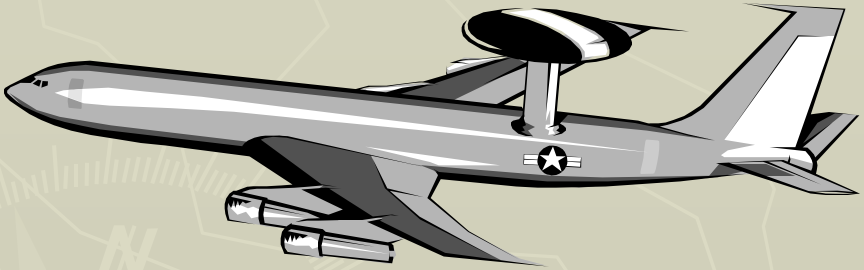
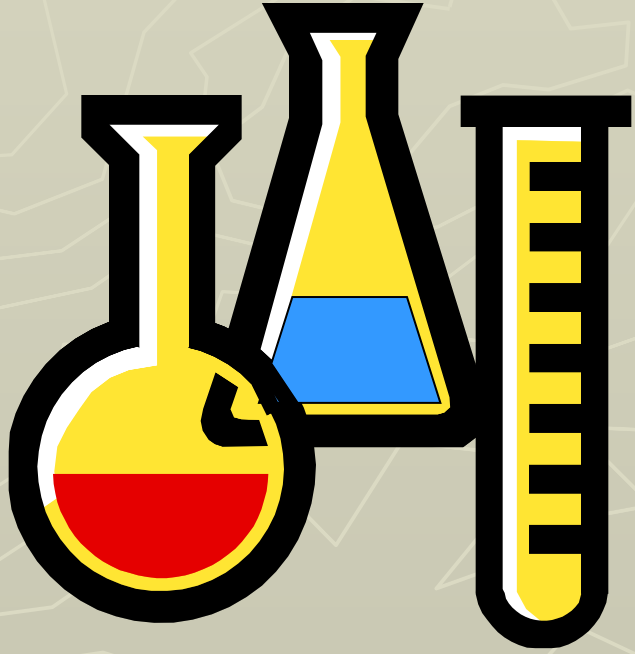
Задачи, приводящие к понятию производной.

Пашина Ирина Анатольевна, учитель математики МБОУСОШ № 50 г. Воронежа





Постановка проблемы

Вначале было слово.

- К понятию производной можно прийти, рассматривая, например, такое широко используемое в физике понятие, как мгновенная скорость неравномерно движущегося тела.

- Мы познакомились с этим понятием, изучая в курсе физики раздел кинематики, а точнее кинематики прямолинейного неравномерного движения.

- Совершенно верно. Как же Вы представляете себе мгновенную скорость? Что это такое?

- Мгновенной скоростью тела называют скорость, которую оно имеет в данный момент времени (в данной точке траектории)

- А как Вы представляете себе мгновенную скорость?

- Так и представляю… Если тело движется равномерно, то в разные моменты времени его скорость одинакова. Если тело движется неравномерно (ускоряясь или замедляясь, то в разные моменты времени его скорость будет, вообще говоря, различной

- Разве Вы не чувствуете, что фраза «скорость в данный момент времени» не более как синоним фразы «мгновенная скорость»? Как говорится, «что в лоб, что по лбу». Термин «скорость в данный момент времени нуждается в разъяснении в той же мере, в какой нуждается в нём термин «мгновенная скорость».

- Физик эту проблему решает просто. У него есть приборы, например, спидометр. А математик создаст математическую модель процесса.

Итак, проблема поставлена. Приступим к её решению.

Остановись мгновенье –

мы тебя исследуем !

Сначала мы определили «территорию» своих исследований. В каких ещё науках математика поможет решить подобную проблему.

