &= -D \rho_{cm} \left( \nabla g_i + k_T \frac{\nabla T}{T} + k_p \frac{\nabla p}{p} \right)
 \end{aligned}$$

## Коэффициент молекулярной диффузии

Рассматривается изотермическая и изобарическая **бинарная** (2 компонента) смесь газов. Формула Сазерленда-Косова для  $k$ -та молекулярной диффузии компонента 1 в газе 2 при температуре  $T$ ,  $K$  и давлении  $P$ , Па

$$D_{12} = D_{012} \frac{P_0}{P} \left[ \frac{(C_1 + T_0)(C_2 + T_0)}{(C_1 + T)(C_2 + T)} \right]^{1/2} \left( \frac{T}{T_0} \right)^{5/2}$$

$D_{012}$ , м<sup>2</sup>/с – коэффициент молекулярной диффузии при нормальных условиях (н.у.):  $T_0 = 273$  К,  $P_0 = 1,01 \cdot 10^5$  Па = 760 мм рт. ст. (*STP* – *standard temperature, pressure*).

Коэффициенты Сазерленда для компонентов смеси  $C_1$  и  $C_2$ , К

Воздух . . . . .	115	Окись углерода . . . . .	102
Азот . . . . .	107	Водород . . . . .	83 (74)
Кислород . . . . .	138	Метан . . . . .	198
Углекислый газ . . . . .	255	Водяной пар . . . . .	670 (650)

# Коэффициент молекулярной диффузии при н. у.

$$D_{012} \cdot 10^4 \text{ м}^2/\text{с} \quad (T_0 = 273 \text{ К}; P_0 = 1,01 \cdot 10^5 \text{ Па} = 760 \text{ мм рт. ст.})$$

Водород — кислород	0,67—0,71
Водород — азот	0,674—0,733
Водород — углекислый газ	0,539—0,550
Водород — окись углерода	0,537—0,651
Водород — метан	0,63
Водород — водяной пар	0,752
Водород — воздух	0,592—0,634
Кислород — азот	0,181—0,187
Кислород — окись углерода	0,185
Кислород — воздух	0,178

Для приближённых оценок:

$$D_{12} = D_{012} \left( \frac{T}{T_0} \right)^{1.75} \frac{P_0}{P}$$

## Коэффициент молекулярной диффузии в многокомпонентной смеси

Для приближённых оценок при малых различиях в молекулярных массах компонентов

$$D_{1n} = \frac{1 - r_1}{\frac{r_2}{D_{12}} + \frac{r_3}{D_{13}} + \dots}, \quad r_1 = \frac{V_1}{V} = \frac{p_1}{p}, \dots$$

Для строгих расчётов используются методика и базы данных интегрированного пакета CHEMKIN

# Конвективно-молекулярный перенос массы и теплоты

Плотность потока массы в движущейся среде (смеси) можно записать в форме закона Фика, введя в него конвективный член

$$\dot{j}_{конв\ i} = \dot{j}_{мол\ i} + \dot{j} = \dot{w}_i \rho_i + D_i \nabla \rho_i \quad \text{или кг / (м}^2 \cdot \text{с)},$$

где  $\mathbf{w}$  – вектор скорости жидкости, м/с.

Плотность потока теплоты: вместе с массой любого  $i$ -того компонента смеси переносится его энтальпия

$$\dot{q} = -\lambda \nabla T + \sum \dot{j}_i h_i = -\lambda \nabla T + \sum \dot{w} \rho_i h_i - \sum D_{in} \nabla \rho_i h_i$$

