Высшая математика

ЛЕКЦИЯ 2
СЛАУ

3. Обратная матрица

Пусть A – невырожденная (det $A \neq 0$) квадратная матрица (1.2) порядка n.
E – единичная матрица того же порядка.

Матрица A^{-1} называется обратной к матрице A, если выполняются равенства

$$\boxed{A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E.}$$

Теорема.

(О существовании обратной матрицы).

Матрица А имеет обратную тогда и только тогда,
когда ее определитель отличен от нуля ($\det A \neq 0$,
т.е. когда матрица является **невырожденной**).

Теорема.

Всякая невырожденная матрица имеет единственную обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

A_{ij} – *алгебраическое дополнение элемента* a_{ij}.

n =2.

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

$\Delta \neq 0.$

Обратная матрица:

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

n = 3.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Отметим *свойства* обратной матрицы:

1. $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$;

2. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$;

3. $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

Пример

Найти обратную матрицу к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Решение

$$\det A = -1.$$

Пример

Найти обратную матрицу к матрице

$$A = \begin{pmatrix} & & \\ & -1 & 0 \\ & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Решение

$$\det A = -1.$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

Пример	**Найти обратную матрицу к матрице** $$A=\begin{pmatrix} & & \\ 1 & & 0 \\ 1 & & 1 \end{pmatrix}.$$
Решение	$$\det A=-1$$ $$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-1$$ $$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-1$$

Пример

Найти обратную матрицу к матрице

$$A = \begin{pmatrix} & & \\ 1 & -1 & \\ 1 & 0 & \end{pmatrix}.$$

Решение

$$\det A = -1$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{1},$$

Пример

Найти обратную матрицу к матрице

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}. \quad A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}.$$

Решение

$$\det A=-1.$$

$$A^{-1}=\frac{1}{-1}\cdot\begin{pmatrix}-1 & \square & \square\\ -1 & \square & \square\\ 1 & \square & \square\end{pmatrix}.$$

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-1,$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-1,$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=1,$$

Пример

Найти обратную матрицу к матрице

$$A=\begin{pmatrix} \text{[illegible]} & 0 & \text{[illegible]} \\ \text{[illegible]} & \text{[illegible]} & \text{[illegible]} \\ \text{[illegible]} & 0 & \text{[illegible]} \end{pmatrix}. \qquad A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Решение

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=0, \qquad A^{-1}=\frac{1}{-1}\cdot\begin{pmatrix} -1 & \boxtimes & \boxtimes \\ -1 & \boxtimes & \boxtimes \\ 1 & \boxtimes & \boxtimes \end{pmatrix}$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=1,$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=0,$$

Пример

Найти обратную матрицу к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Решение

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad A^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & \text{[illegible]} \\ -1 & 1 & \text{[illegible]} \\ 1 & 0 & \text{[illegible]} \end{pmatrix}.$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

Пример

Найти обратную матрицу к матрице

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}. \quad A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}.$$

Решение

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=0,$$

$$A^{-1}=\frac{1}{-1}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 0 & \\ -1 & 1 & \\ 1 & 0 & \end{pmatrix}.$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1,$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{vmatrix}=0,$$

Пример

Найти обратную матрицу к матрице

$$A = \begin{pmatrix} & 0 & \\ & -1 & \\ & & \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Решение

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

Пример

Найти обратную матрицу к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Решение

$$A^{-1} = \frac{1}{-1}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

(СЛАУ)

К решению систем линейных алгебраических уравнений сводятся многочисленные практические задачи (по некоторым оценкам более 75% всех задач).

•***Системой линейных алгебраических уравнений,*** содержащей m уравнений и n неизвестных, называется система вида

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m,
\end{cases}
\qquad (2.1)
$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – неизвестные,

a_{ij} – числа ($i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$), называемые коэффициентами системы,

$b_1, b_2, \ldots, b_m$ – числа, называемые свободными членами.

- **Решением системы (2.1)** будем называть упорядоченный набор чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, обращающий каждое ее уравнение в верное равенство.
- Такую систему удобно записывать в компактной ***матричной форме:*** $A \cdot X = B$. (2.2)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ – матрица коэффициентов системы.

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$ — (столбец правых частей) вектор-столбец из свободных членов b_i.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$ — вектор-столбец из неизвестных x_j.

- ***Расширенной матрицей*** системы называется матрица системы, дополненная столбцом свободных членов, обозначается $\overline{\mathrm{A}}$.

$$\overline{\mathrm{A}}=\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right). \quad (2.3)$$

- **Решить систему** — значит найти все ее решения или доказать, что решений нет.