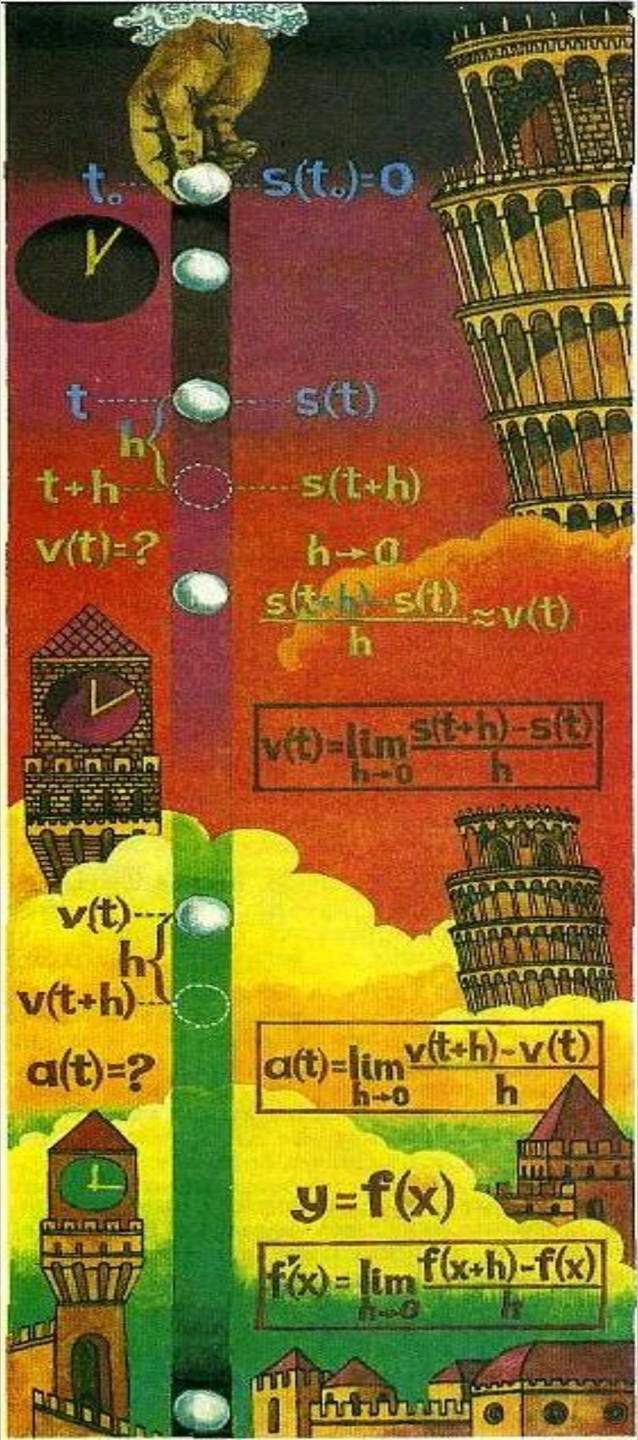
Оказалось, что связь между количественными характеристиками самых различных процессов, исследуемых физикой, химией, биологией, экономикой, техническими науками, аналогична связи между путём и скоростью.

Основным математическим понятием, выражающим эту связь является производная.

Производная

Центральные понятия дифференциального исчисления – производная и дифференциал возникли при рассмотрении большого числа задач естествознания и математики, приводивших к вычислению пределов одного и того же типа. Важнейшие среди них – физическая задача определения скорости неравномерного движения и геометрическая задача построения касательной к кривой.

Рассмотрим подробно каждую из них.



Будем вслед за итальянским учёным Г.Галилеем изучать закон свободного падения тел. Поднимем камешек и затем из состояния покоя отпустим его. Движение свободно падающего тела явно неравномерное. Скорость *v* постепенно возрастает. Но как именно выглядит зависимость *v(t)* ?

Фиксируем момент t, в который мы хотим знать значение скорости $v(t)$. Пусть h – небольшой промежуток времени, прошедший от момента t. За это время падающее тело пройдёт путь, равный $s(t+h)-s(t)$.

Если промежуток времени h очень мал, то приближённо $s(t+h)-s(t)\approx v(t)\cdot h$, или $\dfrac{s(t+h)-s(t)}{h}\approx v(t)$, причём последнее приближённое равенство тем точнее, чем меньше h.

Значит величину $v(t)$ скорости в момент t можно рассматривать как ***предел***, к которому стремится отношение, выражающее среднюю скорость на интервале времени от момента t до момента $t+h$.

