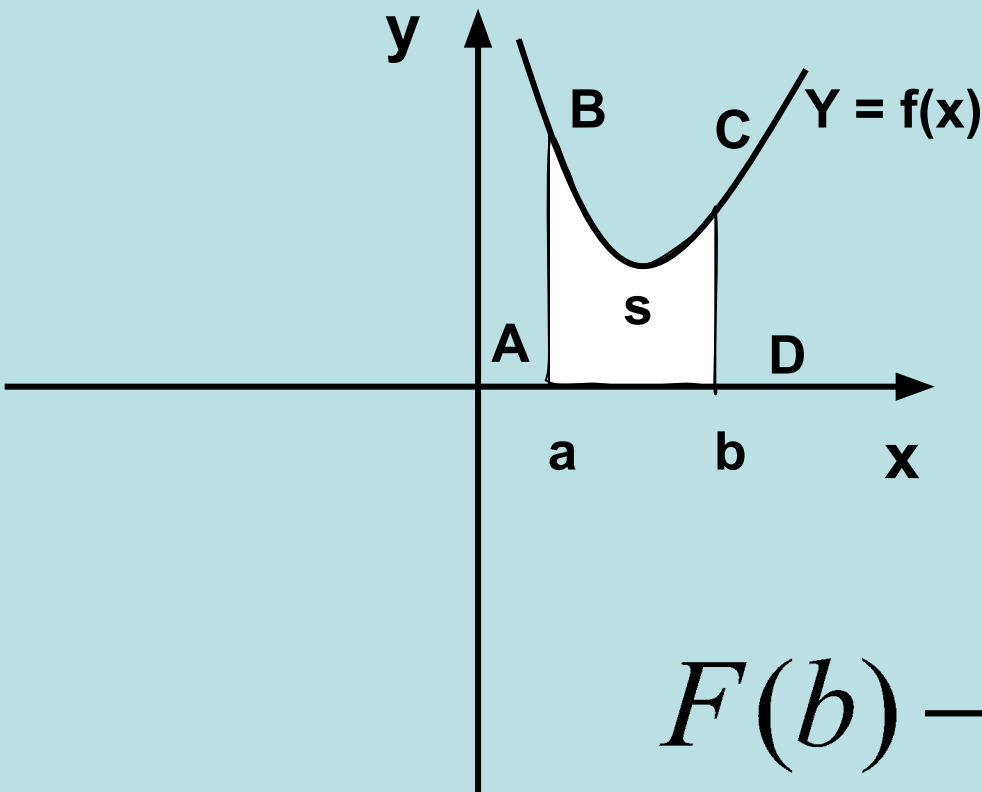


площадь криволинейной трапеции

# Площадь криволинейной трапеции

*ABCD – криволинейная трапеция*

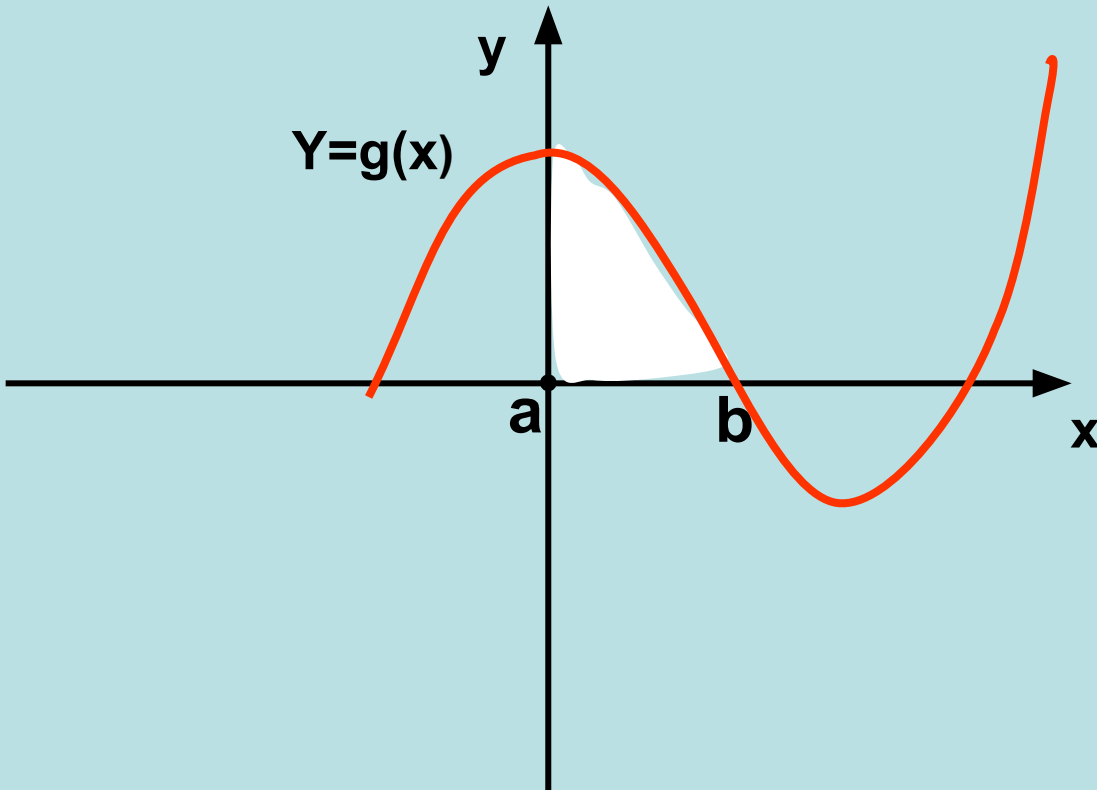


