УРОК – СМОТР ЗНАНИЙ

В 11 классе
ГОУ Гимназии №63
Калининского района
Санкт-Петербурга

Учитель: Залыгина Т.И.

ТЕМА УРОКА:

«Решение нестандартных задач в рамках итогового повторения курса алгебры и начала анализа»

ЦЕЛИ:

- **образовательная:** повторение, обобщение и систематизация знаний за 10-11 классы по данным темам;
- **воспитательная:** воспитание толерантности и ответственности;
-**развивающая:** умение собирать, анализировать и систематизировать информацию, объяснять сложные ключевые моменты, находить нестандартные решения.

ЗАДАНИЕ № 1

Решить уравнение :

$$\left(5+2\sqrt{6}\right)^x+\left(5-2\sqrt{6}\right)^x=10$$

Решение:

Уравнения, решаемые заменой неизвестного.

$$\left(5+2\sqrt{6}\right)^x+\left(5-2\sqrt{6}\right)^x=10$$

Основания – иррациональные выражения, произведение которых равно 1:

$$\left(5+2\sqrt{6}\right)\left(5-2\sqrt{6}\right)=1$$

ВАЖНО!

Выражения $\left(5+2\sqrt{6}\right)$ и $\left(5-2\sqrt{6}\right)$ называются сопряженными

Домножим каждый член уравнения на $\left(5+2\sqrt{6}\right)^x$

Получим: $\left(5+2\sqrt{6}\right)^{2x}$ + 1 = 10 $\left(5+2\sqrt{6}\right)^x$

2) Обозначим $\left(5+2\sqrt{6}\right)^x$ = t>0,получим уравнение $t+\frac{1}{t}=10$

3) умножим это уравнение на t

Получим: t^2-10t +1=0 , получаем $t_{1,2}=5\pm 2\sqrt{6}$

1. $\left(5+2\sqrt{6}\right)^x = \left(5+2\sqrt{6}\right) \Rightarrow$ x = 1

2. $\left(5+2\sqrt{6}\right)^x = \left(5-2\sqrt{6}\right) \Rightarrow$ x = -1

$Ответ: x_1=1, x_2=-1$

ЗАДАНИЕ № 2

Решить неравенство :

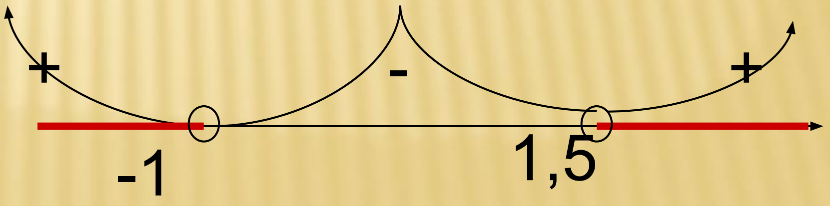
$$\left(x^2 - x + 2\right)^{\log_{0,6}\frac{2x-3}{x+1}} \rangle 1$$

Решение:

Решение трансцендентных неравенств.

$$\left(x^2 - x + 2\right)^{\log_{0,6}\frac{2x-3}{x+1}} \rangle 1$$

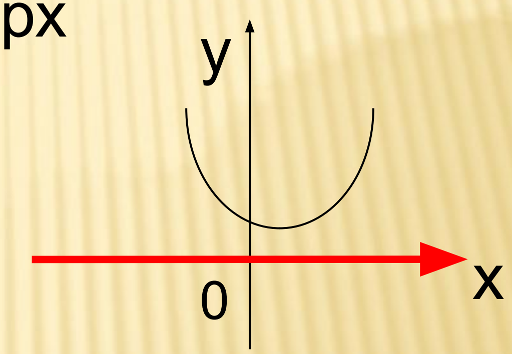
Решение: <u>**ОДЗ**</u> $\dfrac{2x-3}{x+1} \rangle\ 0$



Докажем, что $\left(x^2 - x + 2\right)$ положителен при любых значениях x.

$$\left(x^2 - x + 2\right) = 0 \qquad \left.\begin{array}{l} D < 0 \\ a > 0 \end{array}\right| \Rightarrow$$