Сказанное записывают в виде

$$v(t)=\lim_{h\to 0}\frac{s(t+h)-s(t)}{h}$$

Задача о мгновенной скорости

- **Предел средней скорости за промежуток времени от t_0 до t при $t \to t_0$, называется *мгновенной скоростью $v(t_0)$ в момент времени t_0***

$$v(t_0) = \lim_{t\to t_0} v_{cp}(t_0;t) = \lim_{t\to t_0}\frac{S(t)-S(t_0)}{t-t_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

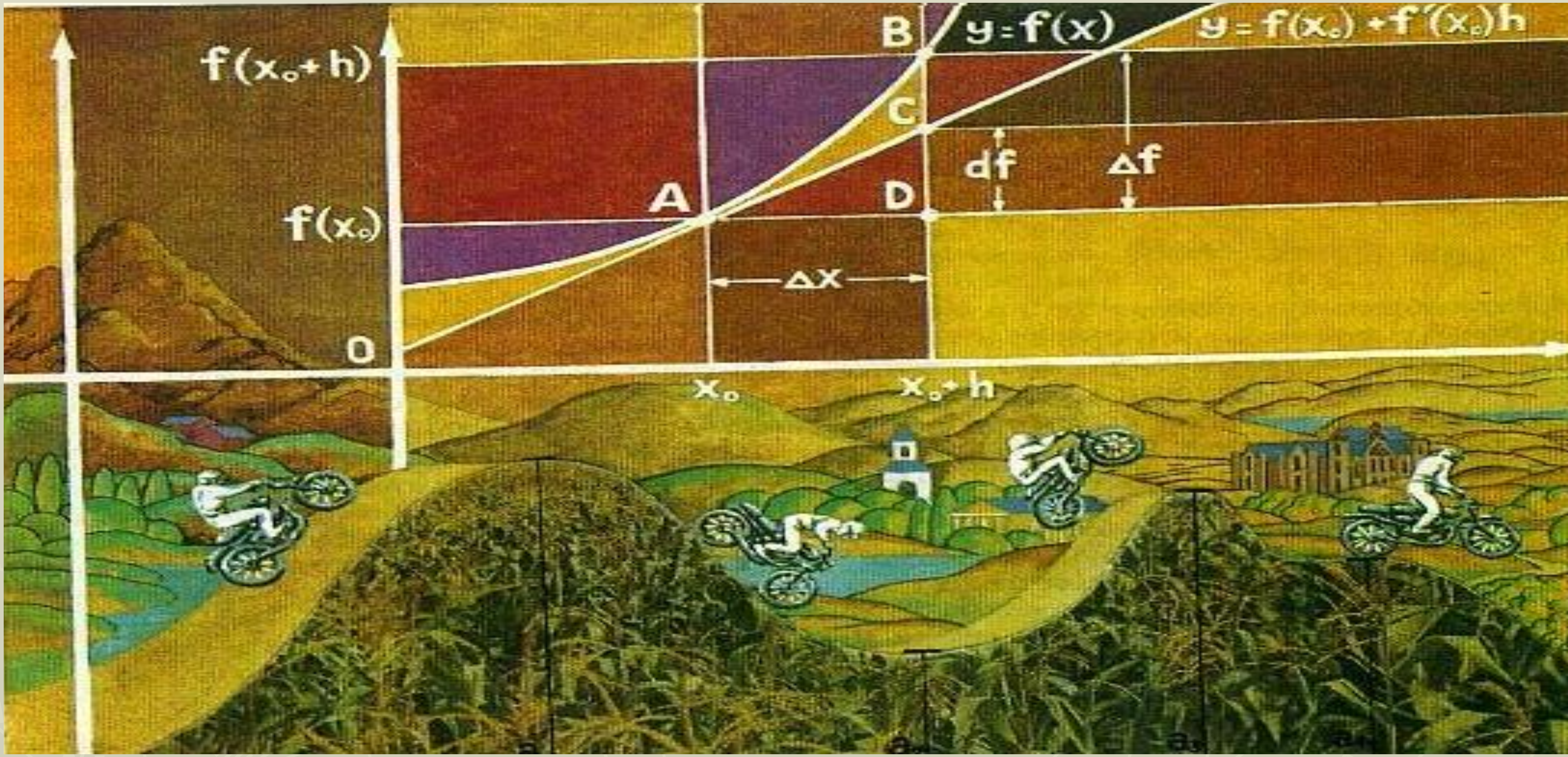
А л г о р и т м

1) $\Delta t = t - t_0$ $\Delta x = x - x_0$

2) $\Delta v = v(t+t_0) - v(t_0)$ $\Delta f = f(x+x_0) - f(x_0)$