$$S = F(b) - F(a)$$

$$F'(x) = f(x)$$

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx$$

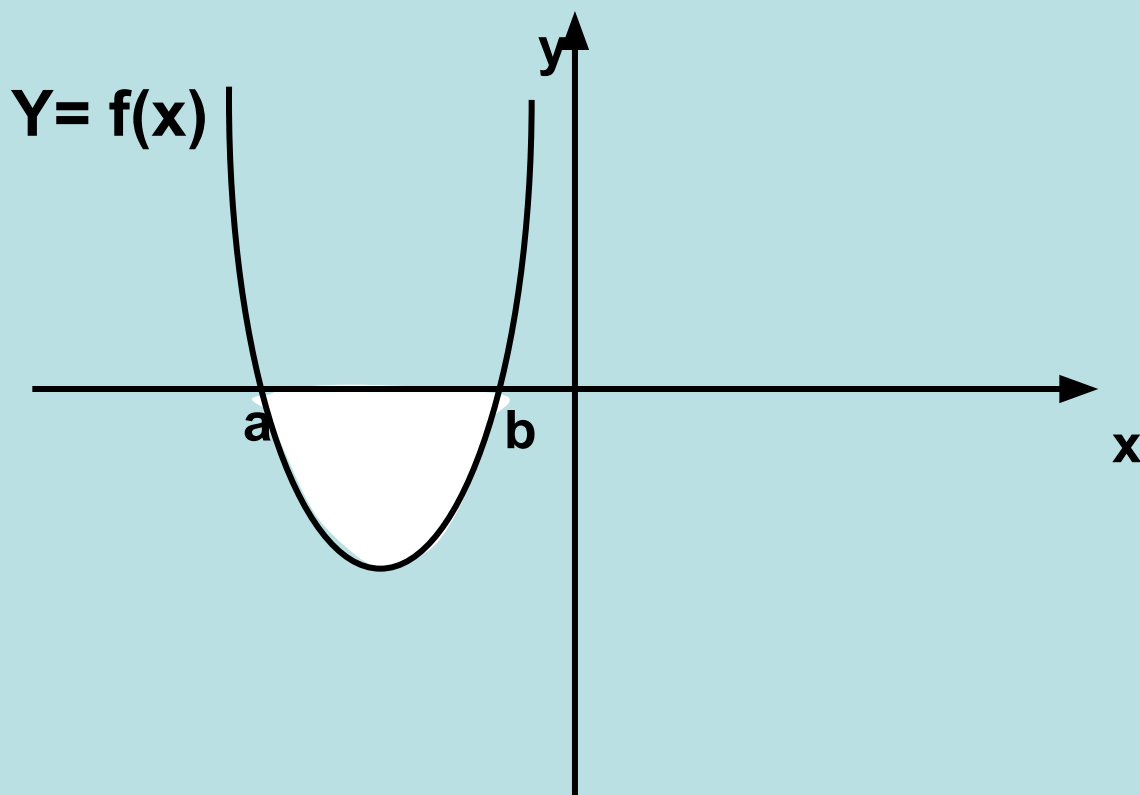
Записать формулу для вычисления площади  
криволинейной трапеции



