

ТЕОРИЯ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Тихомирова Анна Николаевна
anna@butovo.com

Занятие 2.

*Принятие решений на основе метода
анализа иерархий.*

Введение



Томас Саати
американский математик

Разработал в 1970 процедуру
поддержки принятия решений
"Analytic hierarchy process"
(АНП).

В России эту процедуру называли
"Метод анализа иерархий"
(МАИ).

Метод анализа иерархий

- Метод состоит в декомпозиции проблемы на все более простые составляющие части и дальнейшей обработке последовательности суждений лица, принимающего решения, на основе парных сравнений.
- Основная цель исследования и все факторы, в той или иной степени влияющие на достижение цели, распределяются по уровням в зависимости от степени и характера влияния.

Метод анализа иерархий

- На первом уровне иерархии всегда находится одна вершина – *цель проводимого исследования*.
- Второй уровень иерархии составляют *критерии*, непосредственно влияющие на достижение цели. При этом каждый критерий представляется в строящейся иерархии вершиной, соединенной с вершиной 1-го уровня.
- Третий уровень составляют *критерии*, от которых зависят вершины 2-го уровня. И так далее.
- На последний уровень обычно выносятся альтернативы

Этапы реализации МАИ

Формулировка цели, выбор критериев и альтернатив

Построение дерева иерархии проблемы

Определение относительной важности

Расчет вектора приоритетов

Определение согласованности приоритетов

Корректировка суждений

Иерархический синтез

ОДНОУРОВНЕВЫЕ ИЕРАРХИИ

Этап №1. Формулировка цели, выбор критериев и альтернатив

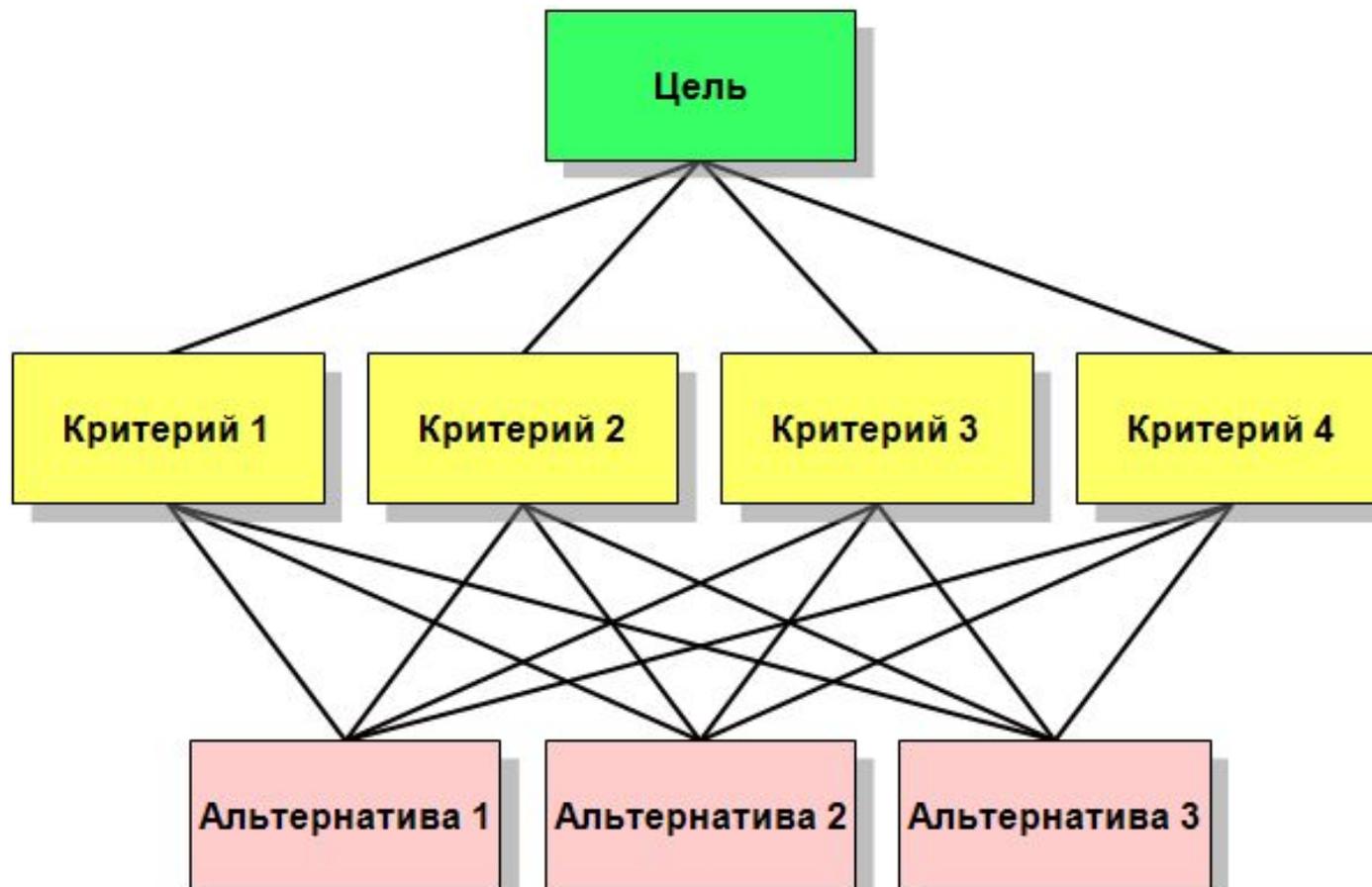
- Цель – желаемое состояние системы
- Альтернативы – совокупность различных способов достижения поставленной цели.
- Критерии оценки альтернатив – показатели привлекательности (или непривлекательности) альтернатив для участников процесса выбора решения.

Именно оценка критериев служит базой для выбора наилучшей альтернативы.

Этап №2. Построение дерева иерархии проблемы

- *Начинается с вершины (цели), через промежуточные уровни (перечень критериев) к самому нижнему уровню (перечень альтернатив). Уровней критериев может быть несколько.*
- *Иерархическая структура — это графическое представление проблемы в виде перевернутого дерева, где каждый элемент, за исключением самого верхнего, зависит от одного или более выше расположенных элементов.*

Иерархическая структура МАИ



Этап №3. Определение относительной важности

- Если принимается метод попарного сравнения, то строится множество матриц парных сравнений.
- Для этого в иерархии выделяют элементы двух типов: элементы-«родители» и элементы-«потомки».
- Элементы-«потомки» воздействуют на соответствующие элементы вышестоящего уровня иерархии, являющиеся по отношению к ним элементами-«родителями».
- Матрицы парных сравнений строятся для всех элементов-«потомков», относящихся к соответствующему элементу-«родителю».

Этап №3. Определение относительной важности

Для каждого элемента-«родителя» строится квадратная матрица размерностью, равной числу элементов n более низкого уровня (A_1, A_2, \dots, A_n) , являющегося его элементом-«потомком».

$$A = (a_{ij}) \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

Если элементы (A_1, A_2, \dots, A_n) могут быть оценены количественно по какому-либо параметру (вес, стоимость, время и т.д.), то их парное сравнение можно осуществить, сравнивая между собой количественные значения данного параметра для каждого элемента $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$. Тогда в соответствующие клетки матриц заносятся отношения этих количественных значений.