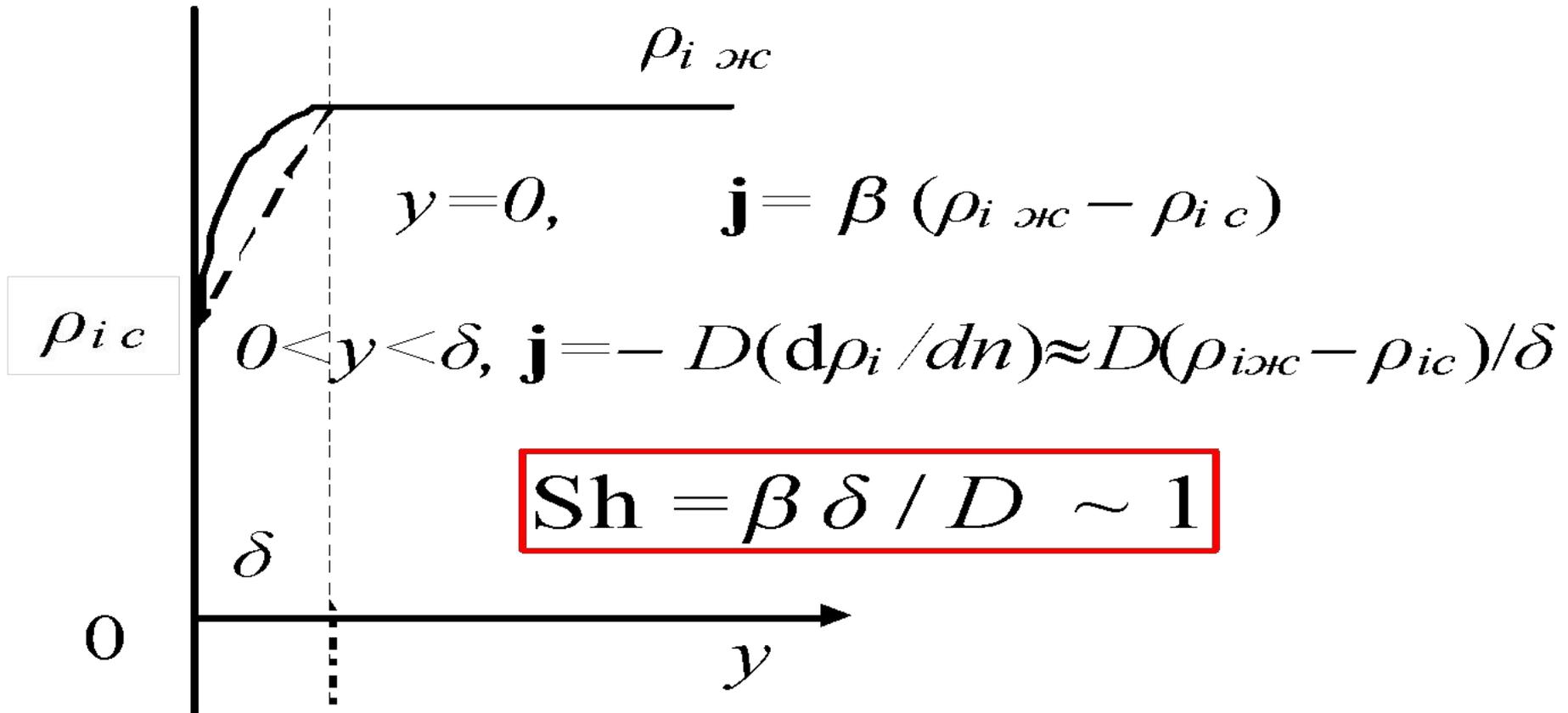
$$\dot{q} = -\lambda \nabla T + \dot{w} \rho h - \sum D_{in} \nabla \rho_i h_i$$

Для однокомпонентного потока  $\dot{q} = -\lambda \nabla T + \dot{w} \rho h$ .

Таким образом, в движущейся смеси дополнительно появляется диффузионная составляющая теплового потока.

# МАССООТДАЧА

В *диффузионном пограничном слое* толщиной  $\delta$  у поверхности раздела фаз доминирует молекулярный механизм переноса массы вдоль оси  $y$ . Профиль концентрации можно принять линейным, а поток массы описать законом, *аналогичным 3-му Ньютона-Рихмана*.



## Коэффициент массоотдачи. Диффузионные критерии подобия

$\beta = \frac{j_i}{(\rho_{\text{вс}} - \rho_i) M / C}$  коэффициент массоотдачи численно равен плотности потока массы при разности массовых концентраций, равной 1 кг/м<sup>3</sup>

**Число Шервуда** (диффузионное число Нуссельта) – безразмерный коэффициент массоотдачи

$$\text{Sh} \equiv \frac{\beta l_o}{D} \equiv \text{Nu}_D$$

**Число Шмидта** (диффузионное число Прандтля) – критерий подобия полей концентраций и скоростей; мера отношения толщин гидродинамического и диффузионного пограничных слоёв.