a)  $S = F(b) - F(a)$

b)  $S = \int_a^b f(x) dx$

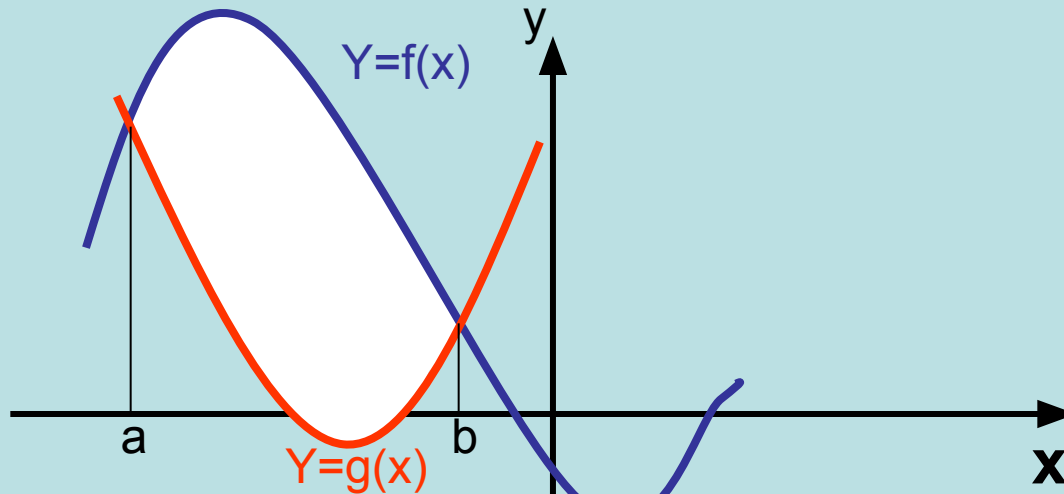
Записать формулу для вычисления площади криволинейной трапеции