Если значения $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ неизвестны заранее, то парное сравнение элементов (A_1, A_2, \dots, A_n) производится с использованием субъективных суждений, численно оцениваемых по шкале относительной важности.

Шкала относительной важности

Значение важности	Определение
1	Равная важность элементов
3	Умеренное превосходство одного элемента над другим
5	Существенное или сильное превосходство одного элемента над другим
7	Значительное превосходство одного элемента над другим
9	Очень сильное превосходство одного элемента над другим
2, 4, 6, 8	Промежуточные решения между двумя соседними суждениями, применяются в компромиссном случае
$1/3, 1/5, \dots$	Обратные величины, полученные при сравнении второго элемента с первым, означают ту или иную степень превосходства второго элемента над первым

Шкала относительной важности



Какой из элементов важнее



Какой из элементов имеет
большее воздействие



Какой из элементов более
вероятен



Какой из элементов
предпочтителен, желателен

Правила сравнения

1. Если элемент A_i доминирует над элементом A_j , то клетка на пересечении строки A_i и столбца A_j заполняется числовым значением в соответствии со шкалой относительной важности, а клетка на пересечении строки A_j и столбца A_i – обратной к этому значению дробью.

$$\text{Если } a_{ij} = \alpha, \text{ то } a_{ji} = 1/\alpha, \alpha \neq 0.$$

2. Если элемент A_j доминирует над элементом A_i , то происходит обратное – в клетку на пересечении строки A_j и столбца A_i записывается числовое значение относительной важности, а в клетку на пересечении строки A_i и столбца A_j – его обратная величина (обратная дробь).

3. Если элементы A_i и A_j считаются одинаковыми, то в обе клетки записываются единицы, т.е. A_i имеет одинаковую с A_j относительную важность, то $a_{ij} = 1$, $a_{ji} = 1$; в частности, $a_{ii} = 1$ для всех i .

$$A = \begin{array}{c|cccc} & 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & 1/a_{12} & 1 & \dots & a_{2n} \\ & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & 1/a_{1n} & 1/a_{2n} & \dots & 1 \end{array}$$

Этап №4. Расчет вектора приоритетов

- **Приоритеты** — это числа, которые связаны с элементами иерархии.
- Они представляют собой относительные веса w_1, w_2, \dots, w_n элементов в каждой группе.

Подобно вероятностям, приоритеты — безразмерные величины, которые могут принимать значения от нуля до единицы.

- Чем больше величина приоритета, тем более значимым является соответствующий ему элемент.
- Сумма приоритетов элементов, подчиненных одному элементу выше лежащего уровня иерархии, равна единице. Приоритет цели по определению равен 1.

Расчет вектора приоритетов

1 способ

Суммировать элементы каждой строки и нормализовать делением каждой суммы на сумму всех элементов; сумма полученных результатов будет равна единице. Первый элемент результирующего вектора будет приоритетом первого объекта, второй – второго объекта и т.д.

1	5	9	1/7
1/5	1	3	1/5
1/9	1/3	1	1/9
7	5	9	1

15,14 0,351

4,40 0,102

1,56 0,036

22,00 0,510

43,10 1

Расчет вектора приоритетов

2 способ

Суммировать элементы каждого столбца и получить обратные величины этих сумм. Нормализовать их так, чтобы их сумма равнялась единице, разделив каждую обратную величину на сумму всех обратных величин.

1	5	9	1/7
1/5	1	3	1/5
1/9	1/3	1	1/9
7	5	9	1

8,31	0,12	0,13
11,33	0,09	0,09
22	0,05	0,05
1,45	0,69	0,73
43,10	0,94	1,00

Расчет вектора приоритетов

3 способ

Разделить элементы каждого столбца на сумму элементов этого столбца (т. е. нормализовать столбец), затем сложить элементы каждой полученной строки и разделить эту сумму на число элементов строки. Это – процесс усреднения по нормализованным столбцам.

1	5	9	1/7
1/5	1	3	1/5
1/9	1/3	1	1/9
7	5	9	1

0,12	0,44	0,41	0,10
0,02	0,09	0,14	0,14
0,01	0,03	0,05	0,08
0,84	0,44	0,41	0,69

1,07	0,27
0,39	0,10
0,16	0,04
2,38	0,60
4,00	1,00

Расчет вектора приоритетов

4 способ

Умножить n элементов каждой строки и извлечь корень n -й степени.
Нормализовать полученные числа

1	5	9	1/7
1/5	1	3	1/5
1/9	1/3	1	1/9
7	5	9	1

1,592 0,240

0,589 0,089

0,253 0,038

4,213 0,634

6,647 1

Сравнение способов

1 способ	2 способ	3 способ	4 способ
0,351	0,128	0,267	0,240
0,102	0,094	0,097	0,089
0,036	0,048	0,041	0,038
0,510	0,730	0,595	0,634

1 способ	по сравнению с 4м способом	2 способ	по сравнению с 4м способом	3 способ	по сравнению с 4м способом
0,112	47%	0,112	47%	0,028	12%
0,014	15%	0,005	6%	0,008	9%
0,002	5%	0,010	27%	0,003	8%
0,123	19%	0,096	15%	0,039	6%
среднее отклонение	22%	среднее отклонение	24%	среднее отклонение	9%

Этап №5. Определение согласованности приоритетов

- Если анализируется матрица с результатами, полученными с помощью точных физических измерений (например, высоты, массы и т.д.), то значения элементов матрицы транзитивны: если некоторый объект A_1 предпочтительнее объекта A_2 в k раз, а объект A_2 предпочтительнее объекта A_3 в m раз, то объект A_1 предпочтительнее объекта A_3 в $k*m$ раз.
- В практических задачах количественная (кардинальная) и транзитивная (порядковая) согласованность нарушается, поскольку человеческие ощущения нельзя выразить точной формулой. В реальной жизни достигнуть такой точности экспертизы сложно, поэтому необходимо ввести параметр, определяющий насколько отличаются индексы согласованности для произвольной и заполненной экспертом матрицы.
- Для улучшения однородности в числовых суждениях, какая бы величина a_{ij} ни была взята для сравнения i -го элемента с j -м, a_{ij} приписывается значение обратной величины, т. е. $a_{ij} = 1/a_{ji}$. Отсюда следует, что если один элемент в a раз предпочтительнее другого, то последний только в $1/a$ раз предпочтительнее первого.

Этап №5. Определение согласованности приоритетов

Пусть A — это квадратная матрица.

Вектор v называется *собственным вектором* матрицы A , если $Av = \lambda v$, где число λ называется *собственным значением* матрицы A .

Таким образом преобразование, которое выполняет матрица A над вектором v , сводится к простому растяжению или сжатию с коэффициентом λ .

