

ЛЕКЦИЯ 7. ЭЛЕМЕНТЫ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОШИБОК В ПРИЛОЖЕНИИ К ОБРАБОТКЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

Общая теория ошибок – специальная область прикладной математики, использующая математический аппарат дифференциального исчисления и посвященная различным аспектам оценки погрешностей *косвенных измерений*.

Косвенными принято называть такие измерения, результат которых находится не в ходе прямого измерения, а путем расчета с помощью конкретных функциональных зависимостей, у которых в качестве аргументов выступают результаты тех или иных прямых измерений.

В наиболее общей форме основные задачи общей теории ошибок можно сформулировать следующим образом.

Пусть y – результат косвенных измерений, x_1, x_2, \dots, x_n – аргументы, значения которых измеряются (определяются) в ходе эксперимента, а f – конкретная функциональная зависимость которая их связывает:

$$y=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Вывод: Поскольку измерение (определение) величин x_i всегда сопряжено с ошибкой (погрешностью) $\pm\Delta x_i$, то и определение величины y также сопровождается ошибкой (погрешностью) и $\pm\Delta y$.

ЭЛЕМЕНТЫ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОШИБОК В ПРИЛОЖЕНИИ К ОБРАБОТКЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

Поскольку между y и x_i существует функциональная зависимость f , закономерна постановка следующих задач.

1. **Прямая задача** теории ошибок – если известны ошибки, допускаемые при измерении отдельных аргументов $\pm\Delta x_i$, и вид функции f , чему равна ошибка $\pm\Delta y$ в определении величины y .

2. **Обратная задача** теории ошибок – каковы предельно допустимые ошибки $\pm\Delta x_i$, ... $\pm\Delta x_n$ при измерении каждого из аргументов x_i , если заданная величина $\pm\Delta y$ – предельно допустимая ошибка результата анализа.

3. **Третья задача** общей теории ошибок – каким образом следует согласовать между собой условия измерения аргументов x_i , чтобы относительная ошибка ε_y была минимальной.

Допущения: Если абсолютные ошибки измерения отдельных аргументов $|\Delta x_i|$ достаточно малы в сравнении с x_i , а функция f непрерывна во всей области измерений, то абсолютная ошибка функции $|\Delta y|$ тоже мала.

Вывод: Тогда ошибки аргументов, как малые приращения dx_i , порождают ошибку функции dy и можно записать: $y+dy=f(x_1 \pm \Delta dx_i; \dots, x_n \pm \Delta dx_n)$

или для одного аргумента: $y+dy=f(x+dx)$

ЭЛЕМЕНТЫ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОШИБОК В ПРИЛОЖЕНИИ К ОБРАБОТКЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

Разложив в ряд Тейлора, получим:

$$y + dy = f(x) + f'(x)dx + f''(x)dx^2 / 2! + f'''(x)dx^3 / 3! + \dots$$

Ограничившись двумя членами, имеем:

$$y + dy = f(x) + f'(x)dx \quad dy = f'(x)dx$$

или переходя к абсолютным ошибкам: $\delta_x, \delta_y : \delta_y = f'(x)\delta_x$

Для относительной ошибки:

$$\varepsilon_y = \frac{dy}{y} = \frac{f'(x)dx}{f(x)} = d \ln f(x)$$

Для функции $y=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ нескольких переменных получаем:

$$\delta_y = \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \delta_{x_1} \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial x_2} \delta_{x_2} \right| + \dots + \left| \frac{\partial f}{\partial x_n} \delta_{x_n} \right| \quad (*)$$

$$\varepsilon_y = d \left| \ln f(x_1, x_2, \dots, x_n) \right| = \left| \frac{\partial \ln f}{\partial x_1} \delta_{x_1} \right| + \left| \frac{\partial \ln f}{\partial x_2} \delta_{x_2} \right| + \dots + \left| \frac{\partial \ln f}{\partial x_n} \delta_{x_n} \right| \quad (**)$$

ЭЛЕМЕНТЫ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОШИБОК В ПРИЛОЖЕНИИ К ОБРАБОТКЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

Внимание! Ошибки прямых и косвенных измерений, входящие в формулы, относятся к классу *предельных ошибок*, которые могут быть допущены при наиболее неблагоприятных условиях.

Поэтому они всегда складываются!!!

Соответственно коэффициенты с частными производными — как бы статистические веса, с которыми частные ошибки входят в состав суммы.

Вывод: Это позволяет рассматривать последние уравнения как закон сложения предельных ошибок.

Замечание: Предельные ошибки имеют статистический характер и часто за значение $\delta_{x_{max}}$ принимают единичную или удвоенную цену деления прибора, т.к. генеральное стандартное отклонение часто используют для определения наименьшей цены деления СИ.

Вывод: Интервал $\pm 2\sigma$ включает в себя лишь случайные реализации и деление его на глаз на более мелкие части лишено всякого смысла!!!

Замечание: Иногда, в целях облегчения поверки СИ, четырехсигмовый (трехсигмовый) интервал делят на 5-10 частей, но это оговаривается в паспорте $|d| \leq 4\sigma$.

ЭЛЕМЕНТЫ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОШИБОК В ПРИЛОЖЕНИИ К ОБРАБОТКЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

Внимание! Формулы аналогичные (*) и (**) справедливы и для оценок генеральных ср. кв. ошибок всех частных метрологических операций. Связь между ср. кв. ошибками σ_y , σ_x имеет вид:

$$\sigma_y = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \sigma_{x_i} \right)^2}$$

Для относительного стандартного отклонения конечного результата справедливо:

$$\sigma_{r,y} = \frac{\sigma_y}{y} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \ln f}{\partial x_i} \sigma_{x_i} \right)^2}$$

Внимание! Последние формулы справедливы лишь в отношении линейных функций, для других используются как приближенные.

Основные отличия от (*) и (**) заключаются в следующем:

1. Закон сложения ср. кв. ошибок отличен от закона сложения предельных ошибок.
2. Предельные ошибки функции аддитивны относительно предельных ошибок аргументов.
3. В случае ср. кв. ошибок аддитивны средневзвешенные дисперсии.

В частности для $y = x_1 + x_2$ имеем: $\delta_{y \max} = \delta_{x1 \max} + \delta_{x2 \max}$

для

, но

$$\sigma_y = \sqrt{\sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2}$$

$$y = x_1 \cdot x_2, \delta_{y \max} = x_2 \delta_{x1 \max} + x_1 \delta_{x2 \max}$$

$$\sigma_y = \sqrt{x_2^2 \sigma_{x_1}^2 + x_1^2 \sigma_{x_2}^2}$$

ЭЛЕМЕНТЫ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОШИБОК В ПРИЛОЖЕНИИ К ОБРАБОТКЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

Если $y = (x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_k) / (x_l \cdot \dots \cdot x_t)$, оценка относительной погрешности приводит к:

$$\varepsilon_{y \max} = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial \ln f}{\partial x_i} \delta_{x_i} \right| = \varepsilon_{x_1 \max} + \dots + \varepsilon_{x_n \max} = \sum_{i=1}^n \varepsilon_{x_n \max} \quad \sigma_{r,y} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_{r,x_i}^2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{x_1}}{x_1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\sigma_{x_n}}{x_n}\right)^2}$$

Вывод: Первая задача теории ошибок всегда разрешима.

Пример: $Z = x_1 \cdot \sqrt[5]{x_2}, \ln Z = \ln x_1 + 0,2 \ln x_2, \sigma_{r,z} = \sqrt{\sigma_{r,x_1}^2 + (0,2)^2 \cdot \sigma_{r,x_2}^2}$

Замечание: Общая погрешность косвенных измерений всегда выше погрешностей отдельных этапов измерительной процедуры. Соответственно по ходу последовательных стадий анализа погрешности накапливаются, и любой их пересчет сопровождается лишь возрастанием погрешностей.

Ошибка в определении малых разностей

Пусть оценка $y = x_1 - x_2$ проводится путем измерения аргументов. В первом приближении имеем $\sigma_{x_1} = \sigma_{x_2} = \sigma_x$, тогда $\delta_{y \max} = \delta_{x_1} + \delta_{x_2} = 2\delta_x, \varepsilon_{y \max} = 2\delta_x / (x_1 - x_2)$

Внимание! Чем меньше разность, тем больше относительная погрешность к ее оценке.

Вывод: Малые разности всегда определяются с большими погрешностями!!!

ЭЛЕМЕНТЫ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОШИБОК В ПРИЛОЖЕНИИ К ОБРАБОТКЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

Практический вывод: Измерения надо организовывать таким образом, чтобы y , x_1 , x_2 были соизмеримы, но величины x_1 , x_2 должны заметно отличаться друг от друга. В противном случае надо непосредственно измерять y , т.е. достаточно точно определять меньшую часть.

Замечание: Обратная (вторая) задача теории ошибок имеет однозначное решение, лишь в случае одного аргумента, который не представляет практического интереса.

Для функций нескольких аргументов решение оказывается неопределенным и требует наложения дополнительных ограничений. Наиболее простое из них — *принцип равных влияний*:

$$\varepsilon_{y \max} = \alpha_1 \varepsilon_{x_1} + \dots + \alpha_n \varepsilon_n, \varepsilon_{y \max} / n = \alpha_1 \varepsilon_{x_1} = \dots = \alpha_n \varepsilon_n$$

Замечание: Третья задача разрешима лишь в отдельных случаях, где необходимо найти условия экстремума функции:

$$\varepsilon_y = d|\ln f(x_1, x_2, \dots, x_n)|$$

для чего частные производные приравниваются нулю.

Пример: Найти погрешность определения скорости седиментации.

$$w = \frac{(\rho - \rho_0)gd^2}{18\mu}; \rho = 2650 \pm 30; \rho_0 = 1000 \pm 20; \varepsilon_{\rho \max} = 50 / 1650 = 3\%; g \rightarrow 0,2\%; \mu \rightarrow 1\%$$

$$\mu \rightarrow 1\%, d \rightarrow 2 \cdot 10 = 20\%; \varepsilon_{y \max} = 3 + 0,2 + 1 + 20 = 23,2 \approx 23\%$$

СТАТИСТИКИ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ОЦЕНКЕ ПОГРЕШНОСТЕЙ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

Понятие о генеральной и выборочной совокупности

- **Генеральной совокупностью** называют совокупность объектов, из которых производится выборка.
- **Выборочной совокупностью (выборкой)** называют совокупность случайно отобранных объектов.
- **Объемом совокупности** называют число объектов этой совокупности.
- **Повторной** называют выборку, при которой отобранный объект возвращается в генеральную совокупность.
- **Бесповторной** называют выборку, при которой отобранный объект в генеральную совокупность не возвращается. На практике обычно пользуются **случайным бесповторным** отбором.

Замечание: Выборка должна быть **репрезентативной (представительной)**, т.е. правильно представлять пропорции генеральной совокупности.

Вывод: В силу закона больших чисел выборка будет репрезентативной, если ее осуществлять случайно!!!

Статистические оценки параметров распределения

Обычно в распоряжении исследователя имеется **лишь данные выборки**, **полученные по результатам наблюдений** (которые обычно считают независимыми).

Внимание! Через эти данные и выражают оцениваемый параметр!!!

- **Статистической оценкой** неизвестного параметра теоретического распределения называют функцию от наблюдаемых случайных величин, которая дает **лишь приближенное значение** оцениваемого параметра.

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ
ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ОЦЕНКЕ ПОГРЕШНОСТЕЙ РЕЗУЛЬТАТОВ
ИЗМЕРЕНИЙ

Вывод: Для того чтобы статистические оценки давали "хорошее" приближения оцениваемых параметров, они должны быть несмещенными, эффективными и состоятельными.

- **Несмещенной** называют статистическую оценку, математическое ожидание которой равно оцениваемому параметру при любом объеме выборки. $M(X^*)=X$
- **Смещенной** называют статистическую оценку, математическое ожидание которой не равно оцениваемому параметру.
- **Эффективной** называют статистическую оценку, которая (при заданном объеме выборки n) имеет наименьшую возможную дисперсию.
- **Состоятельной** называют статистическую оценку, которая при $n \rightarrow \infty$ стремится по вероятности к оцениваемому параметру.
- **Генеральной средней** называют среднее арифметическое значений признака генеральной совокупности \bar{x}_r , если все значения x_1, \dots, x_N признака ген. сов. объема N различны. $\bar{x}_r = (x_1 + x_2 + \dots + x_N) / N$
Если они имеют частоты N_1, \dots, N_K , то $N = N_1 + \dots + N_K$ и

Вывод: *ген. ср.* есть средняя взвешенная значений признака с весами, равными N_k соответствующим частотам.

Внимание! Для непрерывного распределения признака X , *ген. ср.* определяют через МО

$$\bar{x}_r = M(X)$$

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ
ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ОЦЕНКЕ ПОГРЕШНОСТЕЙ РЕЗУЛЬТАТОВ
ИЗМЕРЕНИЙ

Выборочной средней называют среднее арифметическое значений признака выборочной совокупности $\bar{x}_B = (x_1 + x_2 + \dots + x_n) / n$ значения x_1, \dots, x_n признака **выб. сов.** объема n различны.