a)  $S = - (F(b) - F(a))$

b)  $S = \int_a^b (-f(x)) dx$

Записать формулу для вычисления площади криволинейной трапеции



$$a) S = S_1 - S_2$$

$$S_1 = F(b) - F(a)$$

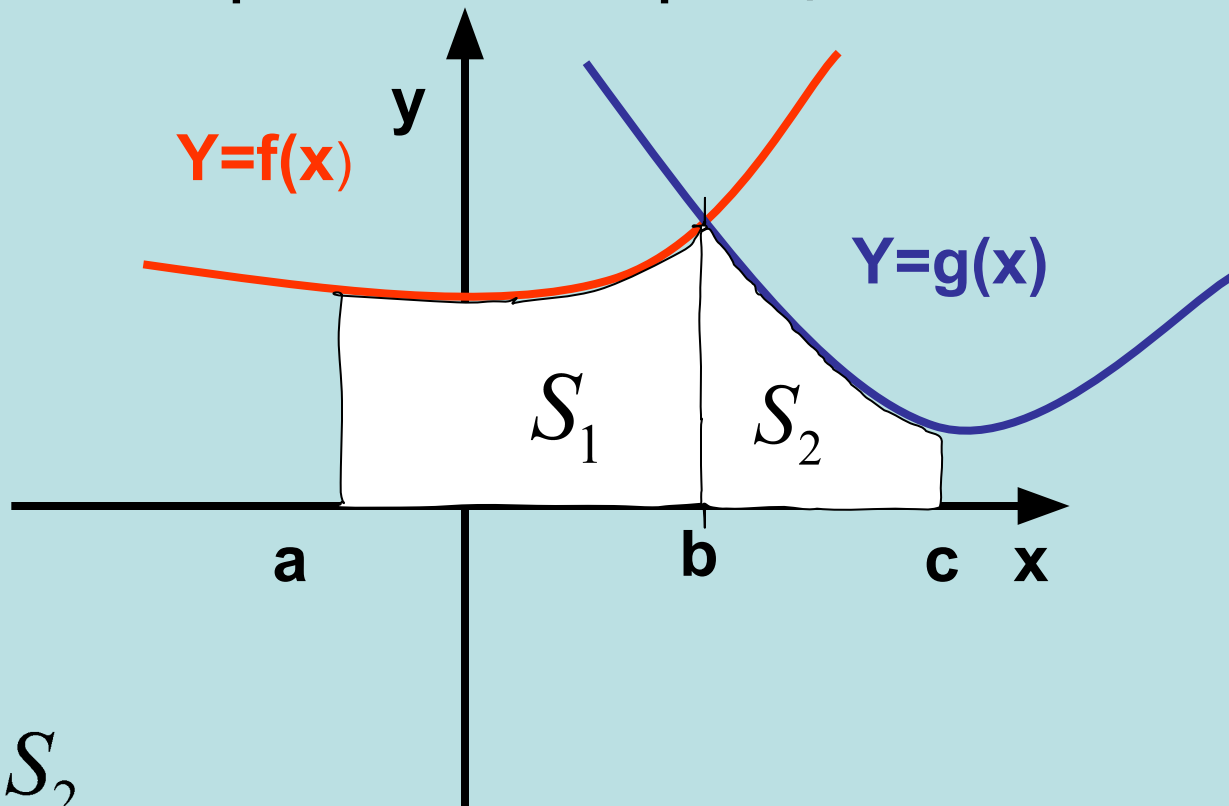
$$S_2 = G(b) - G(a)$$

$$F'(x) = f(x)$$

$$G'(x) = g(x)$$

$$b) S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

Записать формулу для вычисления площади криволинейной трапеции



$$S = S_1 + S_2$$

$$S_1 = F(b) - F(a)$$

$$S_2 = G(c) - G(b)$$

$$S = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c g(x)dx$$

Найти площадь фигуры, ограниченной заданными

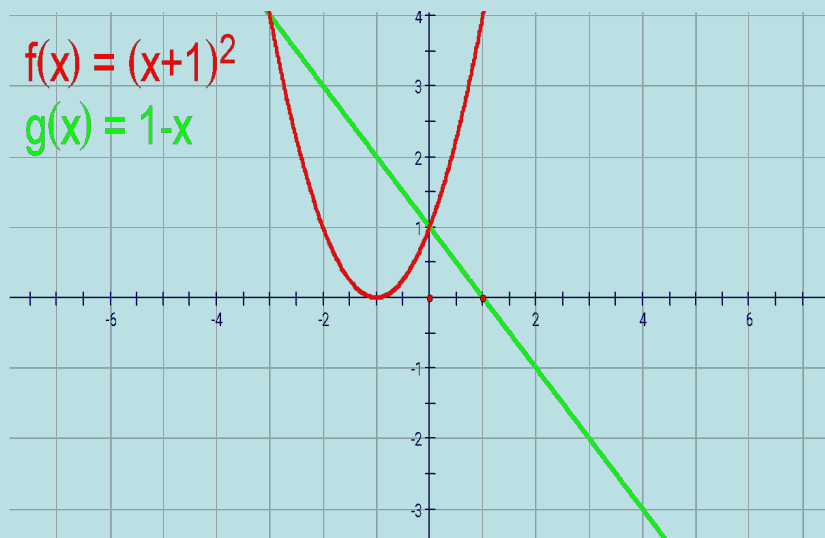
ЛИНИЯМИ

1)

$$y = (x+1)^2$$

$$y = 1-x$$

Решение:



$$S = S_2 + S_1$$

$$S_1 = F(0) - F(-1)$$

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 + x$$

$$F(0) = 0$$

$$F(-3) = -9 + 9 - 3 = -3$$

$$S_1 = 3$$

$$S = \frac{15}{2} - 3 = \frac{9}{2}$$

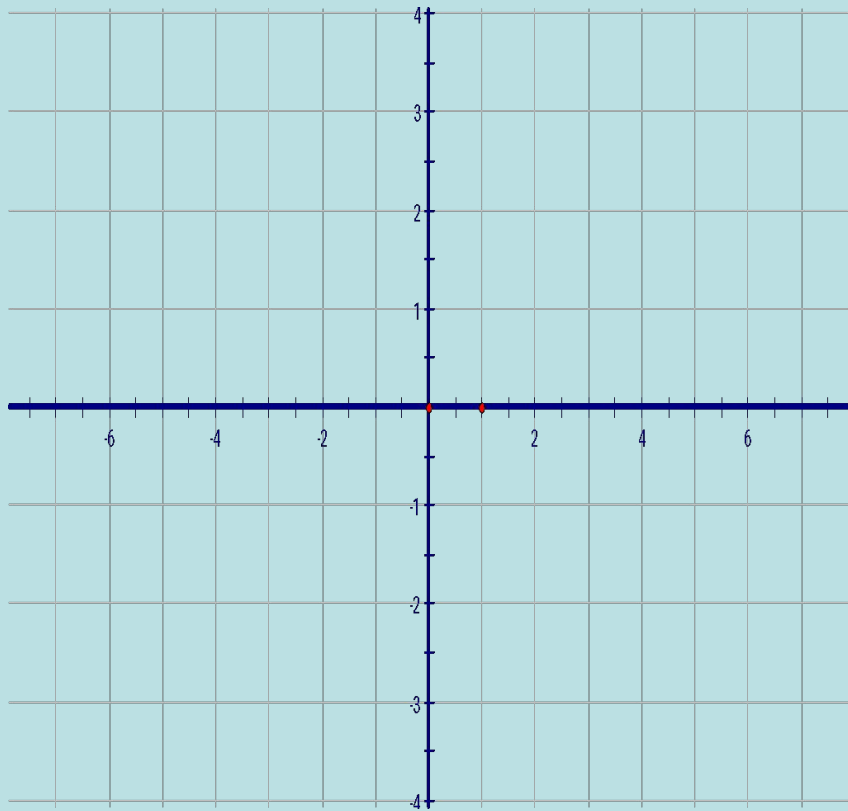
$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 3 = \frac{15}{2}$$