Для оценки однородности матрицы (согласованности суждений эксперта) необходимо использовать отклонение величины максимального* собственного значения λ_{max} от порядка матрицы n .

*В работе далее вместо максимального собственного значения будет использоваться среднее значение различных λ .

Этап №5. Определение согласованности приоритетов

Для исходной матрицы посчитаем

1	5	9	1/7
1/5	1	3	1/5
1/9	1/3	1	1/9
7	5	9	1

1. Приоритеты

$$X = \begin{cases} (1 * 5 * 9 * \frac{1}{7})^{1/4} \\ (\frac{1}{5} * 1 * 3 * \frac{1}{5})^{1/4} \\ (\frac{1}{9} * \frac{1}{3} * 1 * \frac{1}{9})^{1/4} \\ (7 * 5 * 9 * 1)^{1/4} \end{cases} = \begin{cases} 1,592 \\ 0,589 \\ 0,253 \\ 4,213 \end{cases}$$

2. Сумма по всем $x_i = 6,647$.

3. Вес каждого критерия

$$W = \begin{cases} 1,592/6,647 \\ 0,589/6,647 \\ 0,253/6,647 \\ 4,213/6,647 \end{cases} = \begin{cases} 0,240 \\ 0,089 \\ 0,038 \\ 0,634 \end{cases}$$

Этап №5. Определение согласованности приоритетов

4. Умножаем матрицу относительной важности на вектор приоритетов. Например, для первой строки (для всех остальных, аналогично)

$$(M * w)_1 = \left\{ 1, 5, 9, \frac{1}{7} \right\} \times \begin{pmatrix} 0,240 \\ 0,089 \\ 0,038 \\ 0,634 \end{pmatrix} = \{1,116\}$$

5. Затем делим каждую компоненту нового вектора на соответствующую компоненту вектора приоритетов (для всех остальных, аналогично).

$$(\lambda * w)_1 = \frac{1,116}{0,240} = 4,658$$

6. Полученные значения необходимо просуммировать и разделить на число компонент вектора, получим λ_{\max} – собственное значение.

$$(\lambda * w) = \begin{pmatrix} 4,658 \\ 4,264 \\ 4,321 \\ 4,885 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_{\max} = \frac{4,658 + 4,264 + 4,321 + 4,885}{4} = 4,532$$

Этап №5. Определение согласованности приоритетов

7. Расчет индекса согласованности:

$$ИС = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1}$$

$$ИС = \frac{4,532 - 4}{4 - 1} = 0,177$$

8. Расчет отношения согласованности:

$$ОС = \frac{ИС}{СС}$$

$$ОС = \frac{0,177}{0,9} * 100\% = 19,7\%$$

СС — среднее значение (математическое ожидание) индекса согласованности случайным образом составленной матрицы парных сравнений, которое основано на экспериментальных данных.

<i>Размер матрицы</i>	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>6</i>	<i>7</i>	<i>8</i>	<i>9</i>	<i>10</i>
<i>СС</i>	0	0	0,58	0,90	1,12	1,24	1,32	1,41	1,45	1,49

Этап №5. Определение согласованности приоритетов

Итоговая таблица

	X	w	$M^* w$	$\lambda^* w$	λ_{max}	$ИС$	$ОС$
1	1,592	0,240	1,116	4,658	4,532	0,177	19,7%
2	0,589	0,089	0,378	4,264			
3	0,253	0,038	0,165	4,321			
4	4,213	0,634	3,096	4,885			

В качестве допустимого используется значение $ОС \leq 0,10$.

Если для матрицы парных сравнений отношение согласованности $ОС > 0,10$, то это свидетельствует о существенном нарушении логичности суждений, допущенном экспертом при заполнении матрицы, поэтому эксперту предлагается пересмотреть данные, использованные для построения матрицы, чтобы улучшить согласованность

Этап №6. Корректировка суждений

1. Найти строку i :

$$\max_i \sum_{j=1}^n \left| a_{ij} - \frac{w_i}{w_j} \right|$$

0	2,294	2,713	0,235	5,242
0,169	0	0,676	0,060	0,906
0,047	0,102	0	0,051	0,201
4,354	3,201	7,633	0	15,189

2. Заменить все a_{ij} на w_i/w_j в этой строке, а в соответствующем столбце поставить их обратные величины.

1,00	5,00	9,00	0,38
0,20	1,00	3,00	0,14
0,11	0,33	1,00	0,06
2,65	7,16	16,63	1,00

Этап №6. Корректировка суждений

3. Пересчитать вектор приоритета и значение индекса согласованности.

	X	w	M^*w	λ^*w	λ_{max}	$ИС$	$ОС$
1	2,031	0,290	1,181	4,072	4,052	0,017	1,9%
2	0,538	0,077	0,312	4,060			
3	0,217	0,031	0,125	4,030			
4	4,213	0,602	2,436	4,047			

4. При необходимости повторить пп.1-3.

Далее этапы 3, 4, 5, 6 проводятся для всех уровней иерархии

Этап №7. Иерархический синтез

1. Составить матрицу, в которой столбцы – это векторы приоритетов каждой из альтернатив по конкретному критерию. Если в иерархии было N альтернатив и M критериев, то в матрице получится N строк и M столбцов
2. Для того, чтобы получить оценку альтернатив, необходимо умножить полученную матрицу на вектор приоритетов критериев. Т.о. будет умножена матрица размерности $N \times M$ на вектор размерности M . В результате будет получен вектор размерности N , значения элементов которого и соответствует предпочтительности альтернатив с точки зрения достижимости поставленной цели.
3. Из полученного вектора следует выбирать альтернативу с наибольшим значением в полученном векторе.

Пример -аналог задания №1 в лаб.раб.№1

Задача о выборе школы

Необходимо проанализировать школы А, В, С на предмет их желательности с точки зрения конкретного ребенка. Для сравнения были выбраны шесть независимых характеристик (критерии):

1. Учеба (У)
2. Друзья (Д)
3. Школьная жизнь (Ж)
4. Профессиональное обучение (П)
5. Подготовка к колледжу (К)
6. Обучение музыке (М)

