Линейная алгебра

- Невырожденные матрицы. Основные понятия.
- Обратная матрица.
- Методы нахождения обратной матрицы.
- Матричные уравнения.

Пусть дана квадратная матрица:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Квадратная матрица называется ***невырожденной***, если её определитель не равен нулю: $\Delta = \det A \neq 0$

В противном случае ($\Delta = \det A = 0$) матрица *A* называется ***вырожденной***.

Обратной матрицей по отношению к данной *невырожденной* *квадратной* матрице A *n - ного* порядка, называется матрица, которая, будучи умноженной как слева, так и справа на данную матрицу, дает единичную матрицу, а сама матрица – ***обратимой***.

Обратная матрица обозначается символом A^{-1}. Таким образом, согласно определению: $AA^{-1}=A^{-1}A=E$. (1)

Теорема. Для каждой обратимой матрицы существует только одна обратная матрица.

Доказательство.

Пусть для матрицы *А* существует обратная матрица *Х*, тогда должно выполняться условие (1)

$$A \cdot X = X \cdot A = E$$

Пусть для матрицы А существует ещё одна обратная матрица X' **тогда согласно (1)** $A \cdot X' = E$

Умножим слева последнее выражение на матрицу *Х*:

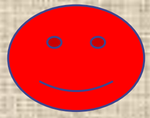
$$X \cdot (A \cdot X') = X \cdot E = X$$

Согласно свойству произведение матриц левую часть выражения можно записать

$$X \cdot (A \cdot X') = (X \cdot A) \cdot X' = EX' = X'$$

Т.е. получили $X' = X$

Что и требовалось доказать.



Матрицей, ***союзной*** (***присоединенной***) к матрице *A*, называется матрица

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

где A_{ij} - алгебраическое дополнение элемента a_{ij} данной матрицы (оно определяется так же, как и алгебраическое дополнение элемента определителя).

Заметим, что в *i* -ой строке матрицы *A** расположены алгебраические дополнения элементов *j-* ого столбца определителя.

Свойства обратной матрицы:

- $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$
- $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
- $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$

Докажем, например второе свойство: в соответствии с определением обратной матрицы достаточно доказать два равенства:

$(A \cdot B)B^{-1} \cdot A^{-1} = E$ и $(B^{-1} \cdot A^{-1})(A \cdot B) = E$

Используя ассоциативность умножения матриц, получим:

$$(A \cdot B) \cdot B^{-1} \cdot A^{-1} = A \cdot (B \cdot B^{-1}) \cdot A^{-1} = A \cdot E \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = E$$

$$(B^{-1} \cdot A^{-1})(A \cdot B) = B^{-1}(A^{-1} \cdot A) \cdot B = B^{-1}EB = B^{-1}B = E$$

Методы вычисления обратной матрицы

- ***Метод присоединенной матрицы:*** заключается в использовании формулы.

$$A \to \det A \neq 0 \to A^{T} \to A^{*} \to \boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^{*}}$$

Транспонированная матрица получается из матрицы А путем замены строк соответствующими столбцами

Присоединенная матрица получается путем замены каждого элемента матрицы $A^{т}$ на его алгебраическое дополнение

Если определитель матрицы равен нулю, то обратная матрица не существует

Найти матрицу обратную для данной.

$$A=\begin{pmatrix}0&3&1\\2&4&1\\2&2&0\end{pmatrix}\longrightarrow \det A=\begin{vmatrix}0&3&1\\2&4&1\\2&2&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&3&1\\2&1&0\\2&2&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&1\\2&2\end{vmatrix}\cdot(-1)^4=2$$

Из второй строки вычтем первую строку

Разложим определитель по элементам 3 столбца

$$\longrightarrow A^T=\begin{pmatrix}0&2&2\\3&4&2\\1&1&0\end{pmatrix}\longrightarrow A^*=\begin{pmatrix}-2&2&-1\\2&-2&2\\-4&6&-6\end{pmatrix}$$

$$A_{11}=\begin{vmatrix}4&2\\1&0\end{vmatrix}\cdot(-1)^2=-2$$

$$A_{12}=\begin{vmatrix}3&2\\1&0\end{vmatrix}\cdot(-1)^3=2$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}3&4\\1&1\end{vmatrix}\cdot(-1)^4=-1$$

$$A_{21}=\begin{vmatrix}2&2\\1&0\end{vmatrix}\cdot(-1)^3=2$$

$$A_{22}=\begin{vmatrix}0&2\\1&0\end{vmatrix}\cdot(-1)^4=-2$$

$$A_{23}=\begin{vmatrix}0&2\\1&1\end{vmatrix}\cdot(-1)^5=2$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}2&2\\4&2\end{vmatrix}\cdot(-1)^4=-4$$

$$A_{32}=\begin{vmatrix}0&2\\3&2\end{vmatrix}\cdot(-1)^5=6$$

$$A_{33}=\begin{vmatrix}0&2\\3&4\end{vmatrix}\cdot(-1)^6=-6$$

$$A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2&2&-1\\2&-2&2\\-4&6&-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1&-0.5\\1&-1&1\\-2&3&-3\end{pmatrix}$$

Методы вычисления обратной матрицы

Метод элементарных преобразований:

Для данной матрицы *A n – ого* порядка построим прямоугольную матрицу $\Gamma_A = \left(A \middle| E\right)$ размера $n \times 2n$, приписывая к *A* справа единичную матрицу. Далее, используя элементарные преобразования <u>над строками</u>, приводим матрицу Γ_A к виду $\left(E \middle| B\right)$, что всегда возможно, если *A* невырожденная. Тогда $B = A^{-1}$.

Найти матрицу обратную для данной.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Виды матричных уравнений и их решения

- $A \cdot X = B$ умножим слева на A^{-1} $X = A^{-1} \cdot B$
- $X \cdot A = B$ умножим справа на A^{-1} $X = B \cdot A^{-1}$
- $A \cdot X \cdot B = C$ умножим справа на B^{-1} и умножим слева на A^{-1} $X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$

Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Ранг матрицы

Рассмотрим прямоугольную матрицу размерностью *(m x n)*.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Выделим в этой матрице произвольное число *k* строк и *k* столбцов. Элементы матрицы *A*, стоящие на пересечении выделенных строк и столбцов, образуют определитель *k* - того порядка.

Минором *k*-того порядка матрицы *A* называют определитель, полученный из *A* выделением произвольных *k* строк и *k* столбцов.

Ранг матрицы

Рангом матрицы называется наибольший порядок отличного от нуля минора этой матрицы.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Матрица A имеет 4 минора 3 - его порядка, например:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -20$$

18 миноров 2 - го порядка, например:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4$$

12 миноров 1 - го порядка – сами элементы.

Наибольший порядок отличного от нуля минора этой матрицы равен 3, поэтому: $r(A) = 3$

Ранг матрицы

Определитель, порядок которого равен рангу матрицы, называется ***базисным минором.*** Он может быть не единственным.

Можно показать, что эквивалентные преобразования не меняют ранга матрицы. Поэтому, когда требуется вычислить ранг матрицы, ее приводят к треугольному виду.

Ранг матрицы равен числу ненулевых строк матрицы, приведенной к треугольному виду

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 4 \\ -1 & 7 & 6 \end{pmatrix} \overset{I + III}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 10 & 8 \end{pmatrix} \underset{II \times (-2) + III}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$r(A) = 2$$