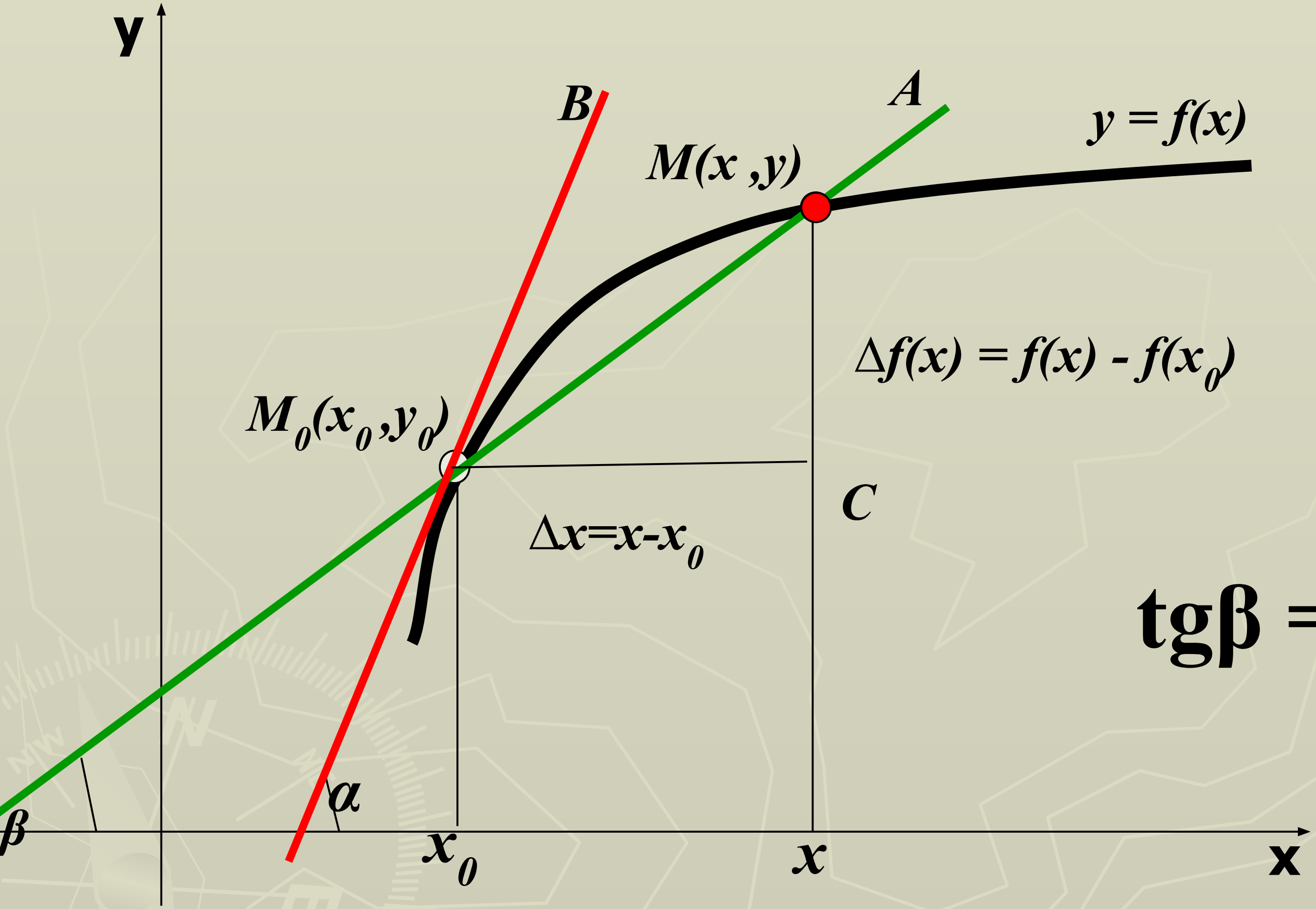
3) $$\frac{\Delta \dot{v}}{\Delta t} = \frac{v(t_0 + \Delta t) - v(t_0)}{t - t_0}$$ $$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

4) $$\dot{v}(t_0) = S' = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$$ $$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$



Рассмотрим теперь другой классический пример, который решается в терминах производной, - построение касательной к кривой. Требуется построить прямую T, касательную в т. A к кривой – графику функции $y = f(x)$.