Этап №1. Формулировка цели, выбор критериев и альтернатив

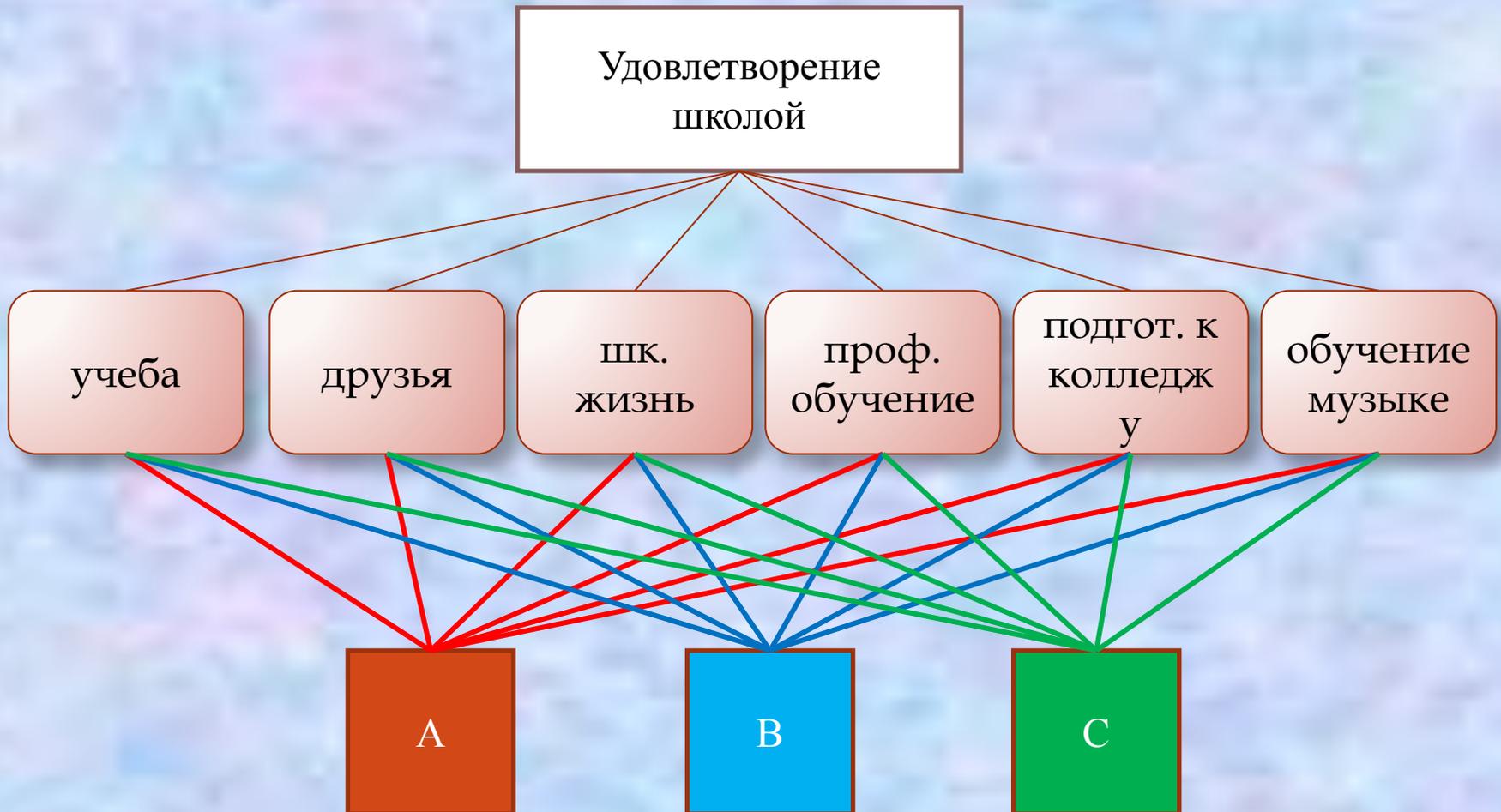
Цель: анализ школ.

Критерии:

1. Учеба (У)
2. Друзья (Д)
3. Школьная жизнь (Ж)
4. Профессиональное обучение (П)
5. Подготовка к колледжу (К)
6. Обучение музыке (М)

Альтернативы: школы А, В, С.

Этап №2. Построение дерева иерархии проблемы



Этап №3. Определение относительной важности

- Матрица для элемента «удовлетворение школой», в данном случае число элементов следующего уровня равно 6, значит строим матрицу 6 на 6:

	<i>У</i>	<i>Д</i>	<i>Ж</i>	<i>П</i>	<i>К</i>	<i>М</i>
<i>У</i>	1	4	3	1	3	4
<i>Д</i>	1/4	1	7	3	1/5	1
<i>Ж</i>	1/3	1/7	1	1/5	1/5	1/6
<i>П</i>	1	1/3	5	1	1	1/3
<i>К</i>	1/3	5	5	1	1	3
<i>М</i>	1/4	1	6	3	1/3	1

- Критерий «У» (учеба) имеет умеренное превосходство над критерием «Ж» (школьная жизнь)

Этап №3. Определение относительной важности

Затем строим матрицы для элементов следующего уровня:

<i>У</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>
<i>A</i>	1	1/3	1/2
<i>B</i>	3	1	3
<i>C</i>	2	1/3	1

<i>Д</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>
<i>A</i>	1	1	1
<i>B</i>	1	1	1
<i>C</i>	1	1	1

<i>Ж</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>
<i>A</i>	1	5	1
<i>B</i>	1/5	1	1/5
<i>C</i>	1	5	1

<i>П</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>
<i>A</i>	1	9	7
<i>B</i>	1/9	1	1/5
<i>C</i>	1/7	5	1

<i>К</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>
<i>A</i>	1	1/2	1
<i>B</i>	2	1	2
<i>C</i>	1	1/2	1

<i>М</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>
<i>A</i>	1	6	4
<i>B</i>	1/6	1	1/3
<i>C</i>	1/4	3	1

По критерию «П» (профессиональное обучение) альтернатива «А» (школа А) имеет очень сильное превосходство над альтернативой «В»

Этап №4. Расчет вектора приоритетов

- Рассчитаем векторы приоритетов для задачи (3-ий способ, Вам в ЛР считать способом №4):
- Для матрицы «удовлетворение школой»:
- Посчитаем сумму по каждому столбцу:

$$C_{\text{столб}} = (3,16; 11,47; 27; 9,2; 5,73; 9,5)$$

- Каждый элемент исходной матрицы разделим на сумму того столбца, в котором он стоит, получаем следующую матрицу:

0,32	0,35	0,11	0,11	0,52	0,42
0,08	0,09	0,26	0,33	0,03	0,11
0,11	0,01	0,04	0,02	0,03	0,02
0,32	0,03	0,19	0,11	0,17	0,04
0,10	0,44	0,19	0,11	0,17	0,32
0,08	0,09	0,22	0,33	0,06	0,11

Этап №4. Расчет вектора приоритетов

- Суммируем элементы в каждой строке и делим на число элементов в этой строке, полученный вектор и будет вектором приоритетов, сумма компонентов которого должна равняться единице:

