Определитель и его свойства

Определение:

Любой квадратной матрице n-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\ldots\ldots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\ldots\ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

можно поставить в соответствие выражение, которое называется ***определителем*** (детерминантом) матрицы А, и обозначается так:

$$|\,A\,| = \det A = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\ldots\ldots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\ldots\ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Способы вычисления определителей

1. Определитель второго порядка задаётся равенством:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Пример 1:

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 0 \cdot (-4) = 10$$

2. Определитель третьего порядка задаётся равенством:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}) + (a_{21}\cdot a_{32}\cdot a_{13}) + (a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}) -$$

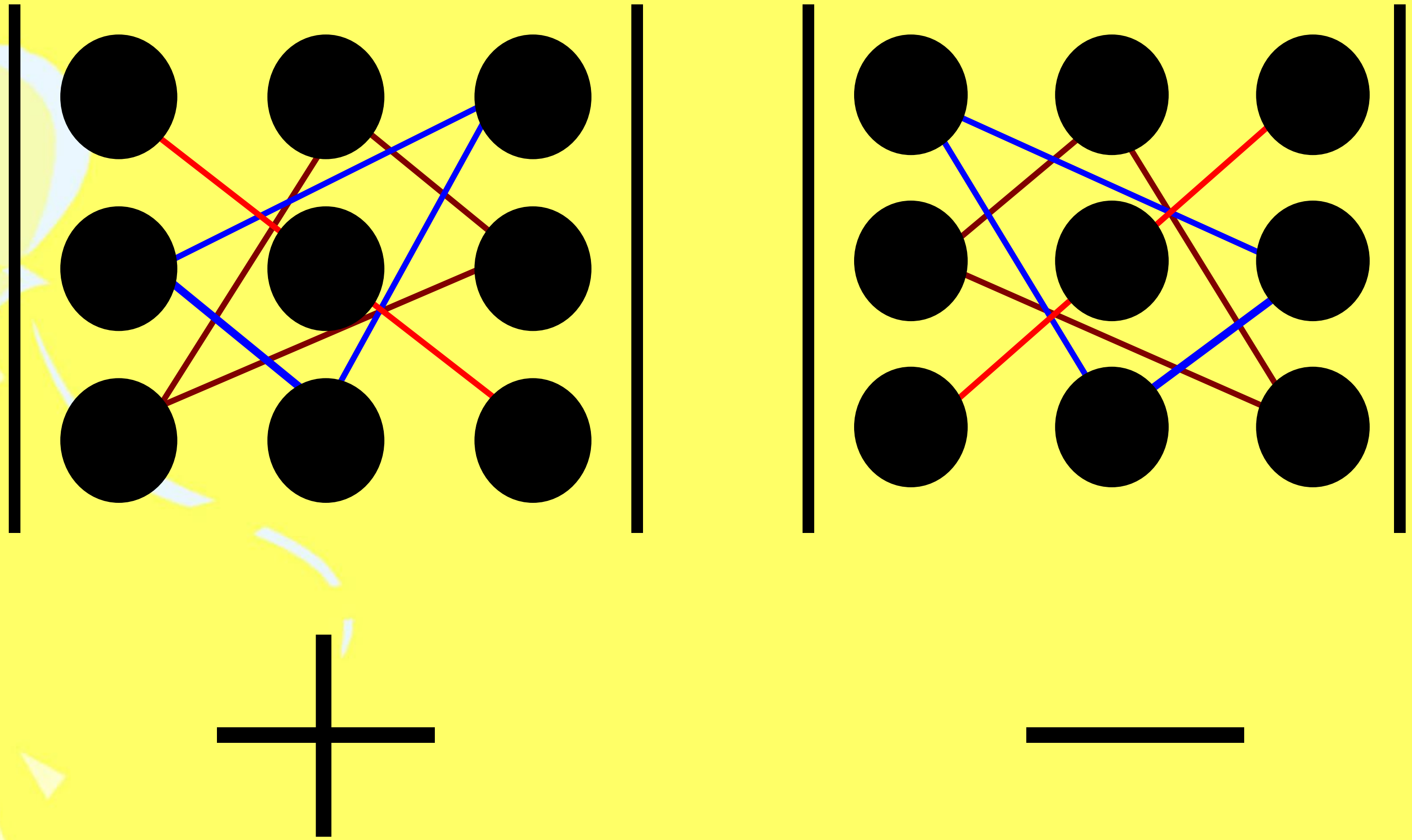
$$-(a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31}) - (a_{21}\cdot a_{12}\cdot a_{33}) - (a_{23}\cdot a_{32}\cdot a_{11})$$

Пример 2:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & -4 \\ -3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot 0\cdot(-1) + 3\cdot 4\cdot(-2) + (-3)\cdot 2\cdot(-4) -$$

$$-3\cdot 0\cdot(-3) - 1\cdot(-4)\cdot(-2) - (-1)\cdot 2\cdot 4 = 0$$

Вычисление определителей 3-го порядка по правилу треугольника (правило Саррюса)



Основные свойства определите

1. Если у определителя какая-либо строка (столбец) состоит только из нулей, то определитель равен нулю.

$$\left(\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 - 2 \cdot 0 = 0\right)$$

2. Если какие-либо две строки (два столбца) определителя пропорциональны, то определитель равен нулю.

$$\left(\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - 3 \cdot 1 = 3 - 3 = 0\right)$$

