

Дисциплина **МАТЕМАТИКА**

Лектор: **Юлия Абдулловна Ахкамова**,
доцент кафедры математики
и методики обучения математике
ЮУрГГПУ

akhkamovayua@cspu.ru

Балльно-рейтинговая система

1 курс

- Он-лайн 1 лекции 5 баллов (max $1*5=5$);
- 3 лаб. занятия по 5 баллов(max $3*5=15$);

Контрольная работа №1 задачи 1,3а,б,в,8 (max 60);

Защита-обсуждение занятий или кр (электронного варианта) max 10 баллов);

Зачетная работа до 20 баллов .

60 баллов и выше «Зачтено»,



- 3. Учебный вопрос.

Метод Гаусса систем линейных алгебраических уравнений.

Карл Фридрих Гаусс (30.04.1777-23.02.1855)

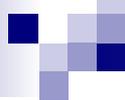
- **Немецкий математик, механик, физик, астроном и геодезист. Считается одним из величайших математиков всех времён, «королём математиков».**

Иностраннный член Шведской и Российской Академий наук, английского Королевского общества.



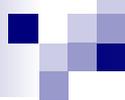
- Рассмотрим систему **m** линейных алгебраических уравнений с **n** неизвестными. Расширенной матрицей системы называется основная матрица с приписанным справа столбцом свободных членов:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$



Напомним, элементарными преобразованиями строк матрицы называются:

- 1) перемена местами двух строк матрицы;
- 2) умножение строки на любое ненулевое число;
- 3) прибавление к элементам одной строки соответствующих элементов другой строки, умноженных на некоторое число;
- 4) вычеркивание нулевой строки.



Напомним, рангом матрицы размерности $m \times n$ называется количество ненулевых строк в эквивалентной ей ступенчатой матрице.

Ступенчатая матрица получена из исходной с помощью элементарных преобразований строк.

Определение. Две системы линейных алгебраических уравнений называются эквивалентными или равносильными, если они имеют одно и то же множество решений.

Метод Гаусса.

В отличие от матричного метода и метода Крамера метод Гаусса может быть применен к СЛАУ с произвольным числом уравнений и неизвестных.

Суть метода Гаусса заключается в последовательном исключении неизвестных.



Алгоритм решения систем линейных уравнений методом Гаусса .

1) Расширенную матрицу системы с помощью элементарных преобразований приводим к ступенчатому виду.

2) Отбрасываем нулевые строки.

3) Применяем следующую теорему:

Теорема Кронеккера-Капелли:

При совпадении рангов расширенной и основной матриц СЛАУ совместна; при равенстве ранга с числом неизвестных СЛАУ определена.

СЛАУ

Несовместная
 $r(\hat{A}) \neq r(A)$

Несовместная
 $r(\hat{A}) \neq r(A)$

Несовместная
 $r(\hat{A}) \neq r(A)$



Если система имеет единственное решение, то, двигаясь по системе снизу вверх, последовательно находим значения неизвестных.

Если система имеет бесконечное множество решений, то сначала выделяем базисные неизвестные.



4) Неизвестная, соответствующая столбцу, в котором стоит первый ненулевой элемент данной строки, является базисной. Остальные неизвестные – свободные.

5) Двигаясь по системе снизу вверх, последовательно выражаем базисные неизвестные через свободные.

Пример. Решить систему методом

Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 11 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$$

Решение.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 2 & 8 \end{array} \right) \begin{array}{l} \textcircled{-2} \\ \textcircled{-1} \end{array} \begin{array}{l} + \\ + \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{array} \right) \begin{array}{l} \textcircled{-2} \\ \textcircled{3} \end{array} \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -6 & 2 & -10 \\ 0 & 6 & 3 & 15 \end{array} \right) \xrightarrow{+} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -6 & 2 & -10 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{\textcircled{1/5}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -6 & 2 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{} \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ 0x_1 - 6x_2 + 2x_3 = -10 \\ 0x_1 + 0x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