$\vec{\Pi} =$	0,30	У
	0,15	Д
	0,04	Ж
	0,14	П
	0,22	К
	0,15	М

Этап №4. Расчет вектора приоритетов

- То же самое проделываем для остальных матриц

$$\begin{array}{ccc} 0,17 & 0,20 & 0,11 \\ 0,5 & 0,60 & 0,67 \\ 0,33 & 0,20 & 0,22 \end{array} \quad \vec{\Pi}_y = \begin{array}{c} 0,16 \\ 0,59 \\ 0,25 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 0,8 & 0,60 & 0,85 \\ 0,09 & 0,07 & 0,02 \\ 0,11 & 0,33 & 0,12 \end{array} \quad \vec{\Pi}_\Pi = \begin{array}{c} 0,75 \\ 0,06 \\ 0,19 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 0,33 & 0,33 & 0,33 \\ 0,33 & 0,33 & 0,33 \\ 0,33 & 0,33 & 0,33 \end{array} \quad \vec{\Pi}_d = \begin{array}{c} 0,33 \\ 0,33 \\ 0,33 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 0,25 & 0,25 & 0,25 \\ 0,5 & 0,5 & 0,5 \\ 0,25 & 0,25 & 0,25 \end{array} \quad \vec{\Pi}_k = \begin{array}{c} 0,25 \\ 0,5 \\ 0,25 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 0,45 & 0,45 & 0,45 \\ 0,9 & 0,9 & 0,9 \\ 0,45 & 0,45 & 0,45 \end{array} \quad \vec{\Pi}_ж = \begin{array}{c} 0,45 \\ 0,9 \\ 0,45 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 0,70 & 0,60 & 0,75 \\ 0,12 & 0,10 & 0,06 \\ 0,18 & 0,30 & 0,19 \end{array} \quad \vec{\Pi}_M = \begin{array}{c} 0,68 \\ 0,09 \\ 0,22 \end{array}$$

Этап №5. Определение согласованности приоритетов

- Определим согласованность приоритетов для нашего примера:
- Умножаем матрицу относительной важности на вектор приоритетов, затем делим каждую компоненту нового вектора на соответствующую компоненту вектора приоритетов. Полученные значения необходимо просуммировать и разделить на число компонент вектора, получим λ_{\max} – собственное значение.

0,32	0,35	0,11	0,11	0,52	0,42	*	0,30	=	2,43	→	7,84
0,08	0,09	0,26	0,33	0,03	0,11		0,15		1,12		7,48
0,11	0,01	0,04	0,02	0,03	0,02		0,04		0,26		6,52
0,32	0,03	0,19	0,11	0,17	0,04		0,14		0,97		6,92
0,10	0,44	0,19	0,11	0,17	0,32		0,22		1,86		8,47
0,08	0,09	0,22	0,33	0,06	0,11		0,15		1,11		7,4

$$\lambda_{\max} = 7,43 \quad \text{ИС} = 0,3 \quad \text{ОС} = 0,2$$

Этап №5. Определение согласованности приоритетов

У

0,25	0,25	0,25	0,16	0,48	3,00
0,5	0,5	0,5	* 0,59 = 1,82	→ 3,08	
0,25	0,25	0,25	0,25	0,76	3,06

$$\lambda_{max} = 3,05 \text{ ИС} = 0,025 \text{ ОС} = 0,04$$

Д

1	1	1	0,33	0,99	3,00
1	1	1	* 0,33 = 0,99	→ 3,00	
1	1	1	0,33	0,99	3,00

$$\lambda_{max} = 3,00 \text{ ИС} = 0 \text{ ОС} = 0$$

Ж

1	5	1	0,45	1,35	3,00
0,2	1	0,2	* 0,09 = 0,27	→ 3,00	
1	5	1	0,45	1,35	3,00

$$\lambda_{max} = 3,00 \text{ ИС} = 0 \text{ ОС} = 0$$

Этап №5. Определение согласованности приоритетов

П

1	9	7	0,75	2,62	3,49
0,11	1	0,2	* 0,06	= 0,18	→ 3,01
0,14	5	1	0,19	0,06	3,13

$$\lambda_{max} = 3,21 \text{ ИС} = 0,105 \text{ ОС} = 0,18$$

К

1	0,5	1	0,25	0,75	3,00
2	1	2	* 0,5	= 1,5	→ 3,00
1	0,5	1	0,25	0,75	3,00

$$\lambda_{max} = 3,00 \text{ ИС} = 0 \text{ ОС} = 0$$

М

1	6	4	0,68	2,1	3,09
0,17	1	0,33	* 0,09	= 0,28	→ 3,09
0,25	3	1	0,22	0,66	3,00

$$\lambda_{max} = 3,06 \text{ ИС} = 0,03 \text{ ОС} = 0,05$$

Этап №7. Иерархический синтез

(этап №6 пропущен)

- Посчитаем общие оценки школ:
- Для этого составим матрицу (столбцы – это векторы приоритетов каждой школы по критериям):

	<i>У</i>	<i>Д</i>	<i>Ж</i>	<i>П</i>	<i>К</i>	<i>М</i>
<i>А</i>	0,16	0,33	0,45	0,75	0,25	0,68
<i>В</i>	0,59	0,33	0,09	0,06	0,5	0,09
<i>С</i>	0,25	0,33	0,45	0,19	0,25	0,22

- Для того, чтобы получить оценку, необходимо умножить полученную матрицу на вектор приоритетов критериев:

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & & & & 0,30 \\
 & & & & & & 0,15 \\
 0,16 & 0,33 & 0,45 & 0,75 & 0,25 & 0,68 & 0,04 & 0,38 \\
 0,59 & 0,33 & 0,09 & 0,06 & 0,5 & 0,09 & * & = 0,36 \\
 0,25 & 0,33 & 0,45 & 0,19 & 0,25 & 0,22 & 0,14 & 0,26 \\
 & & & & & & 0,22 & \\
 & & & & & & 0,15 &
 \end{array}$$