ветви параболы вверх



следовательно, неравенство $\left(x^2 - x + 2\right) > 0$

выполняется при <u>любых</u> x из ОДЗ

рассмотрим две системы неравенств:

1) $\left[\begin{array}{l} x^2 - x + 2 > 1 \\ \log_{0,6} \dfrac{2x-3}{x+1} > 0 \end{array}\right.$

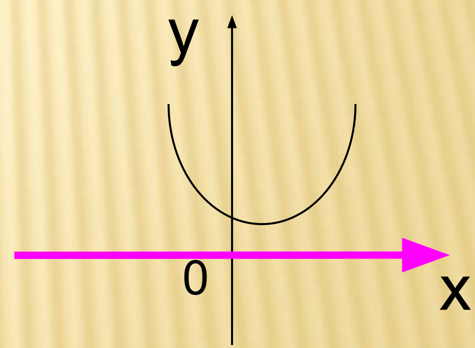
2) $\left[\begin{array}{l} x^2 - x + 2 < 1 \\ \log_{0,6} \dfrac{2x-3}{x+1} < 0 \end{array}\right.$

Решим вторую систему

$x^2 - x + 2 < 1$

$x^2 - x + 1 < 0$

$/ \ x^2 - x + 1 = 0 \qquad D < 0,\ a > 0 \quad \Rightarrow$



ВАЖНО!

на множестве всех действительных значений $x^2 - x + 2 < 1$ не имеет решения, следовательно вторая система решений не имеет.

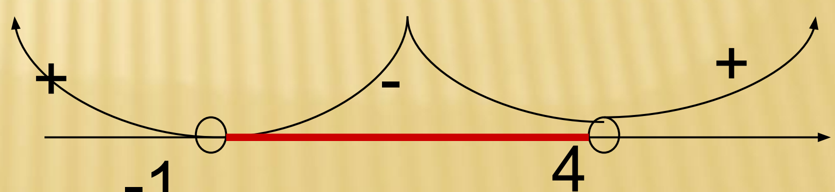
Тогда рассмотрим систему (1)

Система эквивалентна неравенству: $\log_{0,6} \dfrac{2x-3}{x+1} > 0$

$$0 < \frac{2x-3}{x+1} < 1$$

1) $\dfrac{2x-3}{x+1} > 0$ решением этого неравенства является ОДЗ

2) $\dfrac{2x-3}{x+1} < 1$; $\dfrac{2x-3-x-1}{x+1} < 0$; $\dfrac{x-4}{x+1} < 0$



$$Ответ: (1,5;4)$$

ЗАДАНИЕ № 3

Найти наибольший корень уравнения:

$$ctg\left(\frac{3\pi}{x+4}\right) = ctg\left(\frac{3\pi}{x}\right)$$

Решение:

$$ctg\left(\frac{3\pi}{x+4}\right)=ctg\left(\frac{3\pi}{x}\right)$$

Так как период функции f(x)=tgx равен π, то аргументы левой и правой части равны с точностью до πk, где k – целое. ОДЗ не находим, так как проще сделать проверку.

$$\frac{3\pi}{x+4}=\frac{3\pi}{x}+\pi k \quad \Big| \; : \pi$$

$$\frac{3}{x+4} = \frac{3+kx}{x}$$

$$3x = (3+kx)(x+4)$$

$$3x = 3x + kx^2 + 12 + 4kx$$

$$kx^2 + 4kx + 12 = 0$$

$$x = \frac{-2k \pm \sqrt{4k^2 - 12k}}{k} = -2 \pm \sqrt{4 - \frac{12}{k}}$$

x принимает максимальное значение, когда

$$\frac{12}{k}$$

принимает минимальное значение, то есть, когда k = -1, так как k – целое число

$$x = -2 + \sqrt{16} = 2$$

$\boxed{\text{Ответ}: x = 2}$

ЗАДАНИЕ № 4

Найдите наименьшее значение периметра прямоугольника со сторонами, параллельными осям координат, и с диагональю ОМ, где О – начало координат, а М – точка на графике функции

$$y = 5 - 2\ln(0{,}4x - 3) \quad 8 \le x \le 9{,}8$$

Периметр прямоугольника равен $2(|x|+|y|)$, т.к. его стороны параллельны осям координат, а одна его вершина является началом координат.