Система линейных уравнений

∃ хотя бы одно решение

совместная

нет решения

несовместная

∃ единственное решение

определенная

∃ более одного решения

неопределенная

- В случае неопределенной СЛАУ каждое ее решение называется ***частным решением.***
- Совокупность всех частных решений называется ***общим решением.***

• Система, у которой все свободные члены равны нулю
($b_1 = b_2 = \ldots = b_n$ = 0), называется **однородной.**

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \qquad (2.4)$$

• Однородная система **всегда совместна**, так как набор из *n* нулей (тривиальное решение) удовлетворяет любому уравнению из (2.4).

- Если число уравнений системы совпадает с числом неизвестных ($m=n$), то система называется **квадратной**.
- Если определитель матрицы А квадратной системы $\Delta = \det A \neq 0$, то система имеет единственное решение.
- Если $\det A = 0$, то система либо имеет бесконечное множество решений, либо несовместна.

4.1. ПРИМЕНЕНИЕ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ СЛАУ

Применение обратной матрицы для решения СЛАУ

В матричной форме записи квадратная определенная система уравнений имеет вид:

$$AX=B. \qquad (2.2^*)$$

Так как $\det A=\Delta\neq 0$, существует обратная матрица A^{-1}.

Если умножить обе части (2.2^*) на A^{-1} слева, то получим формулу для нахождения столбца неизвестных X:

$$\underbrace{\underbrace{A^{-1}\cdot A}_{E}\cdot X}_{X} = A^{-1}\cdot B \quad \Rightarrow \quad \boxed{X = A^{-1}\cdot B. \quad (2.5)}$$

Пример. Решить матричным способом систему уравнений $\begin{cases} 3x+2y=7, \\ x-y=4. \end{cases}$

Решение.

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \qquad B=\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}. \qquad \Delta=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-5.$$

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}. \qquad A^{-1}=\frac{1}{-5}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=A^{-1}B=\frac{1}{-5}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}=\frac{1}{-5}\begin{pmatrix} -15 \\ 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

4.2. Метод Крамера

Габриэль Крамер

(1704 -1752)

швейцарский математик, один из создателей линейной алгебры

$X = A^{-1} \cdot B. \quad (2.5)$

Метод Крамера

Пусть квадратная определенная система в матричной форме имеет вид : $AX=B$, det A=Δ≠0. (2.6)

Тогда из (2.5) получим, что решение (2.6) находится по формулам:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \dots + A_{n1}b_n \\ A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \dots + A_{n2}b_n \\ \vdots \\ A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \dots + A_{nn}b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_n \end{pmatrix},$$

$$\Downarrow$$

где $\Delta_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$,

j

определитель матрицы, полученной из А заменой ее j-го столбца на столбец правых частей системы, j=1, 2,...,n.

Формулы (2.7) отыскания решения системы (2.6) называются **формулами Крамера**.

$$\boxed{x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},\dots\ ,\ x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}}. \quad (2.7)$$

Частный случай n=2. $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2. \end{cases}$ (2.8)

Введем в рассмотрение следующие три определителя для матрицы системы (2.8):

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}; \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}; \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

Теорема ***(правило Крамера)*.**

Если Δ ≠ 0, то система* (2.8) *имеет единственное решение, которое находится по формулам

$$\boxed{x = \frac{\Delta_x}{\Delta}; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}.} \qquad (2.9)$$

Пример. Решить по правилу Крамера систему уравнений

$$\begin{cases} 3x + 2y = 7, \\ x - y = 4. \end{cases}$$

Решение. Вычислим определитель системы $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0.$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -15, \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 5.$$

Согласно (2.9), получаем

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-15}{-5} = 3, \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{5}{-5} = -1.$$

Проверка:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ x - y = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) = 7 \\ 3 - (-1) = 4 \end{cases}$$

Ответ: **(3 ; -1).**

n=3.

Рассмотрим систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \qquad (2.10)$$

Обозначим

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Вспомогательные определители Δ_1, Δ_2, Δ_3 получаются из определителя Δ матрицы системы (2.10) заменой соответствующего столбца столбцом свободных членов.

n = 3.

Теорема (правило Крамера). *Если* $\Delta \neq 0$, *то система* (2.10) *имеет единственное решение, которое находится по* ***формулам Крамера***

$$\boxed{x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}.} \qquad (2.11)$$

Thank You !