Задача о касательной к графику функции



$$\mathbf{tg}\beta = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

При x→x$_0$ $\lim\limits_{x \to x_0} tg\beta = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

А л г о р и т м

1) $\Delta x = x - x_0$

2) $\Delta f = f(x+x_0) - f(x_0)$

3)

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

4)

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

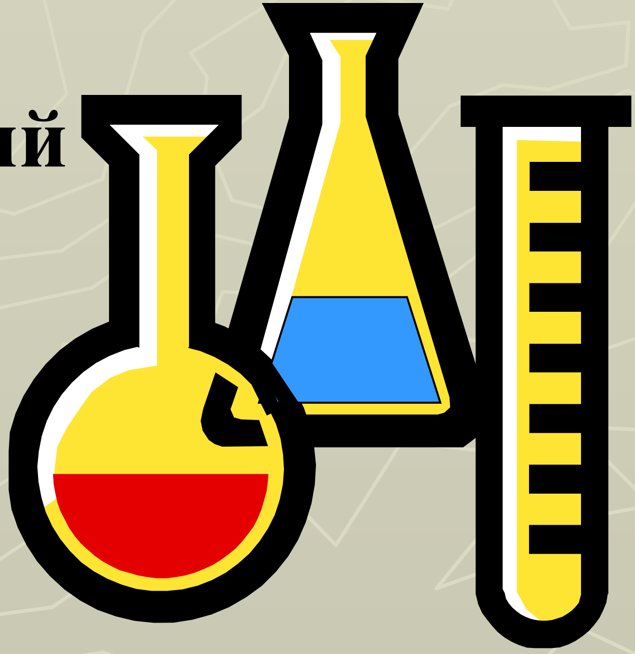
Задача о скорости химической реакции

Средняя скорость растворения соли в воде за промежуток времени [t_0;t_1] (масса соли, растворившейся в воде изменяется по закону x = f(t)) определяется по формуле .

$$v_{cp} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{f(t_1) - f(t_0)}{t_1 - t_0}$$

Скорость растворения в данный момент времени

$$v(t_0) = f'(t_0)$$



А л г о р и т м

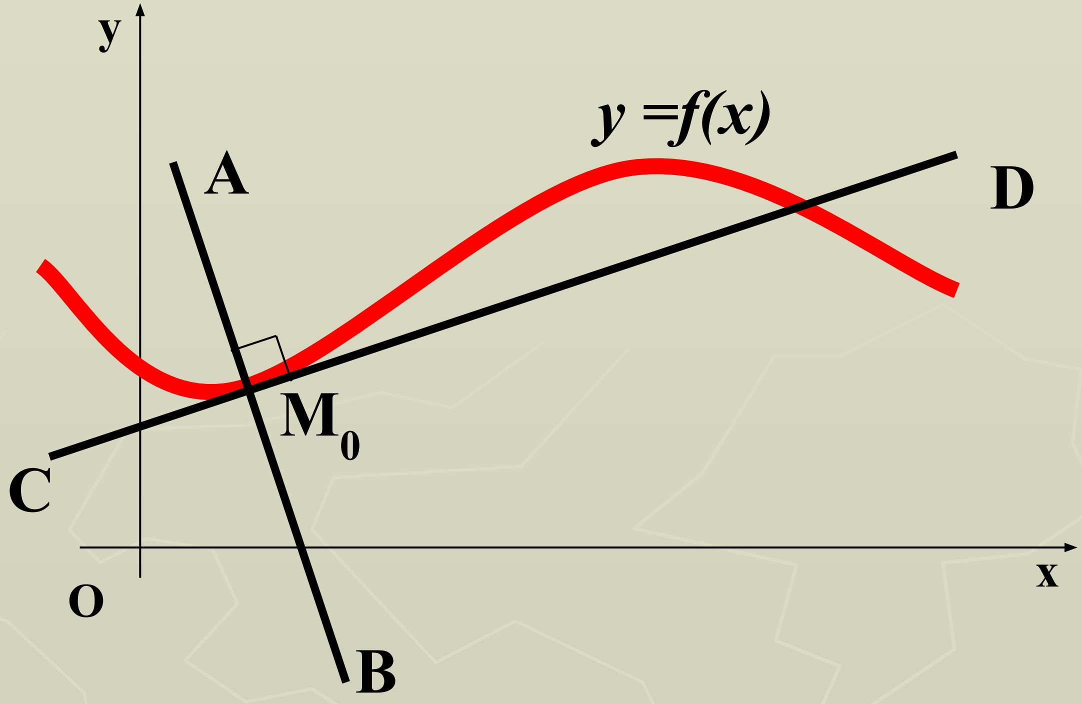
1) $\Delta t = t - t_0$ $\Delta x = x - x_0$