$8 \le x \le 9{,}8$, подставив эти крайние точки в функцию $y = 5 - 2\ln(0{,}4x - 3)$

получаем $5 - 2\ln 0{,}2 \ge y \ge 5 - 2\ln 0{,}32$, т.е. $0{,}4x - 3 > 3$ $x > 7{,}5$ О.Д.З: $y > 0$

положителен, так как *функция является непрерывно убывающей на данном промежутке*. Значит периметр можно записать в виде $2(x+y)$

.

Периметр минимален, значит необходимо найти минимум функции $2(x+y) = p$

на промежутке $[8;9{,}8]$

Ищем производную функции р по х:

$$p' = (2(x+5-2\ln(0{,}4-3))' = 2(1-\frac{2*0{,}4}{0{,}4-3})=\frac{0{,}8x-6-1{,}6}{0{,}4x-3}=\frac{0{,}8x-7{,}6}{0{,}4x-3};$$

находим нули производной:

$$0{,}8x = 7{,}6 \qquad 0{,}4x \neq 3$$

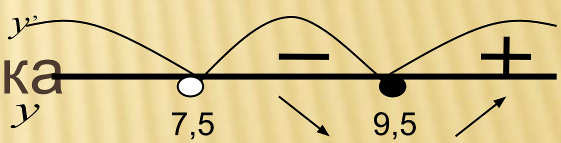
$$x = 9{,}5 \qquad x \neq 7{,}5$$

Область определения функции у: $0{,}4x-3>3$

$x > 7{,}5$

Находим знаки производной методом интервалов, т.к. производная непрерывна на своей области определения:

$x = 9{,}5$ точка минимума функции



Нашли одну искомую сторону прямоугольника

$$y = 5 - 2\ln(0{,}4x-3)$$

- вторая сторона

$$y = 5-2\ln(0{,}4*9{,}5-3) = 5-2\ln 0{,}8 = 5-\ln 0{,}64$$

Периметр:

$$p = 2(9{,}5+5-\ln 0{,}64) = 29-\ln 0{,}4096$$

$$\boxed{Ответ: p_{\min} = 29-\ln 0{,}4096}$$

ЗАДАНИЕ № 5

Найти все значения параметра а, при которых система имеет хотя бы одно решение.

:

$$\begin{cases} (x-5)^2 + y^2 = 36a^2 \\ x^2 + (y-12)^2 = 49a^2 \end{cases}$$

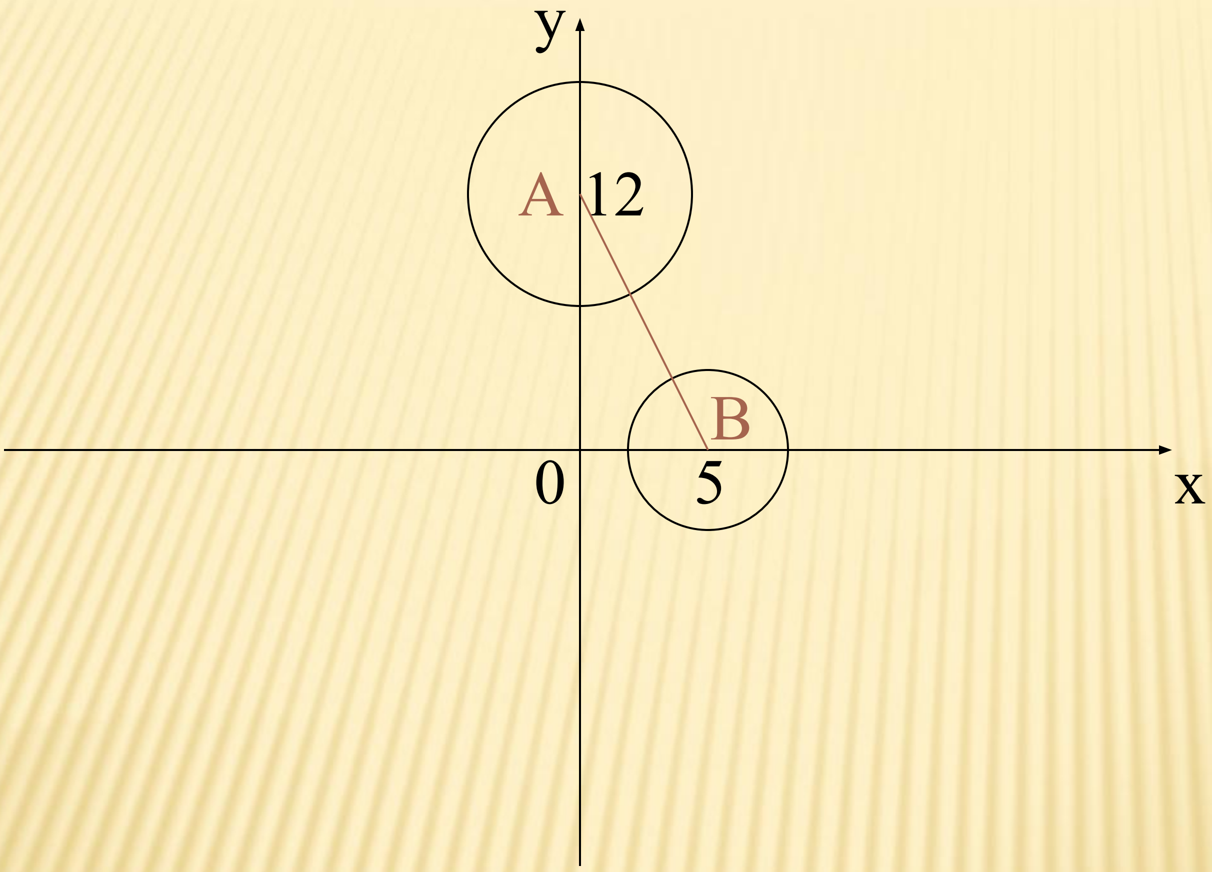
Решение:

Уравнения, составляющие систему, являются уравнениями окружностей

$$\begin{cases} (x-5)^2 + y^2 = 36a^2 \\ x^2 + (y-12)^2 = 49a^2 \end{cases}$$

R=6a, центр – (5;0)

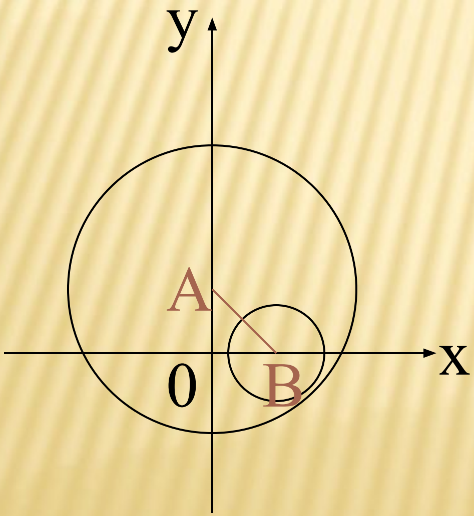
R=7a, центр – (0;12)



Из прямоугольного треугольника OAB расстояние между центрами окружностей по теореме Пифагора равно 13.

Для того, чтобы система имела хотя бы одно решение, окружности должны иметь хотя бы одну общую точку, а значит, сумма их радиусов должна быть не меньше расстояния между центрами этих окружностей.