Если они имеют частоты n_1, \dots, n_k , то $n = n_1 + \dots + n_k$ $\bar{x}_T = (x_1 n_1 + x_2 n_2 + \dots + x_k n_k) / n$

Вывод: **выб. ср.** есть средняя взвешенная значений признака с весами, равными соответствующим частотам:

$$\bar{x}_B = \left(\sum_{i=1}^k n_i x_i \right) / n$$

Внимание! Выборочная средняя это определенное число, зависящее от объема выборки, следовательно, ее можно рассматривать, как случайную величину и говорить о распределениях (теоретическом и эмпирическом) и численных характеристиках (**M** и **D**).

Замечание: Для независимых, одинаково распределенных случайных величин X_n ,

$$M(\bar{X}_B) = \bar{x}_T$$

Вывод: **Выборочная средняя** есть **несмещенная оценка ген. ср.**

Внимание! Выборочная средняя является состоятельной оценкой генеральной средней, т.е. \bar{X}_B стремится по вероятности к **МО** (частный случай теоремы Чебышева).

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ
ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ОЦЕНКЕ ПОГРЕШНОСТЕЙ РЕЗУЛЬТАТОВ
ИЗМЕРЕНИЙ

Вывод: При увеличении объема выборки выборочная средняя стремится по вероятности к генеральной средней, т.е. выборочная средняя – состоятельная оценка.

Внимание! Имеет место *свойство устойчивости выборочных средних*, т.к. по нескольким выборкам достаточно большого объема из одной ген. совок. могут быть найдены выб. средние, которые приближенно будут равны между собой.

Замечание: Если дисперсии двух одинаково распределенных совокупностей равны между собой, то близость выборочных средних к генеральным *не зависит от отношения* объема выборки к объему генеральной совокупности.

Вывод: Она зависит от объема выборки: чем объем выборки больше, тем меньше выборочная средняя отличается от генеральной.

Групповой средней - называют среднее арифметическое значение признака, принадлежащее группе.

Внимание! Зная групповые средние и объемы групп, можно найти общую среднюю для всей совокупности, как среднее арифметическое групповых средних, взвешенное по объемам групп.

Отклонением – называют разность между значением признака и общей средней.

– сумма произведений отклонений $x_i - \bar{x}$ на соответствующие частоты равна нулю. Среднее значение отклонения равно нулю.

$$\sum n_i (x_i - \bar{x}) = 0$$

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ
ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ОЦЕНКЕ ПОГРЕШНОСТЕЙ РЕЗУЛЬТАТОВ
ИЗМЕРЕНИЙ

▣ **Генеральной дисперсией** D_G называют среднее арифметическое квадратов отклонения признака *ген. сов.* от их среднего значения:

$$D_G = \left(\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x}_G)^2 \right) / N \qquad D_G = \left(\sum_{i=1}^k N_i (x_i - \bar{x}_G)^2 \right) / N$$

Вывод: *Ген. дисп.* – средняя взвешенная квадратов отклонений с весами, равными соответствующим частотам.

Ген. дисп. – характеризует рассеивание значений количественного признака *ген. сов.* вокруг своего среднего значения. Кроме того, для этого же пользуются *ген. С.К. О.* (стандартом) – квадратный корень из *ген. дисп.*

$$\sigma_G = \sqrt{D_G}$$

▣ **Выборочной дисперсией** D_B называют среднее арифметическое квадратов отклонения признака *выборки* от их среднего значения : \bar{x}_B

$$D_B = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_B)^2 \right) / n \qquad D_B = \left(\sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x}_B)^2 \right) / n$$

Вывод: *Выб. дисп.* – средняя взвешенная квадратов отклонений с весами, равными соответствующим частотам.

Выб. дисп. – характеризует рассеивание значений количественного признака *выборки* вокруг своего среднего значения. Кроме того, для этого же пользуются *выб. С.К.О.* (стандартом) – квадратный корень из *выб. дисп.*

$$\sigma_B = \sqrt{D_B}$$

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ОЦЕНКЕ ПОГРЕШНОСТЕЙ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

Практический вывод: В общем случае дисперсия равна среднему квадрату значений признака минус квадрат общей средней: $D = \bar{x}^2 - [\bar{x}]^2$

▣ **Групповой дисперсией** – называют дисперсию значений признака, принадлежащих группе относительно групповой средней:

$$D_{jGP} = \left(\sum_{i=1}^j n_i (x_i - \bar{x}_j)^2 \right) / N_j$$

Внимание! Зная дисперсию каждой группы, можно найти их среднюю арифметическую.

▣ **Внутригрупповой дисперсией** – называют среднюю арифметическую дисперсий, взвешенную по объемам групп.

$$D_{ВНГР} = \left(\sum_{j=1}^k N_j D_{jGP} / n \right)$$

Внимание! Зная групповые средние и общую среднюю, можно найти дисперсию групповых средних относительно общей средней.

▣ **Межгрупповой дисперсией** – называют дисперсию групповых средних относительно общей средней:

$$D_{МГР} = \left(\sum_{j=1}^k N_j (\bar{x}_j - \bar{x})^2 \right) / n$$

▣ **Общей дисперсией** – называют дисперсию значений признака всей совокупности относительно общей средней:

$$D_{ОБЩ} = \left(\sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x})^2 \right) / n$$

Вывод: Если совокупность состоит из нескольких групп, то общая дисперсия равна сумме внутригрупповой и межгрупповой дисперсий: $D_{ОБЩ} = D_{ВНГР} + D_{МГР}$

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ОЦЕНКЕ ПОГРЕШНОСТЕЙ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

Оценка генеральной дисперсии по исправленной выборочной

Внимание! *Выб. дисп.* – является смещенной оценкой D_{Γ} т.е. **МО** выборочной дисперсии не равно оцениваемой *ген. дисп.* и

$$M[D_B] = \frac{n-1}{n} D_{\Gamma}$$

Вывод: Только *исправленная дисперсия* –

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_B$$

является несмещенной оценкой генеральной дисперсии.

Для оценки *ген. дисп.* принимают *испр. дисп.*:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x}_B)^2}{n-1}$$

Для оценки *СКО* генеральной совокупности - "исправленное" *СКО*:

$$S = \sqrt{S^2}$$

Замечание: *Исправленное СКО* не является несмещенной оценкой!!!

Внимание! На практике пользуются исправленной дисперсией, если примерно $n < 30$.

ЛЕКЦИЯ 9. Точность оценки, доверительная вероятность (надежность).

Доверительный интервал

Точечной называют оценку, которая определяется – *одним числом*.

Внимание! При выборке малого объема она может значительно отличаться от оцениваемого параметра, т.е. приводить к грубым ошибкам.

Интервальной называют оценку, которая определяется *двумя числами* – концами интервала.

Вывод: Интервальные оценки позволяют установить *точность* и *надежность* оценок.

Точность оценки характеризуется положительным числом δ , характеризующим модуль разности между статистической характеристикой Θ^* (по данным выборки) и оцениваемым неизвестным параметром Θ , т.е. $|\Theta - \Theta^*| < \delta$.

Вывод: Статистические методы не позволяют категорически утверждать, что оценка Θ^* удовлетворяет неравенству $|\Theta - \Theta^*| < \delta$, можно лишь говорить о вероятности γ , с которой это неравенство осуществляется.

Надежностью (доверительной вероятностью) оценки Θ по Θ^* называют вероятность γ с которой осуществляется неравенство, т.е. имеет место

$$P [|\Theta - \Theta^*| < \delta] = \gamma \text{ или } P [\Theta^* - \delta < \Theta < \Theta^* + \delta] = \gamma$$

Вывод: Представленные равенства означают, что вероятность того, что интервал $(\Theta^* - \delta, \Theta^* + \delta)$ покрывает (заклучает в себя) неизвестный параметр Θ , равна γ .

Внимание! Случайной величиной здесь является не оцениваемый параметр Θ , а интервал (доверительный), то правильнее говорить, не о вероятности попадания Θ в него, а о вероятности покрытия.

Точность оценки, доверительная вероятность (надежность).

Доверительный интервал

Доверительным называют интервал $(\Theta^* - \delta, \Theta^* + \delta)$, который покрывает (заключает в себя) неизвестный параметр Θ , с заданной надежностью γ .

Внимание! Надежность γ обычно задают наперед, при этом обычно используются следующие значения:

- ✓ **0,999** – для специальных теоретических исследований;
- ✓ **0,99** – в особо ответственных случаях;
- ✓ **0,95 (1,96 σ)** – при обработке аналитических данных;
- ✓ **0,9 (1,65 σ)** – при обработке данных технологического эксперимента;
- ✓ **0,8 (1,28 σ)** – при обработке данных биологического эксперимента.

$\pm\sigma, \gamma - 0,68; \quad \pm 2\sigma(1,96\sigma), \gamma - 0,95; \quad \pm 3\sigma - 0,997; \quad \pm 4\sigma - 0,99994.$

Вычисление случайной погрешности РИ (анализа), выраженных непрерывными величинами

Замечание: При вычислении случайной погрешности измерений (анализа) исходят из следующего: если в идеальных условиях измерять одну и ту же величину бесчисленное множество раз, то множество результатов сгруппированных вокруг истинного значения измеряемой величины, образует генеральную совокупность.

Вывод: При этом среднее арифметическое (генеральное среднее) этих результатов будет точно равно истинному значению измеряемой величины.

Точность оценки, доверительная вероятность (надежность).

Доверительный интервал

Замечание: В реальных условиях приходится иметь дело с ограниченным числом повторений (выборкой из генеральной совокупности) и *среднее арифметическое* (выборочное среднее) отличается от *ген. сред.* величиной случайной погрешности.

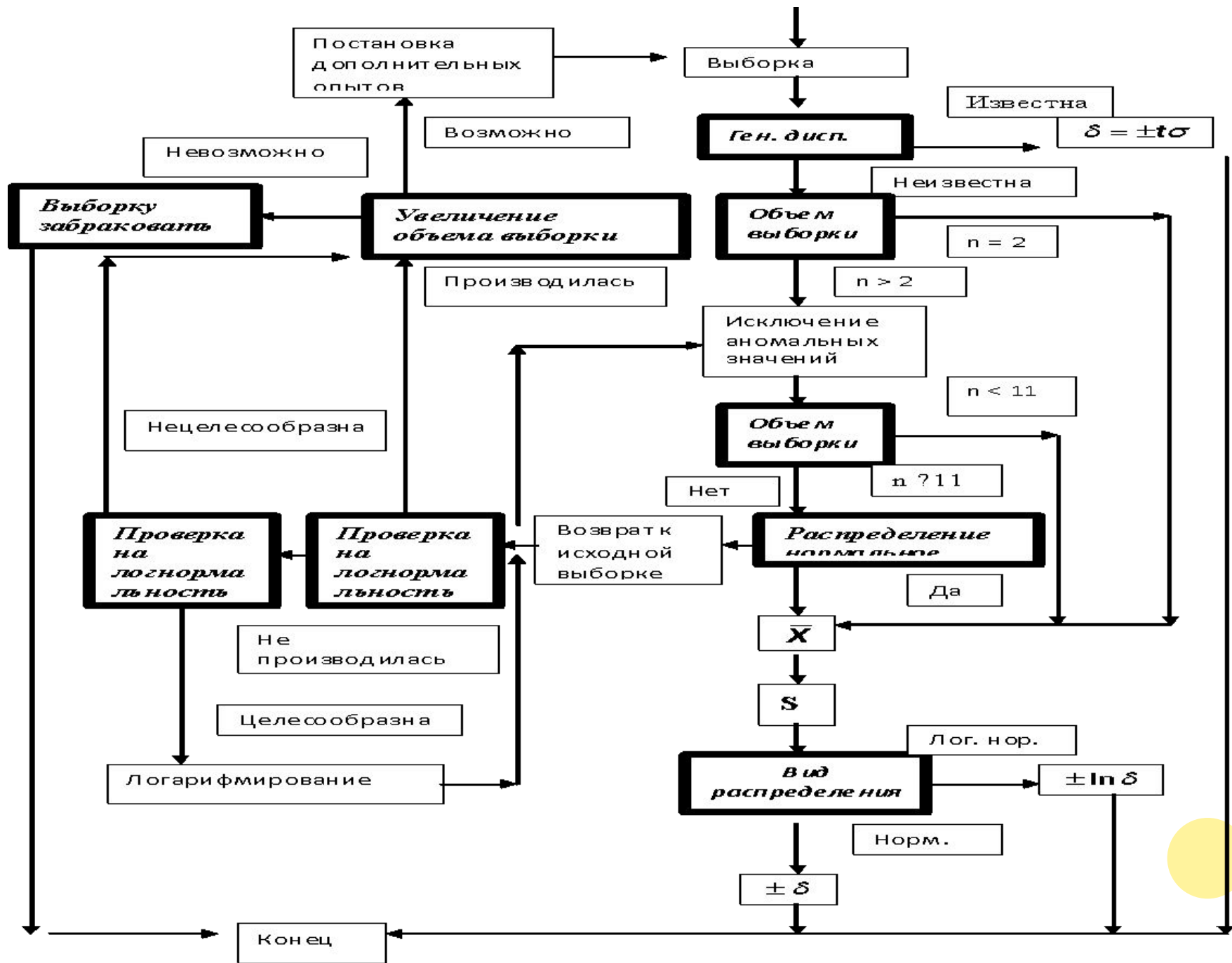
Вывод: Эту величину и ее знак установить невозможно, поэтому за случайную погрешность принимают половину доверительного интервала, который с данной доверительной вероятностью покрывает генеральное среднее.