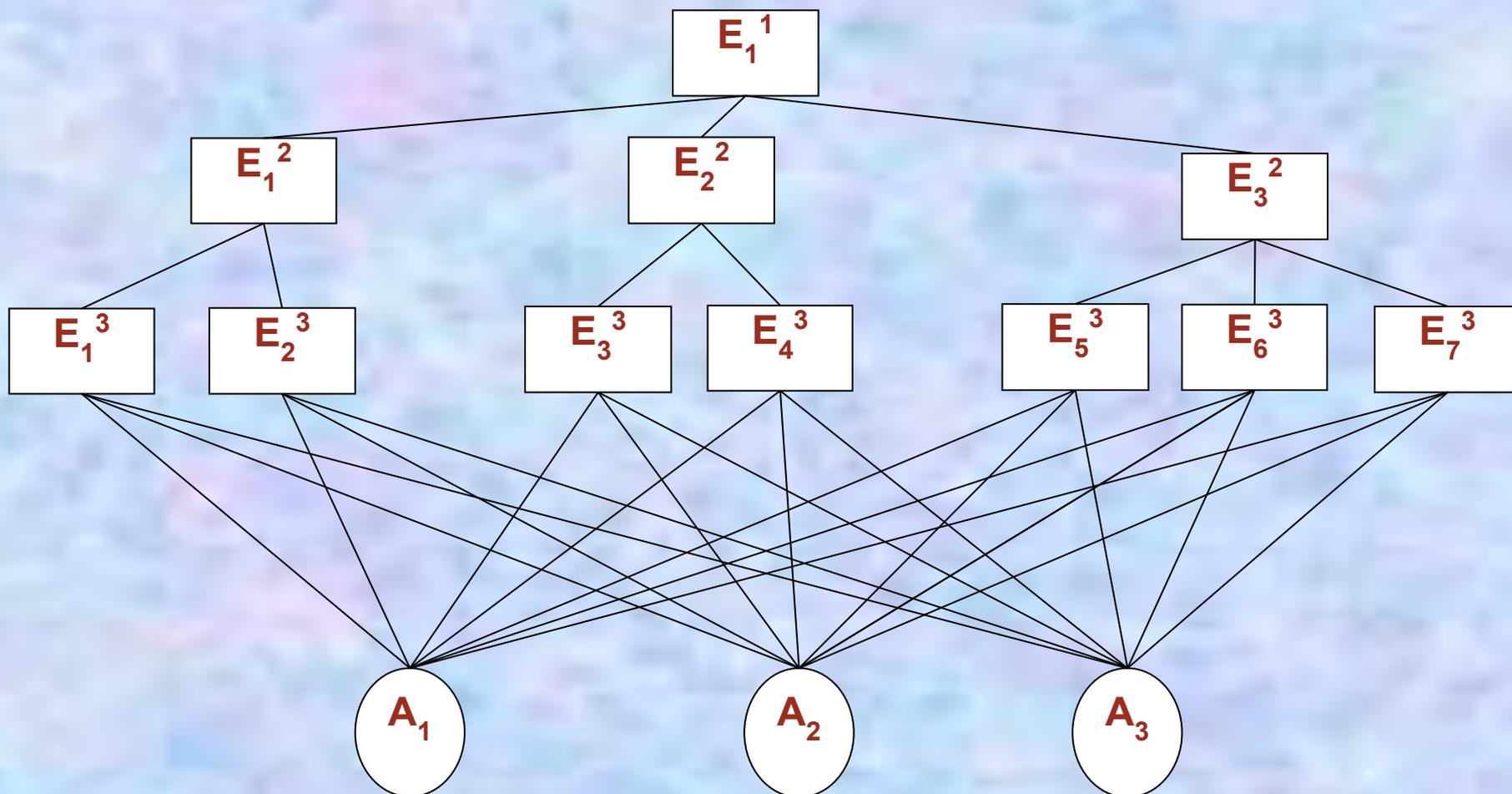
Из полученного решения следует, что надо выбирать школу А, т.к. она имеет наибольшее значение в векторе глобальных приоритетов.

Лабораторная работа №1

- Задание 1. № варианта соответствует номеру в списке.
- **Дано условие и все исходные матрицы.**
- **Выполнить:**
 - 1) Этап 4. (Расчет вектора приоритетов) Использовать способ №4.
 - 2) Этап 5. (Отношение согласованности) Рассчитать для всех матриц.
 - 3) Этап 6. (Корректировка суждений). Несогласованные матрицы пересогласовать.
 - 4) Этап 7. (Синтез). Рассчитать общие оценки альтернатив. Указать наилучшую.

МНОГОУРОВНЕВЫЕ ИЕРАРХИИ

Иерархический синтез



Иерархический синтез

- Определяются векторы приоритетов альтернатив относительно элементов E_j^i предпоследнего уровня иерархии

Шаг 1

Шаг 2

- Обрабатываются матрицы попарных сравнений собственно элементов E_j^i

- Осуществляется собственно иерархический синтез

Шаг 3

Шаг 1

- Определяются векторы приоритетов альтернатив относительно элементов E_j^i предпоследнего уровня иерархии (в данном случае $i = 3$).
- Здесь через E_j^i обозначены элементы иерархии, причем верхний индекс i указывает уровень иерархии, а нижний индекс j — порядковый номер элемента на уровне.
- Вычисление множества векторов приоритетов альтернатив W_S^A относительно уровня иерархии S (в данном случае, $S = 3$) осуществляется по исходным данным, зафиксированным в матрицах попарных сравнений. В результате определяется множество векторов:

$$W_{E_1^3}^A, W_{E_2^3}^A, \dots, W_{E_7^3}^A$$

Шаг 2

- Аналогичным образом обрабатываются матрицы попарных сравнений собственно элементов E_j^i .
- Данные матрицы построены таким образом, чтобы определить предпочтительность элементов определенного иерархического уровня относительно элементов вышележащего уровня, с которыми они непосредственно связаны.

Например,

для вычисления векторов приоритетов элементов третьего иерархического уровня обрабатываются следующие три матрицы попарных сравнений:

E_1^2	E_1^3	E_2^3
E_1^3	1	v_1/v_2
E_2^3	v_2/v_1	1

E_2^2	E_3^3	E_4^3
E_3^3	1	v_3/v_4
E_4^3	v_4/v_3	1

E_3^2	E_5^3	E_6^3	E_7^2
E_5^3	1	v_5/v_6	v_5/v_7
E_6^3	v_6/v_5	1	v_6/v_7
E_7^2	v_7/v_5	v_7/v_6	1

Шаг 2

- В матрицах через v_j обозначен вес, или интенсивность, E_j -го элемента. В случае использования экспертных оценок, в матрицах проставляются значения от 1 до 9 и их обратные величины.
- В результате обработки матриц попарных сравнений определяется множество векторов приоритетов элементов:

$$W_{E_1}^E, W_{E_2}^E, W_{E_3}^E$$

- Полученные значения векторов используются впоследствии при определении векторов приоритетов альтернатив относительно всех элементов иерархии.

Шаг 3

- Осуществляется собственно иерархический синтез, заключающийся в последовательном определении векторов приоритетов альтернатив относительно элементов E_j^i , находящихся на всех иерархических уровнях, кроме предпоследнего, содержащего элементы E_j^S (в нашем случае E_j^3).
- Вычисление векторов приоритетов проводится в направлении от нижних уровней к верхним с учетом конкретных связей между элементами, принадлежащими различным уровням.
- Вычисление проводится путем перемножения соответствующих векторов и матриц.

Шаг 3

- Вычисление векторов приоритетов альтернатив относительно элементов третьего (E^3_j), второго (E^2_j) и первого (E^1_j) уровней иерархии с учетом конкретных связей между элементами иерархии.
- Определение векторов приоритетов альтернатив для элементов второго уровня осуществляется следующим образом:

$$W_{E_1^2}^A = [W_{E_1^3}^A, W_{E_2^3}^A] W_{E_1^2}^E$$

$$W_{E_2^2}^A = [W_{E_3^3}^A, W_{E_4^3}^A] W_{E_2^2}^E$$

$$W_{E_3^2}^A = [W_{E_5^3}^A, W_{E_6^3}^A, W_{E_7^3}^A] W_{E_3^2}^E$$

- Результирующий вектор приоритетов альтернатив относительно корневой вершины иерархии E_1^1 вычисляется следующим образом:

$$W_{E_1^1}^A = [W_{E_1^2}^A, W_{E_2^2}^A, W_{E_3^2}^A] W_{E_1^1}^E$$

Оценка согласованности иерархии

После решения задачи иерархического синтеза оценивается однородность всей иерархии с помощью суммирования показателей согласованности всех уровней, приведенных путем "взвешивания" к первому иерархическому уровню, где находится корневая вершина. Число шагов алгоритма по вычислению согласованности определяется конкретной иерархией.