С другой стороны, при увеличении параметра ***а*** одна окружность полностью войдет в другую, поэтому радиус большей окружности должен быть не больше суммы радиуса меньшей и расстояния между центрами.



$$\begin{cases} 6|a| + 7|a| \le 13 \\ 7|a| \le 6|a| + 13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6|a| + 7|a| \le 13 \\ 7|a| \le 6|a| + 13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} |a| \ge 1 \\ |a| \le 13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty) \\ a \in [-13; 13] \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Ответ}: a \in [-13; -1] \cup [1; 13]}$$

ЗАДАНИЕ № 6

Даны два уравнения. $\log_7(x(12\sqrt{-p})) = p(p-1) - 6x + 3$

$2x - \frac{25}{x} = \frac{x^2 - (5p-3)x + 15}{x(p+1)}$ Параметр р выбирается так, что $p \le 0, p \ne 1$

и число различных корней уравнения в сумме с числом р+5 дает число различных корней второго уравнения. Решите первое уравнение при каждом значении параметра, выбранным таким образом

Решение:

1) так как $12+\sqrt{-p}>0$, то функция $y=\log_7(x(12+\sqrt{-p}))$ определена на промежутке $(0;+\infty)$. Так как основание логарифма больше 1, то эта функция возрастает. Линейная функция $y=p(p-1)-6x+3$ убывает, так как коэффициент при x отрицателен. Поэтому число n корней первого уравнения равно 0 или 1.

2) С возрастанием x функция $y = \log_7(x(12 + \sqrt{-p}))$ возрастает неограниченно. При достаточно больших x ее график расположен выше прямой $y = p(p-1) - 6x + 3$. При приближении x к нулю значения функции $y = \log_7(x(12 + \sqrt{-p}))$ неограниченно убывают, и ее график окажется ниже этой прямой. Значит, прямая и график функции пересекутся, т.е. n=1.

3) Число 0 не является корнем второго уравнения. При $x \neq 0$ второе уравнение равносильно уравнениям:

$$2x - \frac{25}{x} = \frac{x^2 - (5p-3)x + 15}{x(p+1)}$$

$$2x^2(p+1) - 25(p+1) = x^2 - (5p-3)x + 15$$

$$(2p+1)x^2 + (5p-3)x - 5(5p+8) = 0$$

$$(x+5)((2p+1)x - (5p+8)) = 0(*)$$

Уравнение (*) всегда имеет ненулевой корень x=-5. поэтому число k различных корней второго уравнения равно 1 или 2.

$$(x+5)((2p+1)x-(5p+8))=0(*)$$

4) По условию 1+(p+5)=k, т.е. p=k-6. Поэтому p=-5 или p=-4. Если p=-5,

то k=1, а уравнение (*) примет вид (x+5)(-9x+17)=0. у него два ненулевых

корня, т.е. k=2, что противоречит условию k=1. если p=-4, то k=2, а

уравнение (*) примет вид (x+5)(-7x+12)=0. у него два ненулевых корня,

т.е. k=2. значит, p=-4 удовлетворяет условию задачи.

5) При p=-4 первое уравнение примет вид

$$\log_7(14x)=23-6x$$

Его единственным корнем является число x=3,5, найденное подбором:

$$\log_7 49=2,$$
$$23-21=2.$$

$$\boxed{Ответ: x=3{,}5}$$

Задание № 7 (автор ученик 11 Б класса Морозкин Илья, творческое задание в рамках спецкурса «Нестандартные задачи в курсе алгебры и начала анализа»)

Найти Sф. , ограниченной осями координат и лежащую в квадрате, у которого пересечение диагоналей находится в начале системе координат, стороны квадрата параллельны осям координат и равны по 12; при этом координаты точек, составляющих фигуру, удовлетворяют следующему условию

$$\begin{cases} y \le 16/x \\ y \ge x \end{cases} ;\ (*)$$

и не удовлетворяют условию: $x^2 + y^2 + 4 < 4x + 4y$. (**)

Решение:

Преобразуем $x^2 + y^2 + 4 = 4x + 4y$ в уравнение окружности.