Внимание! Правила вычисления доверительного интервала различны в зависимости от закона распределения экспериментальных точек вокруг выборочного среднего.

Наиболее часто встречается нормальное распределение. Особым случаем, которого является логарифмически нормальное распределение. Последнее имеет место, когда факторы, искажающие **РИ**, пропорциональны самому результату (мультипликативные составляющие).

Внимание! Лог. норм. распределение наблюдается при использовании аналитических методов на пределе их чувствительности, а также при большой широте диапазона измеряемых величин, например при ситовом анализе.

Замечание: Во всех остальных случаях распределения (не вполне строго) обычно относят к "нестандартным" (непараметрическим) распределениям. Общий порядок вычисления выборочного среднего и случайной погрешности представлен на блок-схеме.



Точность оценки, доверительная вероятность (надежность).

Доверительный интервал

Доверительные интервалы для оценки математического ожидания нормального распределения при известном σ

Пусть количественный признак X распределен нормально и известно **СКО** - σ
Требуется оценить **МО** - a по выборочной средней \bar{X} , т.е. найти доверительные
интервалы, покрывающие параметр a с надежностью γ .

Известно, что если случайная величина X распределена нормально, то выборочная
средняя \bar{X} , найденная по независимым наблюдениям, также распределена
нормально и имеет место:

$$M(\bar{X}) = a, \sigma(\bar{X}) = \sigma / \sqrt{n}$$

Требуя выполнения соотношения $P[|\bar{X} - a| < \delta] = \gamma$

получаем: $P[|\bar{X} - a| < \delta] = 2\Phi(\delta / \sigma) = 2\Phi(\delta \sqrt{n} / \sigma) = 2\Phi(t)$

где $t = \delta \sqrt{n} / \sigma$ $P[|\bar{X} - a| < t\sigma / \sqrt{n}] = 2\Phi(t) = \gamma$

Вывод: Смысл последнего выражения таков: с надежностью γ можно утверждать,
что доверительный интервал $(\bar{x} - t\sigma / \sqrt{n}, \bar{x} + t\sigma / \sqrt{n})$ покрывает γ раз из n раз
точность оценки $\delta = t\sigma / \sqrt{n}$

Точность оценки, доверительная вероятность (надежность).

Доверительный интервал

Пример: Случайная величина X имеет нормальное распределение с $\sigma=3$, объем выборки $n=36$, надежность оценки $\gamma=0,95$.

Найти доверительные интервалы для оценки неизвестного **МО** - a , по выборочным средним \bar{x} .

1. Находим t :

Из $2\Phi(t)=0,95$, получаем $\Phi(t)=0,475$, по таблице функции Лапласа находим $t=1,96$.

2. Точность оценки $\delta = t\sigma / \sqrt{n} = 1,96 \cdot 3 / 6 = 0,98$

3. Доверительный интервал $(\bar{x} - 0,98; \bar{x} + 0,98)$

4. Ответ: $(\bar{x} - 0,98 < a < \bar{x} + 0,98)$

Внимание! Ошибочно писать $P(\bar{x} - 0,98 < a < \bar{x} + 0,98) = 0,95$ доверительная вероятность не следует связывать с оцениваемым параметром, она связана лишь с границами доверительного интервала, которые изменяются от выборки к выборке.

Вывод: Если требуется оценить **МО** с заданной точностью δ и надежностью γ , то минимальный объем выборки, который обеспечит эту точность, равен $n = t^2 \sigma^2 / \delta^2$

$$n = t^2 \sigma^2 / \delta^2$$

ЛЕКЦИЯ 10. Загрязнения, промахи, аномальные значения, выбросы, грубые ошибки и методы их устранения

Робастное (устойчивое) статистическое оценивание

Отсчеты, принадлежащие другой генеральной совокупности, по своим значениям могут несущественно отличаться от значений интересующей нас генеральной совокупности. Обнаружить их можно по виду плотности распределения (смесь).

Наличие таких аномальных отсчетов принято называть *загрязнением выборки*.

Внимание! Выделить члены выборки принадлежащие к каждой из генеральной совокупности в этом случае практически невозможно.

Другим видом аномальных отсчетов являются плотности распределения которые не соприкасаются и не смешиваются между собой.

Вывод: Такие отсчеты резко отличающиеся от большинства других отсчетов принято называть *промахами* и исключать из выборки.

Замечание: Особую неприятность доставляют отсчеты которые не входят в основную выборку, но и не удалены от нее на значительное расстояние (*предполагаемый промах*).

Загрязнения, промахи, аномальные значения, выбросы, грубые ошибки и методы их устранения

На практике крайние значения выборки стали отбрасывать, этот способ получил название "*цензурированная выборка*". Для его реализации необходимы какие-либо формальные критерии.

Замечание: Простейшим методом цензурирования является "правило 3 σ " с границей $|X_{ГР}| = 3\sigma$ и $|X_i| \geq 3\sigma$ - промах.

Внимание! Однако во многих случаях это правило оказывается слишком "жестким".

Вывод: Было предложено:

$$\text{при } 6 < n \leq 100 \quad |X_{ГР}| = 3\sigma ;$$

$$\text{при } 100 < n \leq 1000 \quad |X_{ГР}| = 4,5\sigma ;$$

$$\text{при } 1000 < n \leq 10000 \quad |X_{ГР}| = 5\sigma .$$

Внимание! Еще более квалифицированно (с использованием таблиц вероятности крайних членов вариационного ряда для нормального распределения) это регламентировал ГОСТ 11.002-73, а также определяет ГОСТ Р ИСО 5479-2002.

Замечание: Однако для распределений отличных от нормального использование подобных таблиц лишено всякого смысла. По той же причине (нормальный закон распределения), не спасает положения и использование распределения Стьюдента с границами $t_\gamma S$.

Загрязнения, промахи, аномальные значения, выбросы, грубые ошибки и методы их устранения

Пример: при $n = 100$, $|X_i| \geq 3\sigma$ - промах для нормального распределения, для равномерного промах $|X_i| \geq 1,8\sigma$, а для распределения Лапласа $|X_i| = 3\sigma$ принадлежит выборке.

Вывод: Границы $t\sigma$ и $t_{\gamma}S$ цензурирования выборки зависят не только от объема выборки, но и от вида распределения.

При выявлении выбросов возникают серьезные вопросы: являются ли отклонившиеся данные действительно ошибками или это реальные значения и как получить адекватные оценки для параметров изучаемой совокупности.

Внимание! Решением подобных вопросов занимается специальный раздел статистики – робастное (устойчивое) оценивание.

Методы робастного оценивания – это статистические методы, которые позволяют получить достаточно надежные оценки статистической совокупности с учетом неявности закона ее распределения и наличия существенных отклонений в значениях данных. У истоков их разработки стояли Хубер, Смирнов и Тьюки.

При решении таких задач выделяют два основных подхода.

1. Первый ориентирован на устранение из выборки ошибок и оценку по "исправленным" значениям.
2. Второй подход предполагает выделение истинных значений признака и собственно ошибки $x = x_{ист} + \xi$.

Загрязнения, промахи, аномальные значения, выбросы, грубые ошибки и методы их устранения

Замечание: При этом осуществляется модификация данных таким образом, чтобы искажающий элемент ξ получил нормальное распределение с нулевым МО. Тогда для некоторого множества грубых ошибок $\sum \xi$ приближается к нулю, а оценки \bar{x} - к истинным значениям.

Алгоритм обработки "засорений" включает последовательное выполнение следующих шагов.

1. Распознавание ошибок в данных.
2. Выбор метода и проведение робастного оценивания данных.
3. Критериальная или логическая проверка и интерпретация результатов устойчивого оценивания.

Внимание! Проверку выборки на наличие аномальных значений проводят при числе повторений опыта $n \geq 3$, т.к. при $n=2$ невозможно определить, какая из величин аномальна. При $n < 11$, проверку проводят в предположении, что распределение нормально или лог. нормально.

Замечание: Простой формальный прием для обнаружения грубых ошибок основывается на расчете T – критерия Смирнова-Граббса:

$$T_H = \frac{|x - \bar{x}|}{s}$$

Вывод: Наблюдаемое значение T – критерия сравнивают с пороговыми, заданными соответствующими распределениями $T_{KP} = T_{\alpha, n}$, если превышение то относят к классу выбросов. Аналогично, если уровень значимости α равен или превышает **0,05**, то данные не аномальны.

n	Уровень значимости $\beta=\alpha/2$				Дов. вероятность 1- α			f=n-2	Уровень значимости β			
	0,1	0,05	0,025	0,01	0,9	0,95	0,99		0,1	0,05	0,025	0,01
3	1,41	1,41	1,41	1,41	1,412	1,414	1,414	1	1,148	1,153	1,155	1,155
4	1,65	1,69	1,71	1,72	1,689	1,710	1,728	2	1,425	1,463	1,481	1,492
5	1,79	1,87	1,92	1,96	1,869	1,917	1,972	3	1,602	1,672	1,715	1,749
6	1,89	2,00	2,07	2,13	1,996	2,067	2,161	4	1,729	1,822	1,887	1,944
7	1,97	2,09	2,18	2,27	2,093	2,182	2,310	5	1,828	1,938	2,020	2,097
8	2,04	2,17	2,27	2,37	2,172	2,273	2,431	6	1,909	2,032	2,126	2,221
9	2,10	2,24	2,35	2,46	2,238	2,349	2,532	7	1,977	2,109	2,215	2,323
10	2,15	2,29	2,41	2,54	2,294	2,414	2,616	8	2,036	2,176	2,290	2,410
11	2,19	2,34	2,47	2,61	2,343	2,470	2,689	9	2,088	2,234	2,355	2,485
12	2,23	2,39	2,52	2,66	2,387	2,519	2,753	10	2,134	2,285	2,412	2,550
13	2,26	2,43	2,56	2,71	2,426	2,563	2,809	11	2,175	2,331	2,461	2,608
14	2,30	2,46	2,60	2,76	2,461	2,602	2,859	12	2,213	2,371	2,507	2,659
15	2,33	2,49	2,64	2,80	2,494	2,638	2,905	13	2,247	2,408	2,549	2,705
16	2,35	2,52	2,67	2,84	2,523	2,670	2,946	14	2,279	2,443	2,585	2,747
17	2,38	2,55	2,70	2,87	2,551	2,701	2,983	15	2,309	2,475	2,620	2,785
18	2,40	2,58	2,73	2,90	2,577	2,728	3,017	16	2,336	2,504	2,651	2,821
19	2,43	2,60	2,75	2,93	2,601	2,754	3,049	17	2,361	2,531	2,681	2,854
20	2,45	2,62	2,78	2,96	2,623	2,779	3,079	18	2,385	2,557	2,708	2,884
21	2,47	2,64	2,80	2,98	2,644	2,801	3,106	19	2,408	2,580	2,733	2,912
22	2,49	2,66	2,82	3,01	2,664	2,823	3,132	20	2,429	2,603	2,758	2,934
23	2,50	2,68	2,84	3,03	2,683	2,843	3,156	21	2,449	2,624	2,781	2,963
24	2,52	2,70	2,86	3,05	2,701	2,862	3,179	22	2,467	2,644	2,802	2,987
25	2,54	2,72	2,88	3,07	2,718	2,880	3,200	23	2,486	2,662	2,822	3,009
26					2,734	2,897	3,220					
27					2,749	2,913	3,239					
28					2,764	2,929	3,258					
29					2,778	2,944	3,275					
30					2,792	2,958	3,291					
35					2,853	3,022	3,364					

Загрязнения, промахи, аномальные значения, выбросы, грубые ошибки и методы их устранения

Внимание! Существуют и другие критерии цензурирования выборки

Замечание: Если имеется несколько подозрительных элементов, то проверку осуществляют в несколько стадий:

1. Сначала составляют уменьшенную выборку, включив в нее все неподозрительные элементы и один подозрительный (с минимальным отклонением от среднего).
2. Если проверка выявляет аномальность этого элемента, то отбрасывают все подозрительные элементы.
3. Иначе в выборку включают исследованный элемент и повторяют проверку.

Пример: Результаты определения содержания вещества в продукте представлены в таблице. Произвести проверку на аномальность.

№ ан.	$X_i, \%$	$ X_i - X_{\text{ср}} $	X^2_i
1	87,32	0,94	7624,78
2	87,64	0,62	7680,77
3	87,66	0,60	7684,28
4	87,71	0,55	7693,04
5	90,96	2,70	8273,72
Сум.	441,29	-	38956,59

Среднее значение $X_{\text{ср}} = 441,29/5 = 88,26$.

$$S^2 = (38956,59 - 5 \cdot 88,26^2) / 4 = 1,8635$$

$$S = 1,365; T = 2,70 / 1,365 = 1,978$$

Согласно таблице $f = 5 - 2 = 3$; $\beta \ll 0,01$

Вывод: Пятый результат аномален и его надлежит отвергнуть

Лекция 11. Проверка на нормальность распределения

Внимание! В большинстве практических случаев проверку на нормальность не проводят, априори считая распределение нормальным или логарифмически нормальным.

Замечание: В случае малой выборки отклонение от нормального распределения практически не сказывается на точности вычисления погрешности.

Вывод: Исключение составляют выборки с числом элементов **11 и более**, для которых подобная проверка **обязательна**.