$$\text{Sc} \equiv \frac{\nu}{D} \equiv \text{Pr}_D$$

Диффузионное **число Стэнтона**

$$\text{St}_D \equiv \frac{\text{Sh}}{\text{Re Sc}} = \frac{\beta}{w_o}$$

Диффузионное **число Пекле** – отношение между скоростями конвективного и диффузионного переноса массы

$$Pe_D \equiv ReSc = \frac{wl_o}{D}$$

Диффузионное **число Фурье** – безразмерное время

$$Fo_D \equiv \frac{D\tau}{l_o^2}$$

Характерное время нестационарного процесса диффузии оценивается из условия

$$Fo_D = 1 \quad \Rightarrow \quad \tau_o \approx \frac{l_o^2}{D}$$

# Тройная аналогия между процессами переноса теплоты, массы и импульса

При равенстве критериев Прандтля, Шмидта и **Льюиса**

$$(\text{Pr} \equiv \nu/a) \approx (\text{Sc} \equiv \nu/D) \approx (\text{Le} \equiv D/a) \approx 1$$

формулировки задач о переносе теплоты, массы и импульса в приближении пограничного слоя и критериальные уравнения подобия приближенно можно считать идентичными.

*Кинетические* коэффициенты молекулярного переноса тепла, массы, импульса в идеальных газах

$$a \approx D \approx \nu \approx l w \sim 10^{-5} \dots 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$$

$l$  – длина свободного пробега молекул;

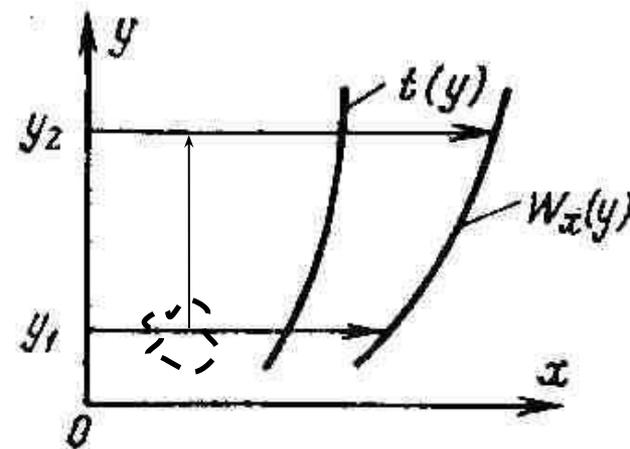
$w$  – средняя скорость теплового движения молекул;

$a = \lambda / c_p \rho$  – коэффициент температуропроводности;

$\nu = \mu / \rho$  – кинематическая вязкость.

## Коэффициенты турбулентного переноса

$$a_T \approx \nu_T \approx D_T \propto l' w'_y$$



$w'_y$  – пульсационная скорость вдоль оси  $y$ , м/с;

$l'_y$  – масштаб турбулентности  $\sim$  длина пути смешения, м  
(длина коррелированного движения макрообъема жидкости, «вихря»)

# Аналогия Рейнольдса

Касательное напряжение трения на стенке:

– при обтекании пластины

$$s_c = \frac{c_f}{2} \rho w_o^2$$

– при течении в трубе круглого сечения

( $c_f$ ,  $\xi$  – коэф-ты трения)

$$s_c = \frac{\xi}{8} \rho w_o^2$$

Для теплообмена ( $Pr$ ,  $Pr_t = 1$ ) поля скоростей и температур подобны

$$St \equiv \frac{Nu}{Re Pr} = \frac{\alpha}{\rho c_p w_o} = \frac{c_f}{2} = \frac{\xi}{8}$$

Для массообмена ( $Sc$ ,  $Sc_t = 1$ )

$$St_D \equiv \frac{Sh}{Re Sc} = \frac{\beta}{w_o} = \frac{c_f}{2} = \frac{\xi}{8}$$

## Аналогия Чилтона – Колберна

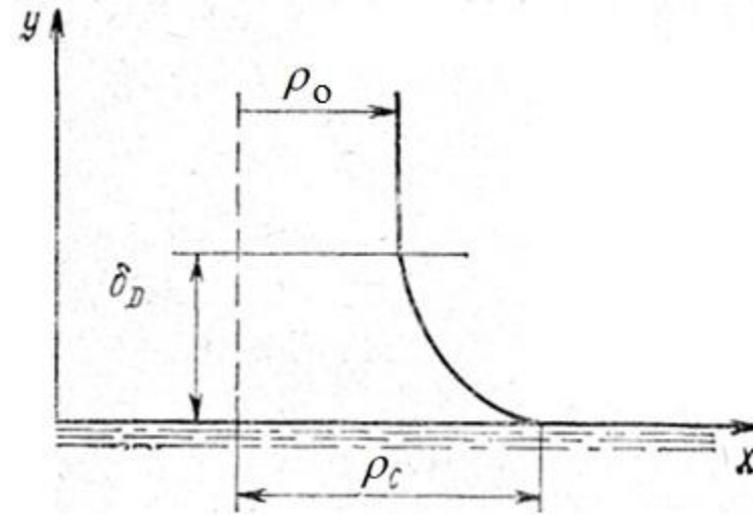
в выражение аналогии Рейнольдса введена эмпирическая поправка на влияние чисел Прандтля и Шмидта