Для этого перенесем $4x + 4y$ в левую часть, а также прибавим к обеим частям уравнения 4 (четыре);

Получаем $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 2^2$;

где радиус окружности равен 2,

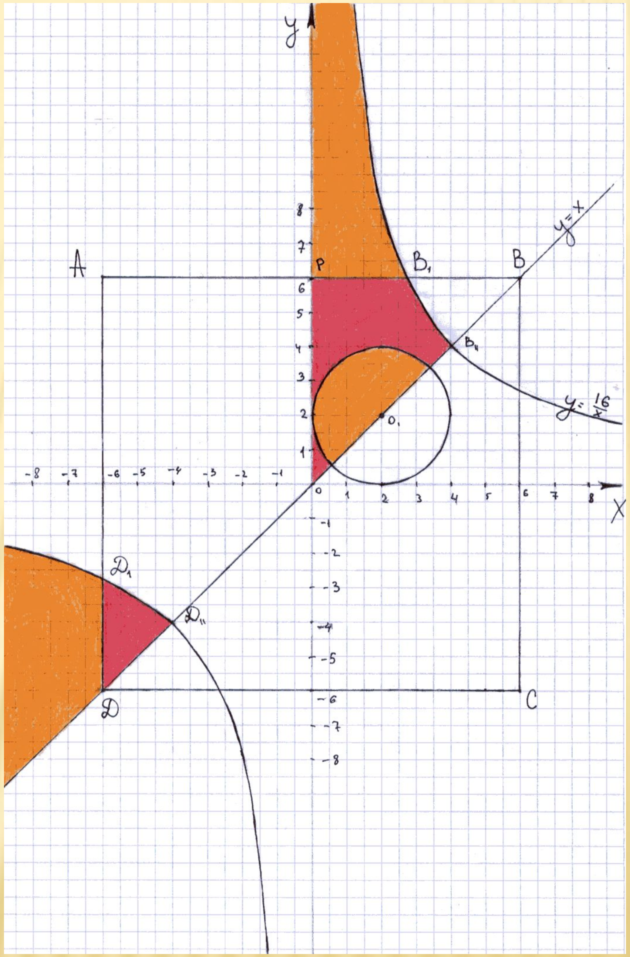
а центр окружности находится в точке (2;2).

Построим фигуру с учетом (*) и (**), построение не вызывает сложностей. Ответом этой системы является красная и оранжевая области.

Теперь изобразим на координатной плоскости квадрат со стороной 12, заметим что координаты его вершин будут удовлетворять точки (6;6), (-6;6), (-6;-6) и (6;-6).

Также изображаем круг с центром (2;2) и R=2.

Площадь фигуры выделена красным



Очевидно, что сегменты DD'D" и BB'B" имеют равные площади (в силу нечетности функций $y=16/x$ и равенства отрезков). То есть можно заменить BB'B" на DD'D".

Далее задача упрощается. Найдем площадь треугольника OPB по формуле $S = (½)\cdot OP \cdot PB$; $S = (½)\cdot 36$; $S = 18$ (кв. ед.).

Нас интересует площадь, закрашенная красным. Итак, $S_{ф} = S_{ОРВ} - S_{полукруга}$;

$S_{полукруга} = (\pi R^2)/2 = 2\pi$ (кв. ед.).

Откуда $S_{ф} = 18 - 2\pi$ (кв. ед.).

Ответ: $S_{ф} = 18 - 2\pi$ (кв. ед.).

$$Ответ: S_{ф} = 18 - 2\pi (кв.ед.)$$

ЗАДАНИЕ № 8 (АВТОР УЧЕНИК 11 Б КЛАССА МОРОЗКИН ИЛЬЯ, ТВОРЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ В РАМКАХ СПЕЦКУРСА «НЕСТАНДАРТНЫЕ ЗАДАЧИ В КУРСЕ АЛГЕБРЫ И НАЧАЛА АНАЛИЗА»)

Решить систему:

$$\begin{cases} \log_{\sqrt{\sin y}} 2 + 1 \geq \cos 2y - 2\cos y \\ 4x^5 - 107x^3 - 149x \leq 12x^4 - 234x^2 - 30 \\ \cos(\frac{\pi}{2} - y) = x \\ y \in [0;2] \end{cases}$$

Решение:

1.Упростим систему.

$$\begin{cases} \log_{\sin y} 2 \geq -1 \\ 4x^5 - 12x^4 - 107x^3 + 234x^2 - 149x + 30 \leq 0 \\ \sin y = x \\ y \in [0;2] \end{cases}$$