Выборку объемом **11-50 (30)** элементов можно проверить на нормальность по следующей формуле:

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^n d_i}{n}$$

где \bar{d} - выборочное среднее отклонение; d_i - отклонение от среднего i -го элемента выборки (по модулю).

Полученное значение сравнивают с табличным, определяя доверительную вероятность соответствия норм. распр.

Вывод: Если $\gamma \geq 0,95$ распределение считают нормальным.

**ЗНАЧЕНИЯ ВЫБОРОЧНОГО СРЕДНЕГО ОТКЛОНЕНИЯ ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ
УРОВНЕЙ ЗНАЧИМОСТИ**

Объем выборки n	α					
	0,01	0,05	0,10	0,90	0,95	0,99
11	0,9359	0,9073	0,8899	0,7409	0,7153	0,6675
16	0,9137	0,8884	0,8733	0,7452	0,7236	0,6829
21	0,9001	0,8768	0,8631	0,7495	0,7304	0,6950
26	0,8901	0,8686	0,8570	0,7530	0,7360	0,7040
31	0,8827	0,8625	0,8511	0,7559	0,7404	0,7110
36	0,8769	0,8578	0,8468	0,7583	0,7440	0,7167
41	0,8722	0,8540	0,8436	0,7604	0,7470	0,7216
46	0,8682	0,8508	0,8409	0,7621	0,7496	0,7256
51	0,8648	0,8481	0,8385	0,7636	0,7518	0,7291
61	0,8592	0,8434	0,8349	0,7662	0,7554	0,7347
71	0,8549	0,8403	0,8321	0,7683	0,7583	0,7393
81	0,8515	0,8376	0,8298	0,7700	0,7607	0,7430
91	0,8484	0,8353	0,8279	0,7714	0,7626	0,7460
101	0,8460	0,8344	0,8264	0,7726	0,7644	0,7487
201	0,8322	0,8229	0,8178	0,7796	0,7738	0,7629
301	0,8260	0,8183	0,8140	0,7828	0,7781	0,7693
401	0,8223	0,8156	0,8118	0,7847	0,7807	0,7731
501	0,8198	0,8136	0,8103	0,7861	0,7825	0,7757
601	0,8179	0,8123	0,8092	0,7873	0,7838	0,7776
701	0,8164	0,8112	0,8084	0,7878	0,7848	0,7791
801	0,8152	0,8103	0,8077	0,7885	0,7857	0,7803
901	0,8142	0,8096	0,8071	0,78990	0,7864	0,7814
1001	0,8134	0,8090	0,8066	0,7894	0,7869	0,7822

Проверка на нормальность распределения

Пример: Анализ пробы сточных вод на содержание белка представлен в таблице. Проверить полученные результаты на нормальность распределения.

№ ан.	$X_i, \%$	$ X_i - X_{\text{ср}} $	X^2_i	$\lg X_i(-1)$	d	$d^2 \cdot 10^{-2}$
1	0,050	0,034	0,25	1,301	0,208	4,326
2	0,050	0,034	0,25	1,301	0,208	4,326
3	0,060	0,024	0,36	1,222	0,129	1,664
4	0,060	0,024	0,36	1,222	0,129	1,664
5	0,090	0,006	0,81	1,046	0,047	0,221
6	0,090	0,006	0,81	1,046	0,047	0,221
7	0,090	0,006	0,81	1,046	0,047	0,221
8	0,090	0,006	0,81	1,046	0,047	0,221
9	0,100	0,016	1,00	1,000	0,093	0,865
10	0,100	0,016	1,00	1,000	0,093	0,865
11	0,110	0,026	1,21	0,959	0,134	1,796
12	0,120	0,036	1,44	0,921	0,172	2,958
Сум	1,01	0,234	9,11	13,110	1,354	19,348

Из графы 3 таблицы следует, что аномальные значения отсутствуют.

$$X_{\text{ср}} = 1,01/12 = 0,084$$

$$S^2 = (0,0911 - 12 \cdot 0,084^2) / 11 = 5,84 \cdot 10^{-4}$$

$$S = 2,42 \cdot 10^{-2}$$

$$\bar{d} = 0,234 / (12 \cdot 2,42 \cdot 10^{-2}) = 0,806$$

Вывод: Согласно табл. ЗВСО распределение явно отличается от нормального.

Проверим на распределение на логнормальность.

Проверка на аномальность значений не целесообразна.

$$X_{\text{ср}} = -13,110/12 = -1,093$$

$$S^2 = 0,1935/11 = 0,0176; S = 0,133$$

$$\bar{d} = 1,354 / (12 \cdot 0,133) = 0,848$$

Вывод: Согласно табл. ЗВСО распределение явно отличается от логнормального.

Заключение:

Выборку забраковать.

Проверка на нормальность распределения

Внимание! При объеме выборки *более 50 (30)* элементов проверку осуществляют с помощью *критериев согласия*.

Статистическая проверка гипотез.

Основные понятия

Статистической называют гипотезу о виде неизвестного распределения, или о параметрах известных распределений.

Пример: Генеральная совокупность распределена по нормальному закону. Дисперсии двух нормальных совокупностей равны между собой.

✓ **Нулевой (основной)** называют выдвинутую гипотезу H_0 , **конкурирующей (альтернативной)** называют гипотезу H_1 , которая противоречит нулевой.

Пример: $H_0 : a=10; H_1 : a \neq 10$

✓ **Простой** называют гипотезу, содержащую только одно предположение.

Пример: $H_0 : a=10; (\sigma - \text{известно})$ – простая гипотеза.

✓ **Сложной** называют гипотезу, которая состоит из конечного или бесконечного числа простых гипотез. $H_0 : a > 10$ – сложная гипотеза, для нормального распределения $a=10; (\sigma - \text{неизвестно})$ – сложная гипотеза.

Проверка на нормальность распределения

- ✓ **Ошибка первого рода** – отвергнута правильная гипотеза.
- ✓ **Ошибка второго рода** – принята неправильная гипотеза.

Внимание! Последствия этих ошибок могут оказаться весьма различными.

Правильное решение принимается только в двух случаях:

1. гипотеза принимается причем и в действительности она правильная;
2. гипотеза отвергается причем и в действительности она неверна.

Вероятность совершить ошибку первого рода обозначают α и называют - уровнем значимости.

Обычно $\alpha=0,05$ или $0,01$. $\alpha=0,05$ означает, что в пяти случаях из ста имеется риск допустить ошибку первого рода (отвергнуть правильную гипотезу).

- ✓ **Статистическим критерием** (или просто **критерием**) – называют случайную величину K , которая служит для проверки нулевой гипотезы.
- ✓ **Наблюдаемым значением K_H** – называют значение критерия, вычисленное по выборкам.

Замечание: После выбора критерия множество его значений разбивают на два непересекающихся подмножества: одно содержит значение критерия, при которых нулевая гипотеза отвергается, другое – при которых она принимается.

Проверка на нормальность распределения

- ✓ **Критической областью** – называют совокупность значений критерия, при которых нулевую гипотезу отвергают (наиболее важная область, т.к. "все остальное тоже может быть").
- ✓ **Областью принятия гипотезы (ОДЗ)** – называют совокупность значений критерия, при которых гипотезу принимают.
- ✓ **Основной принцип проверки статистических гипотез** – если наблюдаемое значение критерия принадлежит критической области – гипотезу отвергают, если наблюдаемое значение критерия принадлежит области принятия гипотезы – гипотезу принимают.
- ✓ **Критическими точками (границами) $k_{кр}$** – называют точки, отделяющие критическую область от области принятия гипотезы.
- ✓ **Правосторонней** называют критическую область, определенную неравенством $K > k_{кр}$, где $k_{кр}$ - положительное число.
- ✓ **Левосторонней** называют критическую область, определенную неравенством $K < k_{кр}$, где $k_{кр}$ - отрицательное число.
- ✓ **Односторонней** называют правостороннюю или левостороннюю критическую область.
- ✓ **Двусторонней** называют критическую область, определенную неравенствами $K < k_1$, и $K > k_2$, где $k_2 > k_1$. Для симметрии относительно нуля $|K| > k_{кр}$.

Проверка на нормальность распределения

Правосторонняя критическая область

$P(K > k_{KP}) = \alpha$ - уровень значимости. Нулевую гипотезу отвергают, в противном случае нет оснований, чтобы отвергнуть нулевую гипотезу.

Внимание! Пользуясь этим равенством, мы с вероятностью α рискуем совершить ошибку первого рода.

Внимание! Пусть нулевая гипотеза принята. Однако - *ошибочно думать, что тем самым она доказана!!!* Правильно говорить: *"Данные наблюдений согласуются с нулевой гипотезой и, следовательно, не дают оснований ее отвергнуть"*. Отвергают гипотезу более категорично, чем принимают.

Левосторонняя критическая область

$P(K < k_{KP}) = \alpha$, $k_{KP} < 0$; при $K_H < k_{KP}$ нулевую гипотезу отвергают.

Двусторонняя критическая область

$P(K < k_1) + P(K > k_2) = \alpha$ - бесчисленное число вариантов.

При симметрии относительно нуля $P(K < -k_{KP}) = P(K > k_{KP})$ и получаем $P(K > k_{KP}) = \alpha/2$.

Вывод: Односторонний критерий более "жестко" отвергает нулевую гипотезу чем двусторонний!

Замечание: *Не следует путать с доверительным интервалом!* Если имеются односторонние ограничения (только снизу или только сверху) целесообразно пользоваться односторонней доверительной вероятностью:

$$\bar{\gamma} = \frac{1 + \gamma}{2}$$

т.к. это позволяет уменьшить погрешность **РИ**. При этом доверительный интервал имеет вид (ограничения снизу) или (ограничения сверху).

Лекция 12. Проверка гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности

Критерием согласия – называют критерий проверки гипотезы о предполагаемом законе неизвестного распределения.

Замечание: Имеется несколько критериев согласия χ^2 (Пирсона), Колмогорова, Смирнова и т.д.

Внимание! При объеме выборки более **50 (30)** проверку обычно ведут по **критерию Пирсона** следующим образом.

1. Сначала элементы выборки ранжируют.
2. Полученный ряд разбивают на классы, число которых определяют формулой:
, где l - число классов $l > 5$.

Замечание: Минимальное число классов 5, ширина всех классов обычно одинакова. Желательно чтобы в каждом классе было не менее 5 элементов выборки. По крайней мере, такие классы должны доминировать.

3. Для каждого класса вычисляют величину абсциссы нормального распределения:
, где $x_{кли}$ – величина, соответствующая началу данного класса.
4. По величине $U_i = |(x_{кли} - \bar{x})/S|$ воспользовавшись таблицами или Excel для каждого класса определяют значение ординаты нормального распределения $\varphi(U_i)$.



Проверка гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности

5. С помощью ординаты $\varphi(U_i)$ вычисляют теоретическое количество элементов выборке в каждом из классов:

$$n'_i = \frac{\sum_{i=1}^l (n_i a)}{S} \varphi(U_i)$$

где $\sum_{i=1}^l n_i = n$, n'_i – теоретическое количество элементов в данном классе, a – ширина класса.

Замечание: Классы, имеющие число элементов менее 5, объединяют с соседними классами. Теоретическое число элементов объединенного класса представляет собой сумму теоретического числа элементов объединяемых классов.

Внимание! Фактически находят варианты теоретического и эмпирического распределения, как середины абсцисс каждого класса. Вычисляют теоретические и эмпирические частоты для вариантов распределения.

6. В качестве критерия проверки нулевой гипотезы применяют:

$f = l - l_{об} - 3$, где f – число степеней свободы, n_i, n'_i – эмпирические и теоретические частоты соответственно, $l_{об}$ – число объединенных классов.

$$\chi^2 = \sum \frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}$$

7. При сравнении вычисленного значения критерия с табличным определяют при данном числе степеней свободы вероятность того, что отклонение от нормальности распределения носит случайный характер.

Вывод: Условие нормальности – уровень значимости $\alpha \leq 0,95$.

Проверка гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности

Пример: Одну и ту же пробу проанализировали 60 раз. Проверить полученные данные на нормальность распределения.

№ класса	$x_{кли}$	n_i	U_i	$\varphi(U_i)$	n'_i	$n_{iоб}$	$n'_{iоб}$	$(n_i - n'_{iоб})^2 / n'_{iоб}$
1	25,10	3	1,240	0,18494	4	-	-	-
2	25,18	6	0,898	0,26848	6	9	10	0,10
3	25,26	7	0,556	0,34105	7	7	7	0
4	25,36	10	0,214	0,39024	8	10	8	0,50
5	25,42	15	0,128	0,39559	8	15	8	6,12
6	25,50	9	0,470	0,35723	7	9	7	0,14
7	25,58	6	0,813	0,28737	6	10	11	0,91
8	25,64	4	1,069	0,22506	5	-	-	-
Сумма	-	60						7,77

Наименьшее экспериментальное значение – 25,10%, наибольшее – 25,64%, число классов $60^{1/2} \approx 8$, ширина класса $(25,64 - 25,10) / 8 = 0,08$, выборочное среднее – 25,39%, СКО – 0,2338. Исходя из этих значений находим U_i , φ_i и др. данные. Для $f = 8 - 2 - 3 = 3$ с помощью χ^2 получим $\alpha < 0,95$.

Вывод: Отличие данного распределения от нормального носит случайный характер, что не противоречит гипотезе о нормальном распределении данных.