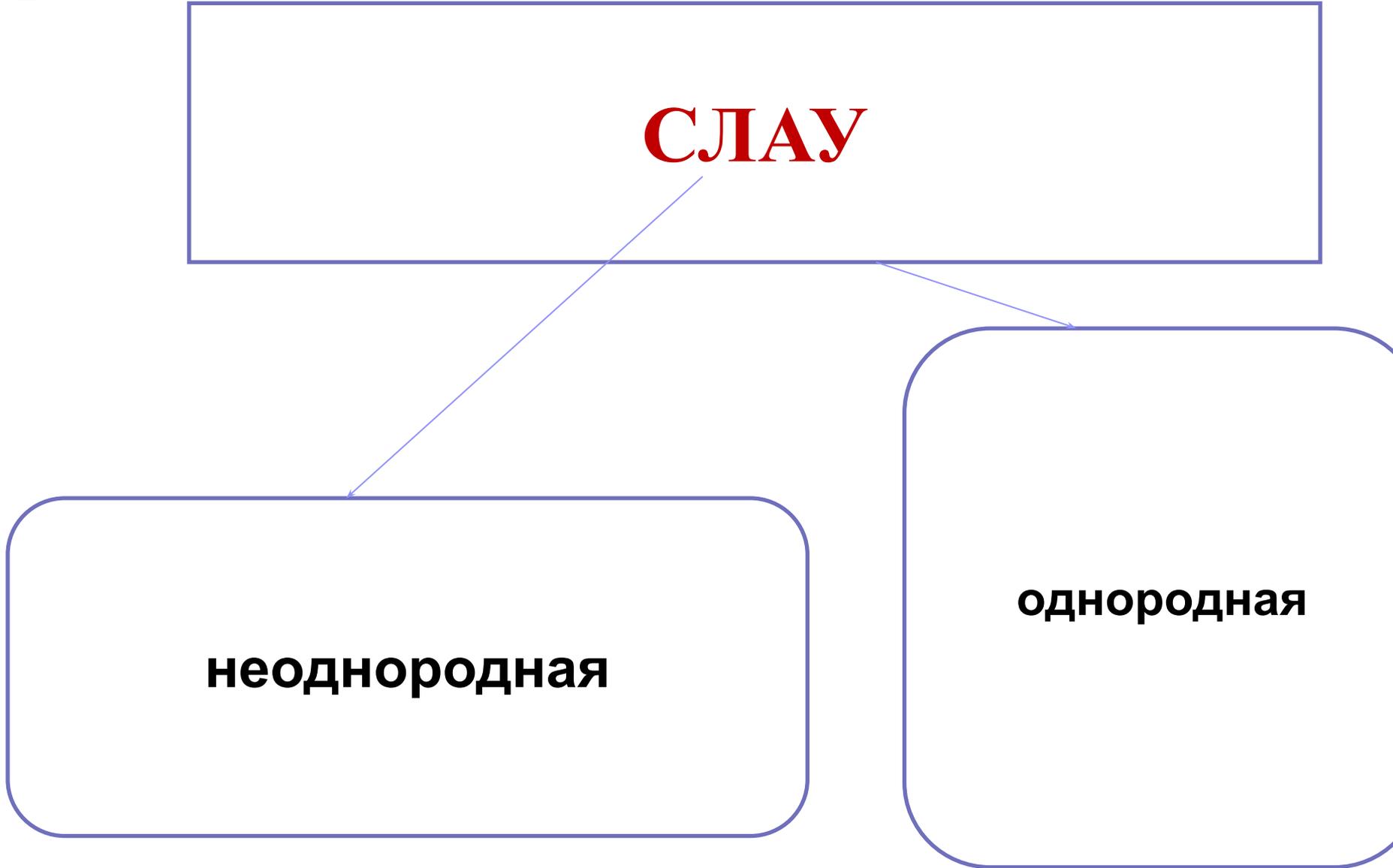
$$x_1 = 4$$

$$x_2 = 2$$

$$x_3 = 1$$



СЛАУ



```
graph TD; A[СЛАУ] --> B[неоднородная]; A --> C[однородная];
```

неоднородная

однородная

Система линейных алгебраических уравнений называется однородной СЛАУ, если свободный член в каждом уравнении равен нулю.

Пример. однородной системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Однородная система всегда совместна.

- Очевидно, что $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ – **нулевое или тривиальное** решение однородной системы.
- Кроме тривиального, система может иметь и другие решения (нетривиальные).

Задание на самостоятельную работу (ППИ, 1 курс)

Данко П.Е., др. Высшая математика в упражнениях и задачах, часть I, с.39-43, 70-79.

Контрольная работа №1 задания 1;(3а,3б);3в;8.