2) $\Delta f = f(t_1) - f(t_0)$ $\Delta f = f(x) - f(x_0)$

3) $$\frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f(t_1) - f(t_0)}{t - t_0}$$ $$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x - x_0}$$

4) $$v(t_0) = f'(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta t}$$ $$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

1

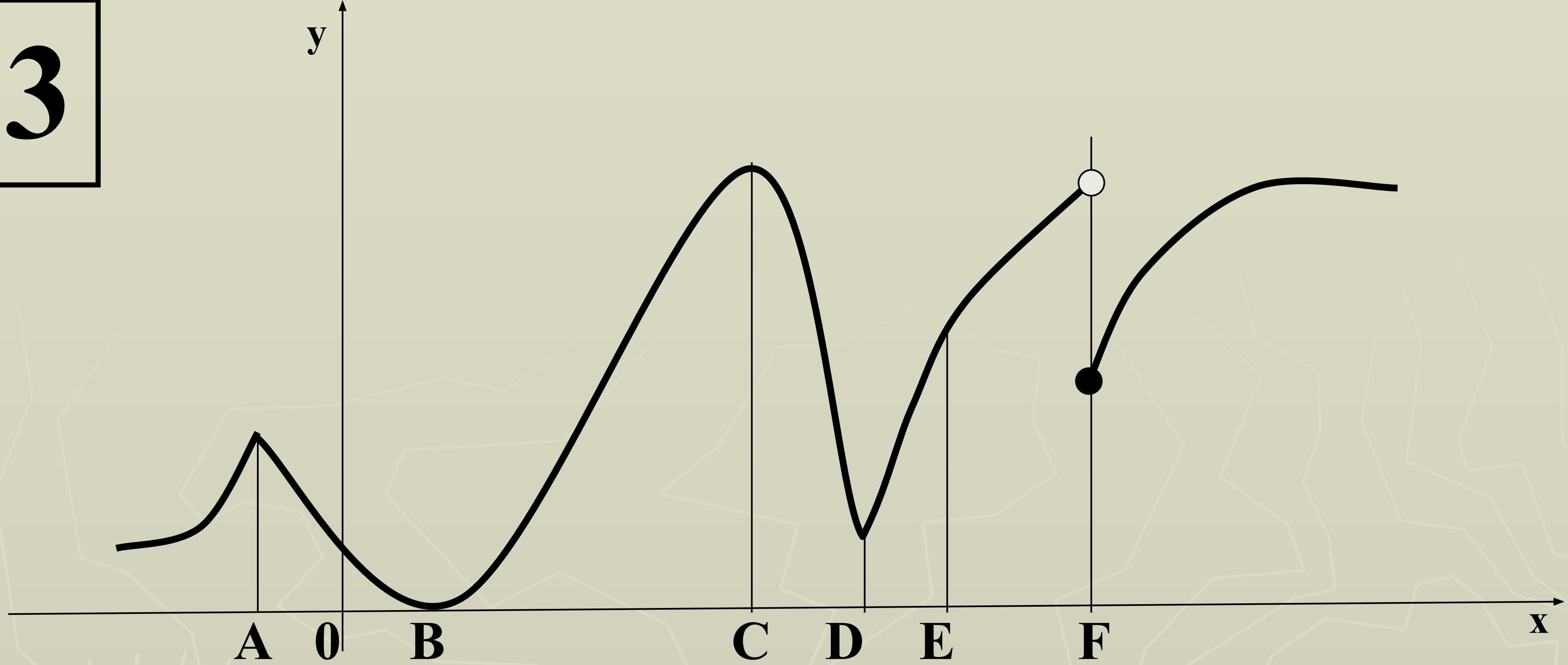


Какая из прямых - AB или CD - касается кривой в точке M_0 ?