Проверка гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности

Внимание! Критерий Пирсона отвечает на вопрос – случайно ли расхождение частот. Возможно, оно случайно (незначительно) или неслучайно (значимо) и тогда теоретические частоты вычислены исходя из неверной гипотезы о виде распределения.

Вывод: Как и любой другой критерий он не доказывает справедливость гипотезы (генеральная совокупность распределена нормально), а лишь устанавливает на принятом уровне значимости ее согласие или несогласие с данными наблюдений.

Доказано, что при $n \rightarrow \infty$ закон распределения случайной величины суммы χ^2 независимо от того, какому закону подчиняется ген. совокуп., стремиться к закону распределения χ^2 с k степенями свободы.

Внимание! Число степеней свободы находят из равенства: $k = s - 1 - r$

где s - число классов (групп) выборки (частичных интервалов), r - число параметров предполагаемого распределения, которые оценены по выборке.

В частности, для нормального распределения их два **МО** и **СКО**, поэтому $k = s - 3$.

Вывод: Односторонний критерий более "жестко" отвергает нулевую гипотезу, чем двухсторонний, имеем и при нет

оснований отвергать нулевую гипотезу. Её отвергают при

$$P[\chi^2 > \chi_{кр}^2(\alpha; k)] = \alpha$$

$$\chi_{наб}^2 < \chi_{кр}^2$$

$$\chi_{наб}^2 > \chi_{кр}^2$$

Проверка гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности

Критерий Смирнова-Колмогорова позволяет сравнивать две независимые выборки и ответить на вопрос, относятся ли они к одной и той же генеральной совокупности без выбора для сравнения какой-либо предполагаемой модели.

Внимание! Этот критерий чувствителен к различию центров, величин рассеяния, асимметрии и эксцесса. В качестве статистики используется наибольшая (по модулю) разность между ординатами кривых обеих относительных накопленных частот.

Замечание: Сравнение производится при одинаковых для обеих выборок границах и числе интервалов группирования.

В начале накопленные частоты F_1, F_2 делятся на соответствующие объемы выборок n_1, n_2 .

Затем вычисляется разность и максимум этой разности используется как искомая статистика (для двустороннего критерия).

$$D = \max \left[\frac{F_1}{n_1} - \frac{F_2}{n_2} \right] = \max [F_n - F_0]$$



Проверка гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности

Распределение этой статистики было табулировано Смирновым.

Для $n_1 + n_2 > 35$ значение критических может приближенно быть вычислено как:

$$D_{KP} = K_P \sqrt{\frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_2}}$$

где

для уровня $q = 1 - P$

При сопоставлении данной выборки с объемом $n_1 = n$ с выбранной аналитической моделью $n_2 = \infty$ имеем:

$$D_{KP} = K_P / \sqrt{n} = \sqrt{-0,5 \ln(q/2) / n}$$

для D при $n = n_1 = n_2$ и для

Вывод: Достоинство данного критерия состоит в том, что он позволяет определить уровень значимости q (для $n > 35$), не прибегая к использованию каких-либо таблиц.

Внимание! Критерий Смирнова-Колмогорова в общем случае неприменим, если в $F_0(x)$ входят оценки параметров, которые были произведены по той же самой выборке, по которой была вычислена

$\bar{F}_n(x)$

Лекция 13. Доверительные интервалы для оценки МО нормального распределения при неизвестном σ

Пусть количественный признак X распределен нормально, причем СКО σ неизвестно. Требуется оценить МО - a с помощью доверительных интервалов.

Строим случайную величину

которая имеет распределение Стюдента $k = n - 1$ степенями свободы. Здесь, исправленное СКО S и случайные величины. Получаем:

$$\bar{X}$$

Далее, заменяя случайные величины на неслучайные \bar{X}, S найденные по выборке получаем доверительный интервал покрывающий a с надежностью γ .

$$(\bar{x} - t_{\gamma} s / \sqrt{n}, \bar{x} + t_{\gamma} s / \sqrt{n})$$

Замечание: Для малых выборок ($n < 30$), в особенности для малых значений n , замена распределения Стюдента нормальным приводит к грубым ошибкам и неоправданному сужению доверительного интервала, т.е. к неоправданному повышению точности оценки.



ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ОЦЕНКЕ ПОГРЕШНОСТЕЙ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

Пример: Количественный признак X генеральной совокупности распределен нормально. При $n=16$, определено $\bar{x} = 20,2; s = 0,8$

Оценить неизвестное **МО** при помощи доверительного интервала с надежностью **0,95**.

Найдем t_γ , пользуясь таблицей, при $\gamma=0,95$, $n=16$, находим $t_\gamma = 2,13$ и
 $(\bar{x} - t_\gamma s / \sqrt{n}) = 20,2 - 2,13 \cdot 0,8 / \sqrt{16} = 19,774$ и $(\bar{x} + t_\gamma s / \sqrt{n}) = 20,2 + 2,13 \cdot 0,8 / \sqrt{16} = 20,626$

Ответ: С надежностью 0,95 неизвестный параметр a заключен в доверительном интервале $19,774, < a < 20,626$

Замечание: Погрешность опыта для $n=2...10$ иногда определяют по формуле:

где M – поправка на смещение СКО.
$$\delta = s \frac{t_\gamma}{\sqrt{nm}}$$

Внимание! Уменьшение интервала наиболее заметно при 2-4 повторностях, что связано с увеличением симметрии в результатах.

В тех случаях когда априори распределение лог. норм. все вычисления производят с логарифмами элементов выборки. Крайние точки доверительного интервала получают потенцированием соответствующих величин. При этом полученный интервал всегда несимметричен относительно среднего.

Замечание: При $n < 11$ и , данные можно обрабатывать как нормально распределенные.

$$\frac{s^2}{\bar{x}} < 0,3$$

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ
ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ОЦЕНКЕ ПОГРЕШНОСТЕЙ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

Значение $\frac{t_{\gamma}}{\sqrt{nM}}$ при односторонней $\bar{\alpha} = (1 + \alpha) / 2$ доверительной вероятности

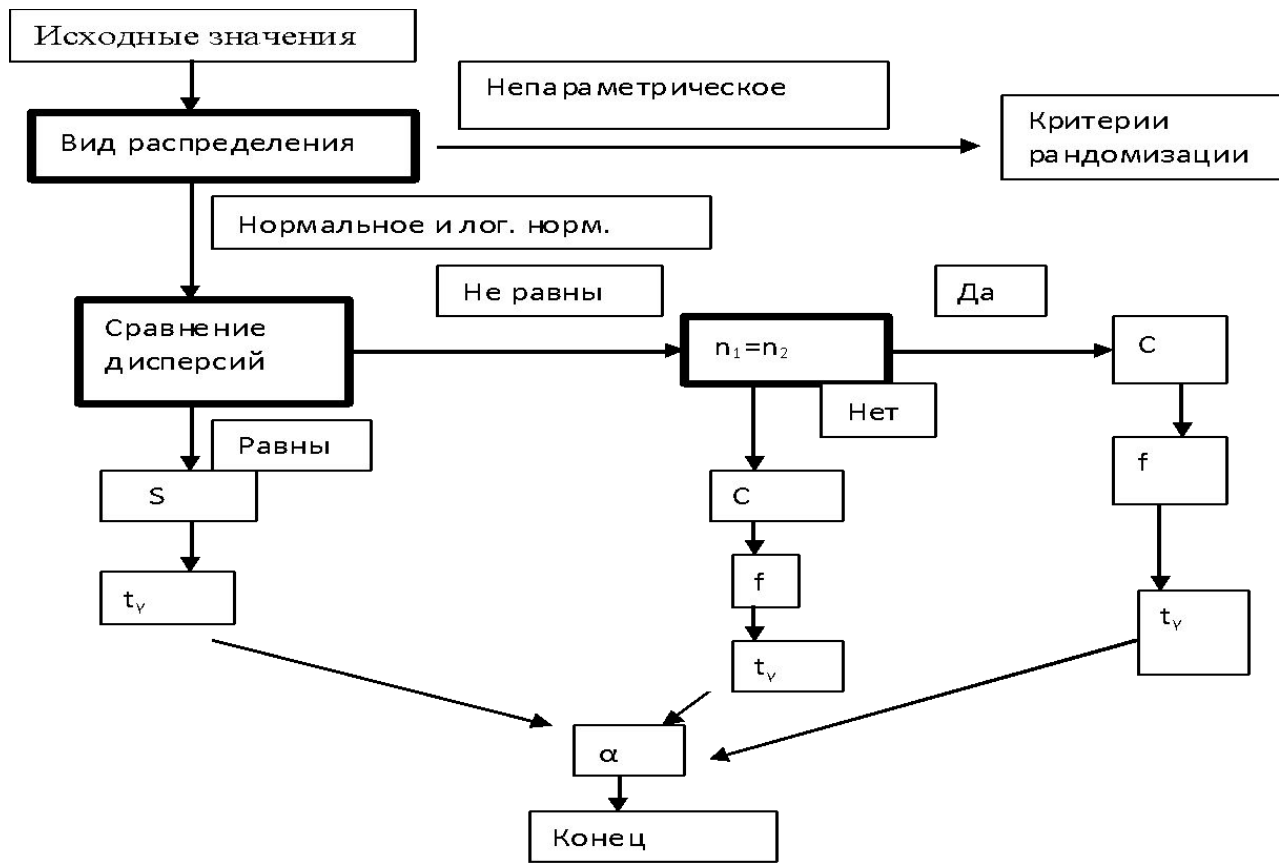
n	$\alpha = 0,8$	$\alpha = 0,9$	$\alpha = 0,95$
2	2,738	5,594	11,258
3	1,229	1,902	2,802
4	0,889	1,276	1,726
5	0,729	1,013	1,320
6	0,633	0,865	1,103
7	0,567	0,765	0,964
8	0,518	0,694	0,866
9	0,481	0,640	0,793
10	0,450	0,58	0,715
	$\bar{\alpha} = 0,9$	$\bar{\alpha} = 0,95$	$\bar{\alpha} = 0,975$

ЛЕКЦИЯ 13. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ОЦЕНКЕ ПОГРЕШНОСТЕЙ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

Взаимное сопоставление результатов измерений

Часто бывает необходимо сопоставить результаты измерений (анализа) полученные в разное время и различными исследователями. Как правило, средние значения параметров различаются величиной. Однако такое расхождение может находиться в пределах погрешности измерений. Требуется определить значимость расхождения средних величин.

Замечание: Приемы идентификации различны для непрерывных и дискретных величин.



ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ОЦЕНКЕ ПОГРЕШНОСТЕЙ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

Если распределение норм. или лог. норм. поступают следующим образом.

Сравнивают дисперсии с помощью критерия Фишера по формуле:

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{S_B^2}{S_M^2} \geq 1$$

Значения критерия и чисел степеней свободы, вычисленные для большей и меньшей дисперсий $f_1 = n_1 - 1$, $f_2 = n_2 - 1$ соответственно, служат для определения вероятности равенства дисперсий по таблице.

Замечание: Обычно, при $P > 0,05$ дисперсии считают равными, т.е. их различие носит случайный характер. В противном случае дисперсии являются неравными, т.е. их различие закономерно.

Более строго: Нулевая гипотеза $H_0: D(X)=D(Y)$, конкурирующая гипотеза $H_1: D(X)>D(Y)$.

Правосторонняя критическая область $F > F_{KP}$ определяется условием:

$$P[F > F_{KP}(\alpha, f_1, f_2)] = \alpha$$

а область принятия нулевой гипотезы, где нет оснований её отвергать — неравенством $F < F_{KP}$.



ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ОЦЕНКЕ ПОГРЕШНОСТЕЙ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

Нулевая гипотеза $H_0: D(X)=D(Y)$, конкурирующая гипотеза $H_1: D(X)\neq D(Y)$.
Двусторонняя критическая область определяется условием $P(F < F_1) = \alpha/2$ и $P(F > F_2) = \alpha/2$ с правой критической точкой $[F_2 = F_{кр}(\alpha/2, f_1, f_2)]$

Замечание: Левостороннюю обычно не ищут, а область принятия нулевой гипотезы, где нет оснований её отвергать, определяют неравенством $F_1 < F < F_2$.

Вывод: Критическая область строится от вида конкурирующей гипотезы.

Если дисперсии равны, вычисляют среднее значение дисперсии

и значение критерия Стьюдента

$$\bar{s}^2 = \frac{s_1^2 f_1 + s_2^2 f_2}{f_1 + f_2}$$

где

Для $f = f_1 + f_2$, используя вычисленное значение \bar{s} по таблице определяют вероятность того, что разница двумя данными средними результатами закономерна. Нижнее граничное значение вероятности обычно 0,95.

Т.К. критическая область строится от вида конкурирующей гипотезы.



ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ОЦЕНКЕ ПОГРЕШНОСТЕЙ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

Для нулевой гипотезы $H_0: M(X)=M(Y)$ и конкурирующей гипотезы $H_1: M(X) \neq M(Y)$ имеем двустороннюю критическую область, которая определяется условием $P(t_\gamma < t_{ЛЕВ}) = \alpha/2$ и $P(t_\gamma > t_{ЛЕВ}) = \alpha/2$, где область принятия гипотезы

Нулевая гипотеза $H_0: M(X) = M(Y)$, конкурирующая гипотеза $H_1: M(X) > M(Y)$. Правосторонняя критическая область $F > F_{КР}$ определяется условием $P(t_\gamma < t_{ПР.КР})$, где $t_{ПР.КР}(\alpha, f)$ область принятия нулевой гипотезы, где нет оснований её отвергать – неравенством $t_\gamma < t_{ПР.КР}$.