При двух и более уровнях разбиения на кластеры помимо согласованности каждой матрицы парных сравнений целесообразно проверить отношение согласованности иерархии (ОСИ) по формуле:

$$M = ИС_{E_1} + W_{E_1}^E \cdot ИС_{E_1}^{E_2} + W_{E_2}^E \cdot ИС_{E_2}^{E_2} + W_{E_3}^E \cdot ИС_{E_3}^{E_2}$$

Оценка согласованности иерархии

Для случайных обратно симметричных матриц аналогичным образом подсчитанное значение

$$\tilde{M} = CC_{E_1} + W_{E_1}^E \cdot CC_{E_2} + W_{E_2}^E \cdot CC_{E_3} + W_{E_3}^E \cdot CC_{E_4}$$

где CC – вектор, элементы которого равны случайным индексам матриц соответствующей размерности.

Отношение согласованности иерархии равно M/\tilde{M} .

Если полученное значение не превышает 0.10, иерархия считается согласованной.

Этапы реализации МАИ

Формулировка цели, выбор критериев и альтернатив

Построение дерева иерархии проблемы

Определение относительной важности

Расчет вектора приоритетов

Определение согласованности приоритетов

Корректировка суждений

Иерархический синтез

ЛР №1, Задание 2.

- 1) Выбрать тему
- 2) Кратко охарактеризовать ЛПР. Сформулировать постановку задачи выбора (цель)
- 3) Определить альтернативы (4 - 5 шт.)
- 4) Определить иерархию критериев (3 - 4 группы, всего не менее 12 критериев)
- 5) Провести парные сравнения критериев внутри каждой группы и групп между собой. Произвести проверку согласованности матриц и при необходимости их корректировку. Произвести расчет весов (степени важности) всех критериев относительно цели. Рассчитать согласованность всей иерархии.
- 6) Отметить количественные критерии и подобрать по ним численные данные, систематизировать их в таблицах. Рассчитать оценки каждой альтернативы по этим критериям.
- 7) По качественным критериям заполнить матрицы парных сравнений. Произвести проверку согласованности матриц и при необходимости их корректировку. Рассчитать оценки каждой альтернативы по каждому из этих критериев.
- 8) Провести иерархический синтез – рассчитать оценку каждой альтернативы относительно главной цели. Обосновать выбор конкретной альтернативы.

Пример – аналог задания №2 в лаб. раб. №1.

Шаг 1. Выбор темы: Покупка авто

Шаг 2. ЛПР: покупатель – мужчина 40 лет, с доходом порядка 200 тыс. руб. в месяц, имеет довольно престижную работу, семью из 4 человек, собаку, дачу, выбирает кроссовер или внедорожник класса Люкс.

Пример. Покупка авто

Шаг 3. Выбор критериев

Критерии:

- Экономический (Э)
 - стоимость покупки (СП)
 - стоимость содержания (страховка, ТО и бензин) (СС)
 - акции, скидки, льготные кредиты (А)
- Имиджевый (И)
 - комфортность салона (К)
 - внешний вид (В)
 - престиж марки(М)

Пример. Покупка авто

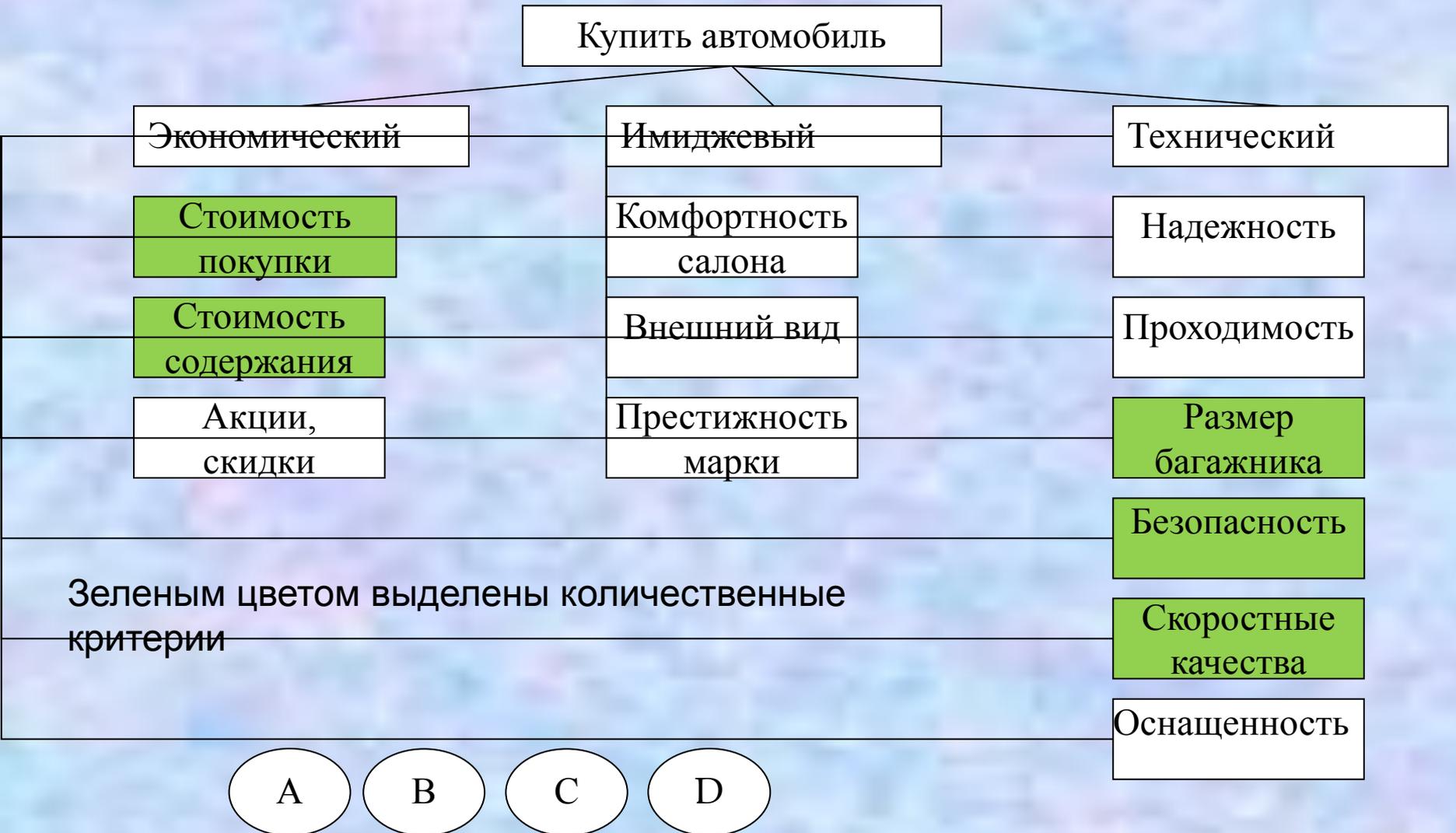
- Технический (Т)
 - надежность (Н)
 - проходимость (П)
 - размер багажника (РБ)
 - безопасность (Б)
 - скоростные качества (СК)
 - оснащенность (О)