2

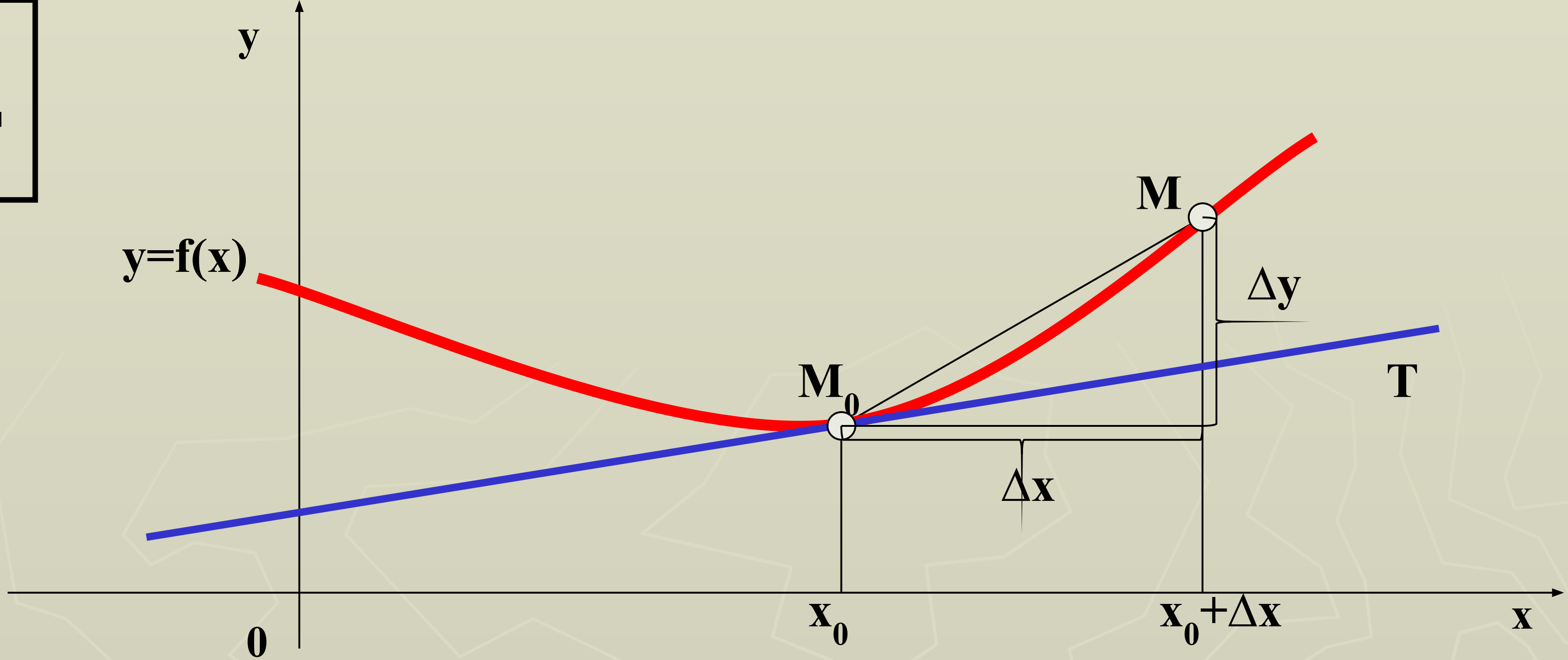
Следует ли считать понятия «прямая касается кривой» и «прямая пересекает кривую» взаимоисключающими ?

3



Определите точки, в которых касательная существует, и точки, в которых касательная существует

4



Убедитесь, что угловой коэффициент касательной к графику функции y = f(x) можно определить по формуле

$$k_{M_0T} = \lim_{\Delta x \to 0} k_{M_0M} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

5

- **Найдите угловой коэффициент касательной к параболе $y = x^2$:**
- **а) в точке (1;1);**
- **б) в точке (x_0 ; x_0^2).**
- **Используя полученный результат, найдите способ построения касательной в любой точке параболы.**

6

- **Найдите угловой коэффициент касательной к кривой $y = x^3$ в точках $(x_0;\ x_0^3)$; (1 ; 1); (0 ; 0).**
- **Как построить касательную к кривой $y = x^3$ в любой её точке ? Какая прямая является касательной в токе (0 ; 0) ?**