Аналогично для левосторонней области.

Если дисперсии не равны, но число повторений анализа в обоих случаях одинаково $n=n_1=n_2$, значение критерия Стьюдента равно:

с числом степеней свободы:

$$t_\gamma = \frac{d\sqrt{n}}{\sqrt{s_1^2 + s_2^2}}$$

где

$$c = \frac{s_1^2}{s_1^2 + s_2^2}$$
$$f = \frac{n-1}{c^2 + (1-c)^2}$$

Замечание. Для найденного значения критерия и числа степеней свободы по таблице определяют вероятность того, что разница между средними значениями закономерна.

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ОЦЕНКЕ ПОГРЕШНОСТЕЙ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

Если дисперсии не равны и число повторений анализов различно, значение критерия Стьюдента вычисляют по формуле:

$$t_{\gamma} = d / \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}$$

с числом степеней свободы:

$$f = \frac{f_1 f_2}{f_2 C^2 + f_1 (1 - C)^2}$$

где $C = (S_1^2 / n_1) / \left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2} \right)$

Дальнейшие действия аналогичны.

При известных ген. дисперсиях, если оба анализа выполнены одним и тем же методом:

$$t_{\gamma} = \frac{d}{\sigma} \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}} \quad f = \infty$$

если разными:

$$t_{\gamma} = d / \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

Замечание: Граничное значение α обычно **0,95**.

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ОЦЕНКЕ ПОГРЕШНОСТЕЙ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

Сопоставление точности двух методов анализа

При выборе метода анализа обычно принимают решение, являющееся компромиссом, между стоимостью или трудоемкостью, с одной стороны и точностью с другой. При этом необходимо сравнить точность двух или более методов между собой.

Наиболее удобно если известны генеральные дисперсии методов.

Внимание! Метод с меньшей генеральной дисперсией является более точным.

Соотношение погрешностей двух методов при равном числе повторностей или если их число не превышает четырех определяется равенством:

$$\frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$$

Иногда выгоднее выполнить большее число повторностей малотрудоемкого, но низкоточного метода, нежели две повторности высокоточного анализа высокой трудоемкости.

В этом случае проводят ориентировочный расчет.

Погрешность высокоточного рассчитывают как:

$$\delta = \pm 2\sigma$$

Низкоточного:

$$\delta = s \frac{t_\gamma}{\sqrt{f}}$$

приняв во внимание, что

$$s^2 = \sigma^2 \frac{\chi^2}{f}$$



ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ОЦЕНКЕ ПОГРЕШНОСТЕЙ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

Замечание: Подобное сравнение имеет смысл при $f \geq 5$ (двухстороннее ограничение) или $f \geq 4$ (одностороннее ограничение).

При меньшем числе повторений погрешность высокоточного метода будет заведомо меньше, чем низкоточного.

Значения χ^2 определяется числом степеней свободы и $P=0,95$. Из известных трех значений σ^2 в последнюю формулу подставляют σ^2_{max}

Внимание! Точность двух методов можно сравнить, когда ген. дисп. неизвестны, с использованием критерия Фишера. Если дисперсии равны, методы считают равноточными. В противном случае менее точен метод с большей дисперсией.

Внимание! При малом числе повторений (5-6) четырех-пятикратная разница между выборочными дисперсиями не позволяет сделать заключение об их отличии друг от друга. Для этого необходимо 20-30 степеней свободы.

Замечание: Чтобы набрать их не нужно специально организовывать 20-30 кратные измерения одного и того же образца. Достаточно воспользоваться данными нескольких образцов близкого состава, а затем сложить дисперсии.

Вывод: При этом точность увеличится.

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ОЦЕНКЕ ПОГРЕШНОСТЕЙ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

Если удастся набрать не менее 60 степеней свободы для каждого из методов, то можно вычислить ген. дисперсии по последней формуле.

При этом для каждого из методов получают три значения ген. дисперсии – среднее, верхнее и нижнее (доверительный интервал для ген. дисперсии несимметричен).

Среднее получают для $P=0,95$,

Верхнее для $P=0,025$,

Нижнее для $P=0,975$.

$$\alpha = 1 - P$$

Замечание: Невозможность вычисления точного значения ген. дисп. является частным проявлением законов статистики – по выборочным значениям можно определить характеристику, лишь с некоторой погрешностью, которая зависит от числа проведенных экспериментов.



ЛЕКЦИЯ 19. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
СТАТИСТИКИ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ОЦЕНКЕ ПОГРЕШНОСТЕЙ РЕЗУЛЬТАТОВ
ИЗМЕРЕНИЙ

Цель и особенности эксперимента по определению функциональной
зависимости

На практике необходимость измерений большинства величин вызывается тем, что они не остаются постоянными, а изменяются в функции от изменения других величин.

В этом случае целью измерения является установление вида функциональной зависимости $y=f(x)$. Для этого должны одновременно определяться величины как x , так и соответствующие им величины y .

Задачей эксперимента является - *установление математической модели исследуемой зависимости.*

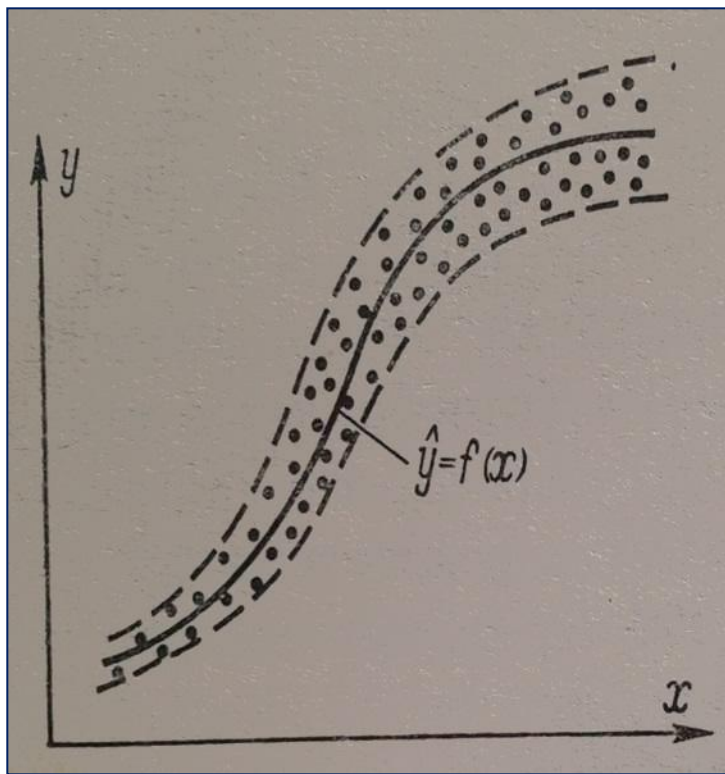
Определение математической модели включает в себя указание вида модели и определение значений ее параметров (коэффициентов, степеней и т.п.). Искомая функция может быть как функцией одной независимой переменной, так и многих переменных.

В современной теории эксперимента независимые переменные принято называть *факторами*, а зависимую переменную y – *откликом* (ГОСТ 24026-80).

В соответствии с этим стандартом эксперимент по определению функции вида $y=f(x)$ принято именовать – однофакторным, а эксперимент по определению функции вида $y=F(x_1, \dots, x_k)$ – многофакторным.

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ОЦЕНКЕ ПОГРЕШНОСТЕЙ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

Искомая мат. модель функциональной зависимости $y = f(x)$ может быть найдена лишь в результате совместной обработки всех полученных значений x и y .



На **рис.** это кривая, проходящая по центру полосы экспериментальных точек, которые могут и не лежать на искомой кривой, а занимают некоторую ω $f(x)$ вокруг нее.

Эти отклонения вызваны рядом причин (погрешностями измерений, неполнотой модели и учитываемых факторов, случайным характером самих исследуемых процессов).

При этом разделить погрешности, вызванные неточностью измерения x и неточностью измерения y невозможно, т.к. выше ниже и вправо влево неразличимы.

Поэтому описанием погрешности исходных данных может быть лишь указание **ширины полосы** их разброса вокруг найденной кривой зависимости

Причем **полоса разброса** не обязательно должна иметь постоянную ширину и вопрос о форме полосы должен анализироваться в каждом отдельном случае.

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ОЦЕНКЕ ПОГРЕШНОСТЕЙ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

Выбор вида математической модели и остаточная погрешность адекватности

Задача выбора вида функциональной зависимости – *задача не формализуемая*, т.к. одна и та же кривая на данном участке примерно с одинаковой точностью может быть описана самыми различными аналитическими выражениями.

Например, U - образная кривая. Это часть гиперболы, параболы, эллипса, синусоиды и т.п.

Внимание! Рациональный выбор того или иного аналитического описания может быть обоснован лишь при учете определенного перечня требований.

Внимание! Главное требование к математической модели – это удобство ее последующего использования. Основное, что обеспечивает удобство математического выражения, - его компактность.

Например, известно, что любую функцию $y=f(x)$ можно описать многочленом $y=a_0+a_1x+\dots+a_nx^n$, но если есть возможность использовать одночленные элементарные функции, то ясно, что такое представление лучше.

Вывод: Компактность модели достигается удачным выбором элементарных функций, обеспечивающих хорошее приближение при малом их числе.

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ОЦЕНКЕ ПОГРЕШНОСТЕЙ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

Другое весьма желательное (но иногда трудно достижимое) требование – *содержательность*, иначе говоря, – *интерпретируемость* предлагаемого аналитического описания.

Обычно это достигается приданием определенного смысла константам или функциям, входящим в найденную мат. модель.

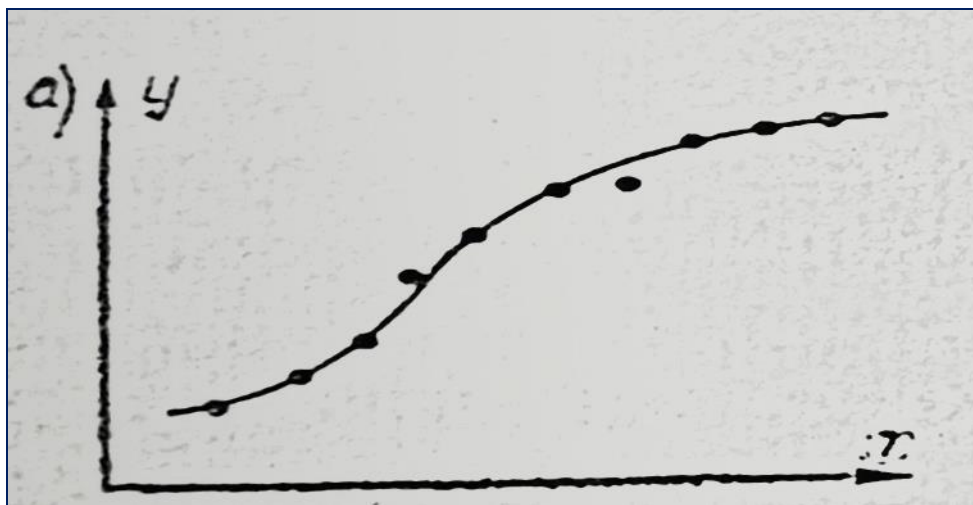
Практический вывод: Выбор мат. модели остается за человеком и не может быть передан машине. Только человек знает, для чего используется модель, каковы ее ограничения и на основе каких понятий будут интерпретированы ее параметры.

Основной помехой для установления вида исследуемой зависимости является разброс экспериментальных данных.

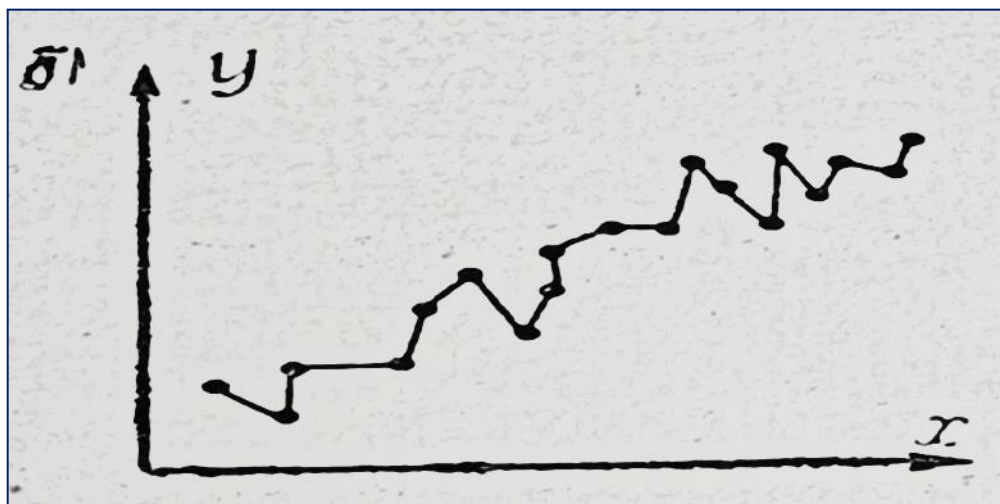
Если диффузность исходных данных мала (случайный разброс почти отсутствует), то привлечение статистических методов для их обработки излишне и кривую можно просто провести через точки.