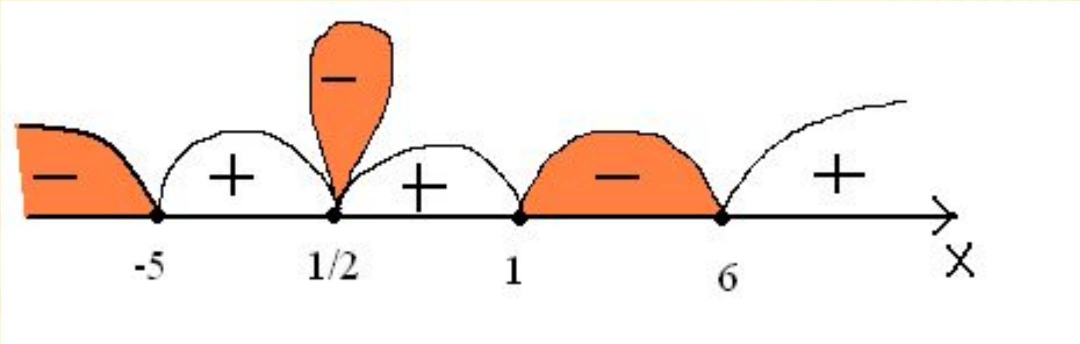
2.Теперь необходимо упростить второе неравенство. Для этого разложим многочлен на множители, воспользуемся теоремой Безу.

$$4x^5 - 12x^4 - 107x^3 + 234x^2 - 149x + 30 = 0$$

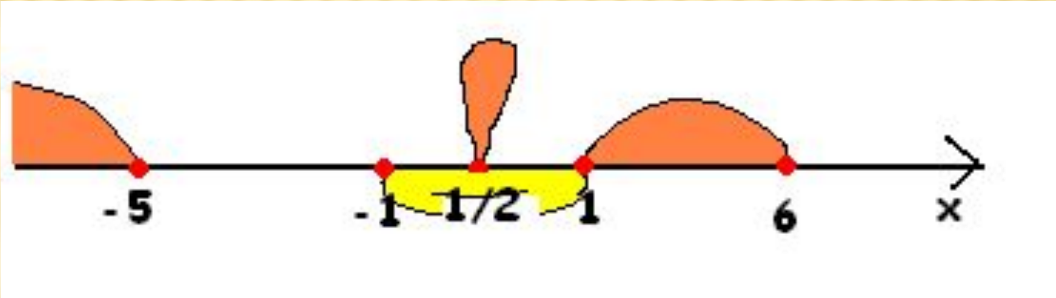
$$x = -5; x = \frac{1}{2}; x = 1; x = 6$$

$$(x+5)\cdot\left(x - \frac{1}{2}\right)\cdot(x-1)\cdot(x-6) \le 0$$

3.Решением данного неравенства являются интервалы. Необходимо заметить что при переходе через точку ½ знак не меняется из-за четности.



4.Теперь посмотрим на уравнение 3. По определению |sin y|≤1, откуда |x|≤1. Получаем два корня x= ½ и x=1.



5. Решим неравенство 1. В основании логарифма стоит тригонометрическая функция. $0<\sin y<1$, так как $|\sin y|\le 1$ и $\sin y>0$, так как стоит в основании логарифма. При освобождении от логарифма знак будет меняться на противоположный. Откуда $x\le \frac{1}{2}$, то есть $x = \frac{1}{2}$.

6.Решаем уравнение 3. sin y = ½. Решением данного уравнения является совокупность.

$$\left[\begin{array}{l} y=\dfrac{\pi}{6}+2\pi k, k\in Z \\ y=\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k, k\in Z \end{array}\right.$$

7.Существует условие $y\in[0;2]$, делаем выборку корней.

$$]k=0;\, y=\frac{\pi}{6}\in[0;2]$$

$$y=\frac{5\pi}{6}\notin[0;2]\frac{5\pi}{6}>2$$

Необходимо сделать проверку системы.

Для нее является решением :

$x = \frac{1}{2}$ и $y = \pi/6$.

$$\text{Ответ}: \left(\frac{1}{2}; \frac{\pi}{6}\right)$$