Шаг 4. Выбор альтернатив:

- А – Volvo XC90,
- В- LandRover Discovery 4,
- С - Infiniti QX4,
- D - Chevrolet Tahoe

Пример. Покупка авто

Графическое отображение иерархии



Пример. Покупка авто

Шаг 5. Сравнение групп критериев между собой

Заполнение матриц парных сравнений

1 уровень иерархии:

	Экономический	Имиджевый	Технический
Экономический	1	1/3	1/5
Имиджевый	3	1	1/2
Технический	5	2	1

Пример. Покупка авто

Шаг 5. Сравнение критериев внутри своей группы

Заполнение матриц парных сравнений

2 уровень иерархии:

<i>Экономический</i>	стоимость покупки	стоимость содержания	акции, скидки, льготные кредиты
стоимость покупки	1	1/4	1/2
стоимость содержания	4	1	2
акции, скидки, льготные кредиты	2	0,5	1

<i>Имиджевый</i>	комфортность салона	внешний вид	престиж марки
комфортность салона	1	1/2	7
внешний вид	2	1	6
престиж марки	1/7	1/6	1

Пример. Покупка авто

Шаг 5. Сравнение критериев внутри своей группы

Заполнение матриц парных сравнений

2 уровень иерархии:

<i>Технический</i>	надежность	проходимость	размер багажника	безопасность	скоростные качества	оснащенность
надежность	1	1/2	1/5	1/2	1/4	2
проходимость	2	1	1/2	2	1/3	2
размер багажника	5	2	1	4	3	5
безопасность	2	1/2	1/4	1	1/3	2
скоростные качества	4	3	1/3	3	1	4
оснащенность	1/2	1/2	1/5	1/2	1/4	1

Пример. Покупка авто

Шаг 5. Расчет весов групп критериев

Расчет весов (способ №4)

1 уровень иерархии:

	X	w	M*w	L*w	Lmax	ИС	ОС
Экономический	0,405	0,109	0,329	3,004	3,004	0,002	0,3%
Имиджевый	1,145	0,309	0,928	3,004			
Технический	2,154	0,582	1,747	3,004			

Пример. Покупка авто

Шаг 5. Расчет весов критериев внутри группы

Расчет весов (способ №4)

2 уровень иерархии:

<i>Экономический</i>	X	w	M*w	L*w	Lmax	ИС	ОС
стоимость покупки	0,500	0,143	0,429	3,000	3,000	0,000	0,0%
стоимость содержания	2,000	0,571	1,714	3,000			
акции, скидки, льготные кредиты	1,000	0,286	0,857	3,000			

Пример. Покупка авто

Шаг 5. Расчет весов критериев внутри группы

Расчет весов (способ №4)

2 уровень иерархии:

<i>Имиджевый</i>	X	w	M*w	L*w	Lmax	ИС	ОС
комфортность салона	1,518	0,371	1,142	3,080	3,080	0,040	6,9%
внешний вид	2,289	0,559	1,722	3,080			
престиж марки	0,288	0,070	0,216	3,080			

Пример. Покупка авто

Шаг 5. Расчет весов критериев внутри группы

Расчет весов (способ №4)

2 уровень иерархии:

<i>Технический</i>	X	w	M*w	L*w	Lmax	ИС	ОС
надежность	0,541	0,071	0,443	6,199	6,256	0,051	4,1%
проходимость	1,049	0,139	0,866	6,253			
размер багажника	2,904	0,384	2,448	6,383			
безопасность	0,742	0,098	0,603	6,157			
скоростные качества	1,906	0,252	1,602	6,361			
оснащенность	0,429	0,057	0,350	6,180			

Пример. Покупка авто

Шаг 5. Корректировка суждений

Пересмотр суждений

Не требуется, т.к. все матрицы парных сравнений являются согласованными, ОС < 10%

Шаг 5. Оценка согласованности всей иерархии

	w	ИС	w*ИС	СС	w*СС
Экономический	0,109	0,000	0,000	0,580	0,063
Имиджевый	0,309	0,040	0,012	0,580	0,179
Технический	0,582	0,051	0,030	1,240	0,721

$$M = 0,044$$

$$\sim M = 1,544$$

$$\text{ОСИ} = 2,85\%$$

Итого: относительная согласованность всей иерархии 2,85%.

Пример. Покупка авто

Шаг 5. Расчет весов всех критериев относительно цели

Синтез иерархии

Необходимо свести вес критерия каждого уровня к первому уровню иерархии, т.е. вес критерия в общей структуре (иерархии).

Для этого необходимо перемножить вес критерия в группе (кот. он имеет на своем уровне) на вес самой группы (т.е. на уровень выше) и т.д. пока не достигнется первый уровень иерархии.

Итоговая сумма весов по всем критериям должна равняться единице!

Пример. Покупка авто

Шаг 5. Расчет весов всех критериев относительно цели

группа	w группы	Критерий	w критерия	до 1 уровня
Экономический	0,109	стоимость покупки	0,143	0,016
		стоимость содержания	0,571	0,063
		акции, скидки, льготные кредиты	0,286	0,031
Имиджевый	0,309	комфортность салона	0,371	0,115
		внешний вид	0,559	0,173
		престиж марки	0,070	0,022
Технический	0,582	надежность	0,071	0,042
		проходимость	0,139	0,081
		размер багажника	0,384	0,223
		безопасность	0,098	0,057
		скоростные качества	0,252	0,146
		оснащенность	0,057	0,033
				1,000

Пример. Покупка авто

Шаг 6. Сбор и обработка данных для количественных критериев

Авто	Volvo XC90	LandRover Discovery 4	Infiniti QX4	Chevrolet Tahoe
Стоимость (т.р.)	2196	2847	2354	2302
Оценка альтернативы (=стоимость / сумму всех стоимостей 9699тр) подходит, если критерий оценивается по принципу «чем больше тем лучше»	0,226	0,294	0,243	0,237
Обратные величины (нужно считать, если наоборот, чем больше значение критерия тем хуже эта альтернатива для ЛПР)	4,417	3,40	4,12	4,21
Оценка альтернативы нормированная подходит, если критерий оценивается по принципу «чем меньше тем лучше»	0,274	0,211	0,255	0,261

Пример. Покупка авто

Шаг 7. Сбор и обработка данных для качественных критериев

Тут должны быть матрицы (столько штук, сколько в работе качественных критериев) формата (кол-во альтернатив* кол-во альтернатив) для сравнения альтернатив по каждому из качественных критериев.

Шаг 8. Синтез – оценка альтернатив относительно цели.

Ответом должен быть вектор весов АЛЬТЕРНАТИВ относительно самого верхнего уровня иерархии (цели). Каждый элемент вектора рассчитывается исходя из полученных на шагах 6-7 значений оценки альтернатив по каждому из критериев и весов критериев, полученных на шаге 5.

Решение задачи выбора – выбор альтернативы с максимальным итоговым значением.