Однако даже в этом случае не следует соединять экспериментальные точки отрезками прямых линий, а провести плавную кривую. При этом несколько точек могут не лежать на этой кривой и их следует рассматривать как возможные выбросы или промахи.

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ
ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ОЦЕНКЕ ПОГРЕШНОСТЕЙ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

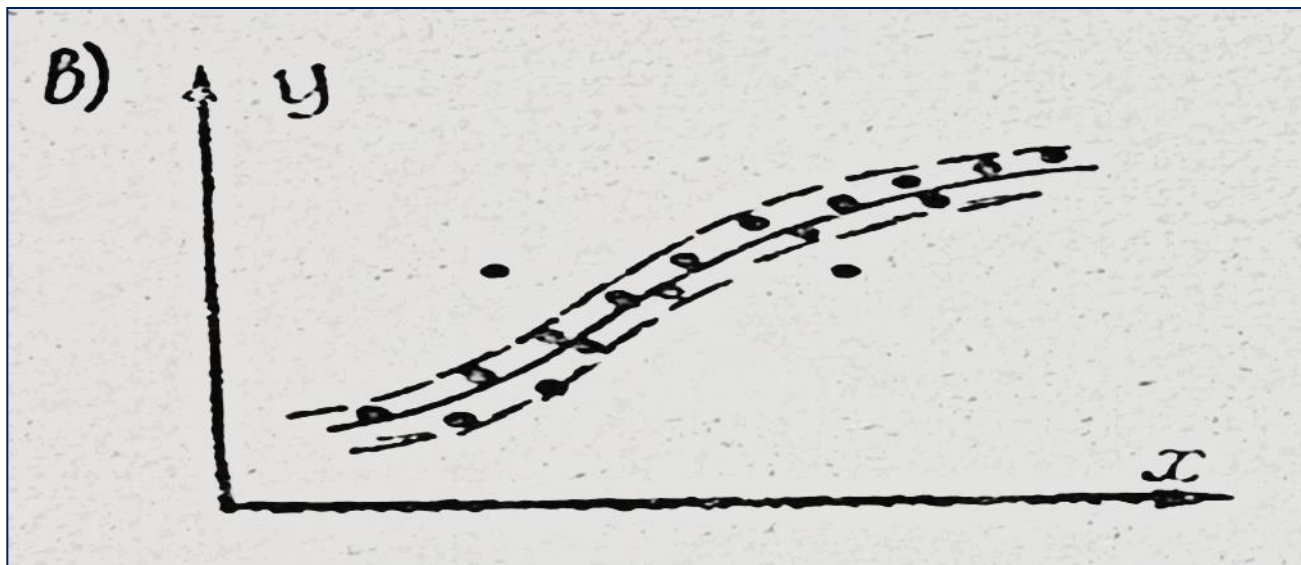


Внимание! Если диффузность исходных данных значительна (случайный разброс существенен), соединение прямыми просто бессмысленно и требуется привлечение статистических методов.



ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ОЦЕНКЕ ПОГРЕШНОСТЕЙ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

Одна из простейших методик – метод обведения контура плавных границ полосы рассеивания экспериментальных точек. Если некоторые точки остаются вне контура их рассматривают, как промахи.

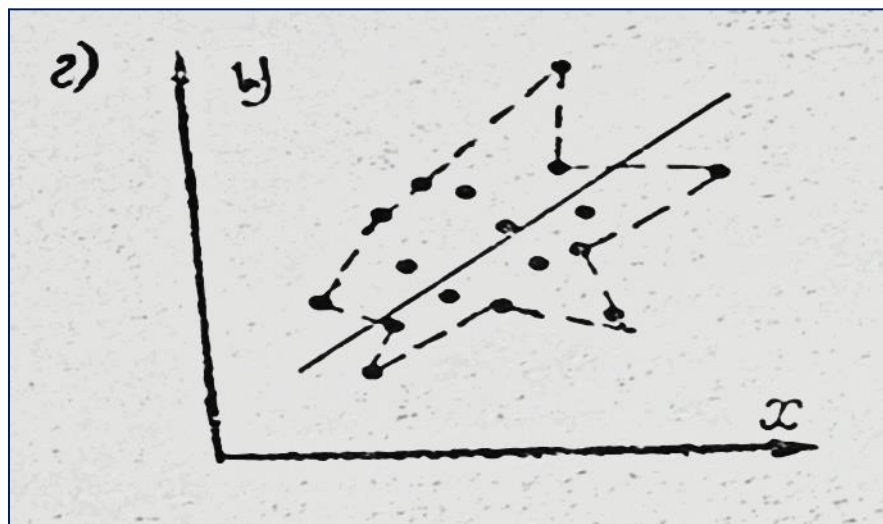


Форма обведенного контура чаще всего уже позволяет вынести суждения о характере функциональной зависимости $y = f(x)$ для однозначного вывода проводят осевую (среднюю) линию этого контура.

Замечание: Несмотря на свою простоту метод обведения контура, позволяет быстро указать желаемое положение и форму искомой кривой и провести ее не через отдельные точки, а сообразуясь с положением их всех на графике в целом.

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ОЦЕНКЕ ПОГРЕШНОСТЕЙ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

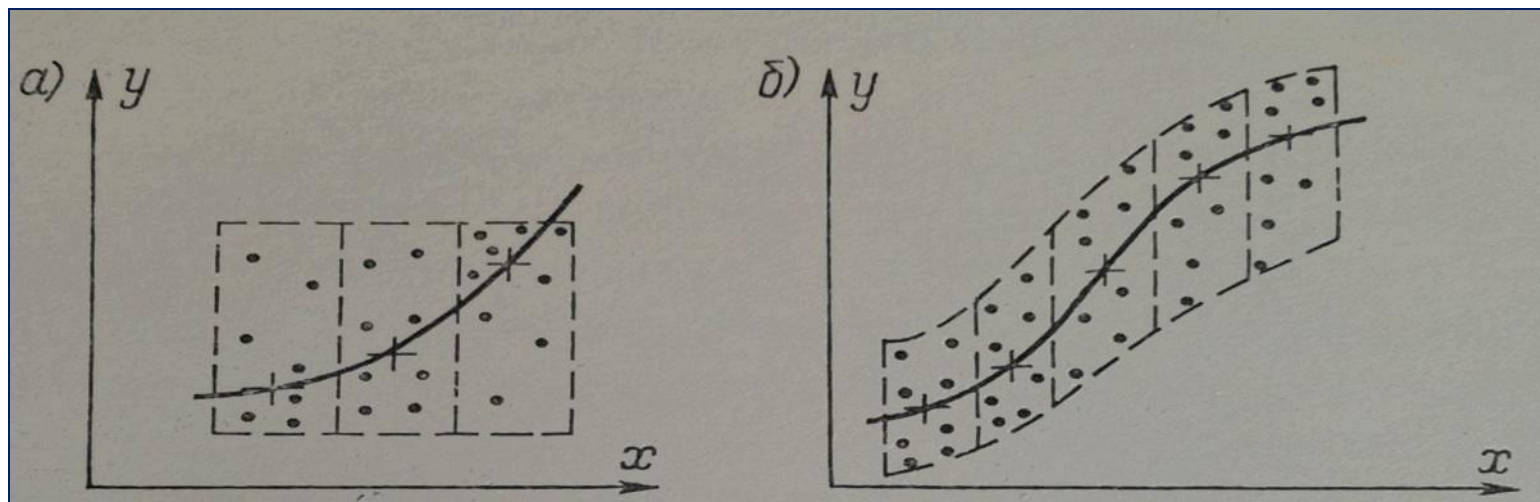
При большом рассеянии результатов форма контура имеет бессмысленные, случайные очертания. Здесь приходится ограничиваться установлением уровня и наклона искомой зависимости полагая ее прямой проходящей через центр полосы.



При очень большой диффузности экспериментальных данных метод контура не дает однозначного ответа и полезным может оказаться метод медианных центров.

Сущность метода сводится к делению поля точек на несколько частей в каждой из которых находится медианный центр, т.е. пересечение вертикали и горизонтали слева и справа, и выше и ниже которых оказывается равное число точек. Затем через центры проводят плавную кривую.

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ОЦЕНКЕ ПОГРЕШНОСТЕЙ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ



Замечание: Не следует стремиться разбить поле на большое число областей, т.к. число точек ограничено их должно быть **от трех до пяти**.

Метод "выделения остатка" полезен при аналитическом и графическом анализе. Метод состоит в последовательном представлении функции $y=f(x)$ в виде $y=f_1(x)+f_2(x)$ с заданием первого слагаемого и выделении второго, затем вновь $f_2(x)=f_3(x)+f_4(x)$ до тех пор пока не будет найдено описание последнего остатка.

Погрешность адекватности модели – погрешность описания данного явления вследствие недостаточного соответствия аппроксимирующей функции всем особенностям формы экспериментальной кривой.

Для улучшения соответствия приходится усложнять модель. Это приводит к противоречию между компактностью и точностью описания данных.

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ОЦЕНКЕ ПОГРЕШНОСТЕЙ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

Вывод: Рациональное решение – прекратить усложнение модели, когда она еще относительно проста, примирившись с приемлемой остаточной погрешностью адекватности.

Особое значение имеет достоверность и достаточный объем исходных данных позволяющий установить степень их случайности.

Внимание! Наиболее распространенная ошибкой начинающих является попытки детерминированного описания, т.е. включение в мат. модель тех наблюдаемых особенностей, которые в действительности являются случайными.

Ориентир – примерное равенство остаточной погрешности адекватности модели и ширины полосы ее неопределенности (коэффициент корреляции) вследствие случайного разброса данных.

Более простой ориентир – прекращение уточнение модели, если "она не противоречит данному полю экспериментальных данных".

Замечание: Формулировка "не противоречит" является наиболее правильной при таких заключениях и именно ее надо использовать во всех подобных случаях.

Далее следует подбор аппроксимирующих функций, в первую очередь из разряда элементарных.

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ОЦЕНКЕ ПОГРЕШНОСТЕЙ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

При определении параметров аппроксимирующих функций используют графические, графоаналитические и аналитические методы.

На графике можно однозначно опознать только прямую линию и только прямую можно продлить на достаточно большое расстояние. Другие кривые таким свойством не обладают.

Вывод: При построении экспериментальных данных координатные оси модели преобразуют до тех пор, пока не будет получено уравнение прямой линии.

Замечание: Особенно эффективно использование графоаналитических методов определения искомых параметров тогда, когда обратное преобразование в элементарных функциях не выражается и аналитическое решение невозможно.

В аналитических методах число опытов больше чем число искомых коэффициентов, т.е. число независимых уравнений системы избыточно. Из них можно составить множество уравнений, каждое из которых даст свое решение.

Внимание! но между собой они будут несовместны и получится пучок в области неопределенности.

ЛЕКЦИЯ 14. РЕГРЕССИОННЫЙ И КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ АНАЛИЗ

Метод наименьших квадратов

К так называемым парным зависимостям вида $y=f(x)$ относится подавляющее большинство всех формул, используемых в естественно-научных и технических дисциплинах.

Замечание: Сама по себе процедура линейного парного регрессионного анализа (метода наименьших квадратов на плоскости) очень проста.

Пусть имеется n пар наблюдений значений отклика y_i , полученных при фиксированных (в смысле записанных) значениях независимой переменной фактора x_i .

Задача линейного регрессионного анализа (метода наименьших квадратов) состоит в том, чтобы, зная положение точек на плоскости, так провести линию регрессии, чтобы сумма квадратов U , отклонений Δ^2_i , вдоль оси Oy (ординаты) этих точек от проведенной прямой была минимальной.

При проведении регрессионного анализа к выдвинутой гипотезе (к форме уравнения регрессии) обычно предъявляется следующее требование: Это уравнение должно быть линейным по параметрам или допускать возможность линеаризации.



Метод наименьших квадратов

Обратимся к уравнению прямой $y = a_0 + a_1 x$

Тогда задачу МНК аналитически можно выразить следующим образом:

$$U = \sum_{i=1}^n [y_i - (a_0 + a_1 x_i)]^2 \quad \text{или} \quad U = \sum_{i=1}^n \Delta_{i \min}^2$$

Иначе говоря: сумма квадратов отклонений вдоль оси должна быть минимальной (принцип Лежандра).

Для решения поставленной задачи, необходимо в каждом конкретном случае вычислить значения коэффициентов a_0 , a_1 минимизируя сумму отклонений U .