$$\frac{\text{Nu}}{\text{Re Pr}^{1/3}} = \frac{c_f}{2} = \frac{\xi}{8}$$

$$\frac{\text{Sh}}{\text{Re Sc}^{1/3}} = \frac{c_f}{2} = \frac{\xi}{8}$$

# Система дифференциальных уравнений погран. слоя

Стационарная задача о **независимо протекающих** процессах тепло- и массообмена при продольном обтекании плоской поверхности жидкости потоком газа с постоянными физическими свойствами при  $\partial p / \partial x = 0$  в приближении пограничного слоя при отсутствии источников теплоты и массы



$$w_x \frac{\partial T}{\partial x} + w_y \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad - \text{ ур. теплообмена}$$

$$w_x \frac{\partial \rho_1}{\partial x} + w_y \frac{\partial \rho_1}{\partial y} = D \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial y^2} \quad - \text{ ур. диффузии}$$

$$w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} \quad - \text{ ур. движения}$$

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} = 0 \quad - \text{ ур. неразрывности}$$

# Граничные условия

## Теплообмен

$$y = 0: \quad w_x = 0, \quad w_y = 0, \quad T = T_c;$$

$$y = \infty: \quad w_x = w_o, \quad T = T_o.$$

## Массообмен

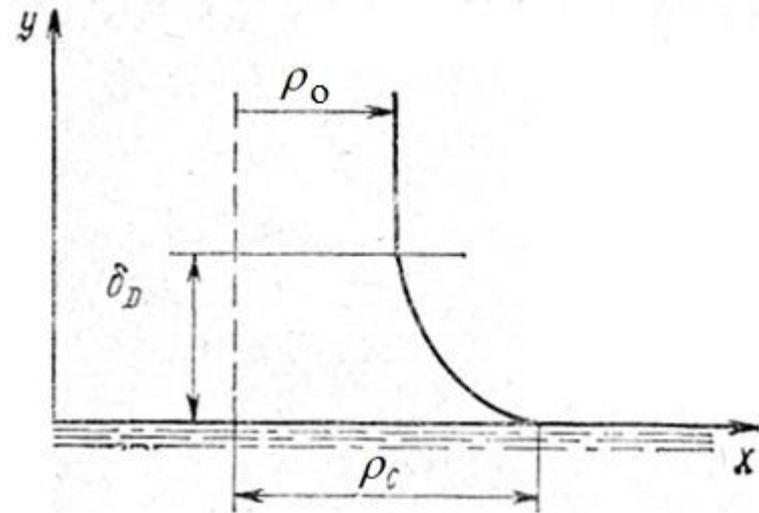
$$y = 0: \quad w_x = 0, \quad w_y = w_{yc}, \quad \rho_1 = \rho_{1c};$$

$$y = \infty: \quad w_x = w_o, \quad \rho_1 = \rho_{1o}.$$

Испарение жидкости на поверхности раздела фаз приводит к появлению конвективного потока пара по направлению нормали к поверхности, т.е. к нарушению аналогии с теплообменом.

**Принимаем:**  $y = 0: \quad w_y \rightarrow 0$

это позволяет **приближенно** применять решение задачи о теплообмене (например, соответствующее критериальное уравнение) к процессу массообмена.



# Нарушения тройной аналогии

На практике процессы переноса теплоты, массы и импульса обычно протекают совместно, влияя друг на друга. Например, учет потока пара, перпендикулярного к поверхности раздела фаз в предыдущей задаче, приводит к изменению распределения скорости, температуры и концентрации в парогазовой смеси.

При направлении потока массы **от** поверхности раздела фаз к парогазовой смеси (испарение, сублимация, десорбция, вдув газа в пограничный слой через пористую пластину) приводит к утолщению пограничного слоя, уменьшению производных  $\partial w_x / \partial y$ ,  $\partial T / \partial y$  и  $\partial \rho_1 / \partial y$ . Соответственно уменьшаются коэффициенты теплоотдачи и массоотдачи.

При противоположном потоке массы от парогазовой смеси к поверхности раздела (конденсация, сорбция, отсос газа) толщина пограничного слоя уменьшится, а интенсивность тепло- и массоотдачи увеличится.

Учет указанных факторов требует внесения поправок в расчетные критериальные зависимости.