3. Если какую-либо строку (столбец) определителя умножить на любое число, то и весь определитель умножиться на это число.

$$\left(\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \quad \textit{умножим на 2 первую строку} \quad \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2\right)$$

4. Если две строки (два столбца) определителя поменять местами, то определитель изменит знак.

$$\left(\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 6 = -5; \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 1 = 5\right)$$

5. Если к какой-либо строке (столбцу) определителя прибавить, какую-либо другую строку (столбец) умноженную на любое число, то определитель не изменится.

$$\left(\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 3 = -1\right.$$

Прибавим к первой строке вторую, умножим на 2.

$$\left.\begin{vmatrix} 1+1\cdot 2 & 3+2\cdot 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 7 = -1\right)$$

6. Определитель произведения матриц равен произведению определителей.

$$\left(|A \bullet B| = |A| \bullet |B|\right)$$

Минор
и алгебраическое
дополнение

Рассмотрим определитель n-го порядка.

Выделим в нем какой-либо элемент a_{ij} и вычеркнем

i-ю строку и *j-ый* столбец.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots\ldots & a_{2n} \\ \multicolumn{3}{c}{\text{- - - - - - - - - - - - - - - -}} \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots\ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Минором M_{ij} к элементу a_{ij} квадратной матрицы *A*, называется определитель, составленный из элементов матрицы А, оставшихся после вычёркивания *i-строки и j- столбца*.

Пример 3:

Вычислить миноры для всех элементов матриц:

1) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$

$$M_{11} = |7| = 7, \quad M_{12} = |0| = 0,$$

$$M_{21} = |2| = 2, \quad M_{22} = |-1| = -1.$$

2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & -4 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -8, \quad M_{12} = \begin{vmatrix} 4 & -4 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = -16,$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = -8, \quad M_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 4,$$

$$M_{22} = 8, \qquad M_{23} = 4, \quad M_{31} = -8,$$

$$M_{32} = -16, \quad M_{33} = -8.$$

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} называется число

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

Пример 4:

Найти алгебраические дополнения для всех элементов матриц

1) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & -4 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

Решение (пример 4):

1)

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = 7, \qquad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = 0,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = -2, \quad \mathrm{A}_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = -1.$$

2)

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = -8,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = 16,$$

$$A_{13} = -8, \quad A_{21} = -4, \quad A_{22} = 8, \quad A_{23} = -4,$$

$$A_{31} = -8, \quad A_{32} = 16, \quad A_{33} = -8.$$

Обратная матрица.

- Квадратная матрица порядка n называется ***невырожденной***, если её определитель не равен нулю.

$$\Delta_n = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

- В противном случае (detA=0) матрица A называется ***вырожденной***.

- Если А- квадратная матрица, то ***обратной*** по отношению к матрице А называется матрица, которая будучи умноженной на А (как справа, так и слева) даёт единичную матрицу.

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$$

- Если обратная матрица существует, то матрица А называется ***обратимой***.

- Операция вычисления обратной матрицы при условии, что она существует, называется ***обращением матрицы.***

Теорема.

Для того, чтобы квадратная матрица А имела обратную, необходимо и достаточно, чтобы матрица А была невырожденной ($\det A \neq 0$).

Нахождение обратной матрицы:

$$A^{-1} = \frac{\left(A^*\right)^T}{\det A}$$

где

$$\left(A^*\right)^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

присоединенная матрица

Чтобы найти обратную матрицу:

- ✔ 1. находят *det*A и убеждаются, что *det*A≠0;
- ✔ 2. находят алгебраические дополнения всех элементов матрицы А и записывают новую матрицу А*;
- ✔ 3. транспонируют новую матрицу $\left(A^*\right)^T$;
- ✔ 4. умножают полученную матрицу на $\dfrac{1}{\det A}$

Пример 5.

Найти матрицу, обратную к матрице А:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Решение:

1) находим определитель матрицы А:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 14 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \exists\, A^{-1}$$

2) находим алгебраические дополнения всех элементов матрицы А:

$$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = -7$$

$$A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = -14$$

$$A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 6$$

$$A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 6$$

$$A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 7$$

$$A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

записываем новую матрицу: $A^* = \begin{pmatrix} -7 & 6 & 3 \\ -14 & -2 & 6 \\ 7 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

3) транспонируем эту матрицу:

$$\left(A^*\right)^T = \begin{pmatrix} -7 & -14 & 7 \\ 6 & -2 & -2 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

4) умножим полученную матрицу на $\frac{1}{\det A}$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \left(A^*\right)^T = \frac{1}{14} \cdot \begin{pmatrix} -7 & -14 & 7 \\ 6 & -2 & -2 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{7}{14} & -1 & \frac{7}{14} \\ \frac{6}{14} & -\frac{2}{14} & -\frac{2}{14} \\ \frac{3}{14} & \frac{6}{14} & -\frac{1}{14} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{3}{14} & \frac{3}{7} & -\frac{1}{14} \end{pmatrix}$$

Проверка: $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{7}{14} & -1 & \frac{7}{14} \\ \frac{6}{14} & -\frac{2}{14} & -\frac{2}{14} \\ \frac{3}{14} & \frac{6}{14} & -\frac{1}{14} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ответ: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{3}{14} & \frac{3}{7} & -\frac{1}{14} \end{pmatrix}$