Известно, что для этого необходимо вычислить частные производные функции U по коэффициентам a_0 , a_1 и приравнять их нулю:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial a_0} \\ \frac{\partial U}{\partial a_1} \end{cases} = 0$$

Решая эту систему нормальных уравнений, находим искомые значения a_0 , a_1



Метод наименьших квадратов

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial a_0} = \sum_{i=1}^n [y_i - (a_0 + a_1 x_i)] = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial a_1} = \sum_{i=1}^n [y_i - (a_0 + a_1 x_i)] x_i = 0 \end{cases}$$

Для краткости, опуская индексы у знака суммы, получаем:

$$\begin{cases} n \cdot a_0 + \sum x_i \cdot a_1 = \sum (y_i) \\ \sum x_i \cdot a_0 + \sum x_i^2 \cdot a_1 = \sum (y_i x_i) \end{cases}$$

Решаем систему с помощью определителей: $a_0 = \Theta_0 / \Theta$; $a_1 = \Theta_1 / \Theta$

$$\Theta = \begin{vmatrix} n & \sum x \\ \sum x & \sum x^2 \end{vmatrix} = n \sum x^2 - (\sum x)^2$$

$$\Theta_0 = \begin{vmatrix} \sum y & \sum x \\ \sum xy & \sum x^2 \end{vmatrix} = \sum y \sum x^2 - \sum xy \sum x$$

$$\Theta_1 = \begin{vmatrix} n & \sum y \\ \sum x & \sum xy \end{vmatrix} = n \sum xy - \sum x \sum y$$

откуда

$$a_0 = \frac{\sum y \sum x^2 - \sum xy \sum x}{n \sum x^2 - (\sum x)^2}$$

$$a_1 = \frac{n \sum xy - \sum x \sum y}{n \sum x^2 - (\sum x)^2}$$



Метод наименьших квадратов

Линия, которую определяет МНК, называется *линией регрессии*, а ее коэффициенты – *коэффициентами регрессии*. Решение обычно осуществляют в табличной форме с проверкой правильности вычислений по формуле:

$$\sum (x_i + y_i)^2 = \sum x_i^2 + 2\sum x_i y_i + \sum y_i^2$$

Аналогично для трех и более слагаемых.

Свойства МНК

Если первое уравнение системы разделить на n получим:

$$a_0 + \frac{\sum x}{n} a_1 = \frac{\sum y}{n} \quad \text{или} \quad a_0 + a_1 \bar{x} = \bar{y}$$

Таким образом первое уравнение МНК требует, чтобы линия регрессии проходила через точку с координатами $\bar{x}; \bar{y}$, т.е. через *центр тяжести* поля экспериментальных точек.

Если принять \bar{x} за ноль (перенести начало координат), то и можно утверждать, что первое уравнение МНК определяет *средний уровень* искомой линии регрессии.



Свойства МНК

Второе уравнение системы при $\bar{x} = \sum x / n = 0$ дает $a_1 \sum x^2 = \sum xy$
отсюда $a_1 = \sum xy / \sum xx$, т.е. второе уравнение МНК определяет угол
наклона искомой прямой, относительно оси x .

При большем числе независимых переменных, решение уравнений МНК есть
плоскость в многомерном пространстве. Первое уравнение определяет
совмещение этой плоскости с центром тяжести поля экспериментальных точек, а
остальные коэффициенты наклона этой плоскости к соответствующим осям.

Особенности МНК

1. Полученные этим методом решения необратимы. Это обусловлено тем, что
существует две модели регрессии.

Прямая, $\hat{y} = y_0 + a_1 x$ и обратная $\hat{x} = x_0 + y/a_2$, где $1/a_2 = \sum xy / \sum yy$
Это уже другое соотношение. Для обратной регрессии получаем:

$$\begin{cases} n \cdot a'_0 + \sum y_i \cdot a'_1 = \sum x_i \\ \sum y_i \cdot a'_0 + \sum y_i^2 \cdot a'_1 = \sum (y_i x_i) \end{cases}$$



Особенности МНК

Решаем систему с помощью определителей: $a'_0 = \Theta'_0 / \Theta'$; $a'_1 = \Theta'_1 / \Theta'$ и имеем:

$$\Theta' = \begin{vmatrix} n & \sum y \\ \sum y & \sum y^2 \end{vmatrix} = n \sum y^2 - (\sum y)^2 \quad \Theta'_0 = \begin{vmatrix} \sum x & \sum y \\ \sum xy & \sum y^2 \end{vmatrix} = \sum x \sum y^2 - \sum xy \sum y$$

$$\Theta'_1 = \begin{vmatrix} n & \sum x \\ \sum y & \sum xy \end{vmatrix} = n \sum xy - \sum x \sum y$$

откуда

$$a'_0 = \frac{\sum x \sum y^2 - \sum xy \sum y}{n \sum y^2 - (\sum y)^2} \quad a'_1 = \frac{n \sum xy - \sum x \sum y}{n \sum y^2 - (\sum y)^2} \quad 1/a_2 = a'_1$$

Естественно, $a_1 \neq 1/a_2 \neq a'_1$ поэтому произведение $a_1 \cdot (1/a_2)$ равно величине:

$$a_1 \cdot \frac{1}{a_2} = \frac{\sum xy}{\sum x^2} \cdot \frac{\sum xy}{\sum y^2} = \rho^2 = r^2$$

корень квадратный из которой и называется **коэффициентом взаимной (парной) корреляции**.



Особенности МНК

В общем виде:

$$r = \frac{\Theta_1}{\sqrt{\Theta \cdot \Theta'}} = \frac{\sqrt{n \sum xy - \sum x \sum y}}{\sqrt{n \sum x^2 - (\sum x)^2}} \cdot \frac{\sqrt{n \sum xy - \sum x \sum y}}{\sqrt{n \sum y^2 - (\sum y)^2}} = \frac{n \sum xy - \sum x \sum y}{\sqrt{n \sum x^2 - (\sum x)^2} \cdot \sqrt{n \sum y^2 - (\sum y)^2}}$$

либо с использованием средних:

$$r = \frac{\sum (x - \bar{x})(y - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x - \bar{x})^2 \sum (y - \bar{y})^2}}$$

Следствием этого является то, что линии регрессии, являясь диаметрами эллипса рассеивания экспериментальных точек, не совпадают с его осью.

Линия регрессии y по x проходит более полого (ближе к оси x), чем ось эллипса, а линия x по y более круто (ближе к оси y) на ту же величину. Поэтому угловой коэффициент оси симметрии эллипса может быть выражен как a_1/ρ или как $a_2\rho$, а отношение этих величин равно единице

$$\frac{a_1}{\rho} \cdot \frac{1}{a_2\rho} = 1, \text{ отсюда } a_1/a_2 = \rho^2$$



Особенности МНК

МНК очень чувствителен к неоднородности статистики экспериментальных данных и может дать абсурдное решение даже в том случае, если эта неоднородность вызвана наличием всего одного далеко отстающего промаха.

Вывод: *Решение МНК должно приниматься по однородной, очищенной от промахов статистике.*

При коэффициенте корреляции близком к единице (при малом рассеивании экспериментальных точек) и большой протяженности поля точек, обе линии регрессии близки к оси эллипса и их различиями можно пренебречь.

Замечание: При малом коэффициенте корреляции $\rho < 0,96$, $\rho^2 < 0,92$ это различие становится весьма существенным, а МНК – неэффективным. В этом случае переходят к другим методам, например – *методу ортогональной регрессии*.

Выбор того или иного уравнения регрессии достаточно произволен и зависит от того, какую из случайных величин x или y считать заданной (независимой переменной). Такая ситуация всегда вызывала возражения экспериментаторов.



Особенности МНК

В принципе можно записать выражение для ортогональной регрессии, где расстояния от экспериментальных точек до прямой регрессии измеряют по перпендикуляру к этой прямой в виде:

$$\hat{Y} = \bar{y} + \frac{2r}{s_0 + \sqrt{s_0^2 + 4r^2}} (X - \bar{x})$$

где $s_0 = \frac{s_x}{s_y} - \frac{s_y}{s_x}$ $s_x = \sqrt{s_x^2}$ $s_y = \sqrt{s_y^2}$ $s_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x - \bar{x})^2$ $s_y^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y - \bar{y})^2$

Линия ортогональной регрессии заданная этим соотношением является одной из главных осей эллипса рассеивания, а две другие линии регрессии – диаметры этого эллипса. Тогда уравнение эллипса рассеивания имеет вид:

$$\frac{1}{1 - r^2} \left[\left(\frac{x - \bar{x}}{s_x} \right)^2 + 2r \frac{x - \bar{x}}{s_x} \cdot \frac{y - \bar{y}}{s_y} + \left(\frac{y - \bar{y}}{s_y} \right)^2 \right] = \chi_{(p,2)}^2$$

где $\chi_{(p,2)}^2$ - процентная точка распределения с двумя степенями свободы.

Вывод: Ортогональная регрессия находит ограниченное применение, т.к. положение линии регрессии в системе координат зависит от выбранного по осям масштаба. Другими словами этот метод не обладает масштабной инвариантностью и находит ограниченное применение.

Особенности МНК

Процедуры вычисления коэффициентов регрессии, корреляции и некоторых других величин, необходимых для проведения анализа могут быть упрощены, если вычислить промежуточные величины:

$$Q_x = \Theta / n = \sum x^2 - (1/n)(\sum x)^2$$

$$Q_y = \Theta' / n = \sum y^2 - (1/n)(\sum y)^2$$

$$Q_{xy} = \Theta_2 / n = \sum xy - (1/n)(\sum x)(\sum y)$$

С проверкой: $\sum (x + y)^2 - (1/n)[\sum (x + y)]^2 = Q_x + Q_y + 2Q_{xy}$

Далее вычисления производят в следующем порядке:

а) находят средние значения $\bar{x} = \sum x / n$ $\bar{y} = \sum y / n$

б) вычисляют коэффициенты регрессии:

$$a_{1(yx)} = Q_{xy} / Q_x \quad a_{1(xy)} = Q_{xy} / Q_y \quad a_{0(yx)} = \bar{y} - a_{1(yx)} \bar{x} \quad a_{0(xy)} = \bar{x} - a_{1(xy)} \bar{y}$$

в) вычисляют величину $Q_{yx} = Q_y - a_{1(yx)} Q_{xy}$

г) вычисляют коэффициент корреляции $r = Q_{xy} / \sqrt{Q_x Q_y}$



Особенности МНК

д) вычисляют стандартные ошибки:

$$\bar{S}_x = \sqrt{Q_x / (n - 1)}$$

$$\bar{S}_y = \sqrt{Q_y / (n - 1)}$$

$$\bar{S}_{xy} = Q_{xy} / (n - 1)$$

$$\bar{S}_{yx} = \sqrt{Q_{yx} (n - 2)}$$

$$\bar{S}_{a1(yx)} = \bar{S}_{yx} / \sqrt{Q_x}$$

$$\bar{S}_{a0(yx)} = \bar{S}_{yx} \sqrt{1/n + \bar{x}^2 / Q_x}$$

е) осуществляют проверку вычислений:

$$r = Q_{xy} / \sqrt{Q_x Q_y} = \bar{S}_{xy} / \bar{S}_x \bar{S}_y = \sqrt{a_{1(yx)} a_{1(xy)}}$$

$$\bar{S}_{a0(yx)} / \bar{S}_{a1(yx)} = \sqrt{\sum x^2 / n}$$

Далее, для статистического оценивания коэффициентов регрессии проверяют, отличается ли статистически значимо оценка каждого коэффициента регрессии от нуля, т.е.

$$H_0 : \beta_i = 0$$

Границу значимости устанавливают на основании распределения Стьюдента:

$$t_y = |a_i| / \bar{S}_{ai} \geq t_{(n-2, P)}$$

где β_i - значение коэффициента регрессии в ген. совокупности; a_i - выборочная оценка коэффициента регрессии, $t_{(n-2, P)}$ - табличное значение критической точки.

Если условие выполняется, то можно сделать вывод что β_i значимо отличается от нуля.



Особенности МНК

Оценку значимости коэффициента парной корреляции (проверку наличия корреляции) выполняют по формуле:

$$t_r = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} \geq t_{(n-2, P)}$$

если это условие выполняется то гипотезу $H_0: r=0$ отклоняют. Для этой цели также используют специальные таблицы для критических значений коэффициентов корреляции ($r > r_{кр}$).

Для проверки значимости уравнения регрессии в целом с использованием критерия Фишера общую дисперсию \bar{S}_y^2 сравнивают с остаточной дисперсией $S_{ост}^2$, которую вычисляют в табличной форме, аналогично для x .

В литературе встречаются различные названия (остаточная дисперсия, сумма квадратов остатков, остаточная сумма квадратов). $\bar{S}_{ост}^2$ представляет собой показатель ошибки предсказания уравнением регрессии результатов опытов. Качество предсказания определяют, сравнивая $\bar{S}_{ост}^2$ с \bar{S}_y^2 , другими словами критерий Фишера показывает, во сколько раз уравнение регрессии предсказывает результаты опытов лучше, чем среднее y :

при различных уровнях значимости. $F_{кр} = \bar{S}_y^2 / \bar{S}_{ост}^2 < F_T$ уравнение регрессии статистически значимо описывает результаты эксперимента.



Оценка линейности регрессии

Данная оценка может быть выполнена, если общее число значений y больше, чем число k значений x . Каждому значению x_i соответствует n_i значений y . На практике так бывает очень часто. После подсчета отклонения групповых средних от прямой регрессии и отклонения y от групповых средних применяют статистику,

$$F = \frac{\frac{1}{k-2} \sum_{i=1}^k n_i (\bar{y}_i - \hat{y}_i)^2}{\frac{1}{k-n} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_j)^2}$$

если сумма отклонений групповых средних от прямой регрессии, деленная на сумму отклонений от групповых средних со степенями свободы в числителе $\nu_1 = k-2$ и знаменателе $\nu_2 = n-k$ достигает или превосходит границу значимости то гипотезу о линейности нужно отвергнуть.



**Я НЕ СУМЕЛ СПЛАНИРОВАТЬ И
ОБРАБОТАТЬ ЭКСКРЕМЕНТ !!!**