$$2) \quad y = \sqrt{x}$$

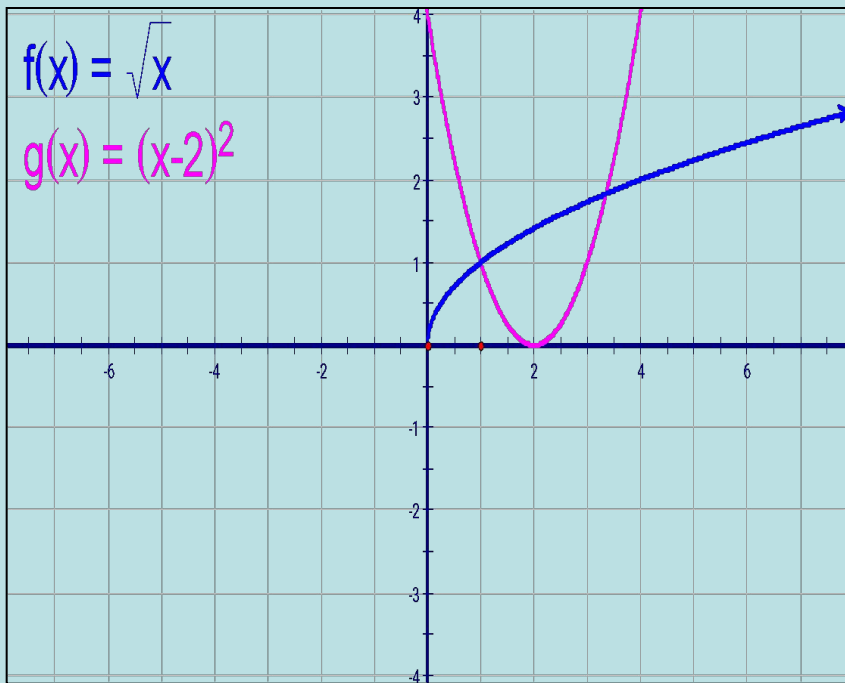
$$y = (x - 2)^2$$

$Ox$

Решение:







Решение

$$\sqrt{x} = (x - 2)^2$$

$$x = 1$$

$$S = \int_0^1 \sqrt{x} dx + \int_1^2 (x - 2)^2 dx =$$

$$\left( \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_0^1 + \left( \frac{x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} + 4x \right) \Big|_1^2 = \frac{2}{3} + \frac{8}{3} - 2 \cdot 4 + 8 - \frac{1}{3} + 2 - 4 =$$

$$= 3 - 2 = 1$$

3) Найти площадь фигуры, ограниченной гиперболой  $y = \frac{4}{x}$   
касательной к ней, проходящей через точку с абсциссой  $x=2$ ,  
и прямыми  $y=0$ ,  $x=6$ .



1) способ:

$$S = \int_2^4 \left( \frac{4}{x} - (4 - x) \right) dx + \int_4^6 \frac{4}{x} dx =$$

$$\left( 4 \ln x - 4x + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_2^4 + 4 \ln x \Big|_4^6 =$$

$$= 4 \ln 4 - 16 + 8 - 4 \ln 2 + 8 - 2 + 4 \ln 6 - 4 \ln 4 =$$
$$-2 + 4(\ln 6 - \ln 2) = 4 \ln 3 - 2$$

2 способ

$$S_1 = \int_2^4 \frac{4}{x} dx = 4 \ln x \Big|_2^4 = 4 \ln 4 - 4 \ln 2 = 4 \ln 2$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2$$

$$S = S_1 - S_2 = 4 \ln 2 - 2$$

3 способ

$$1. \quad S = S_1 - S_2$$

$$S_1 = F(6) - F(2)$$

$$F(x) = 4 \ln|x|$$

$$F(6) = 4 \ln 6$$

$$F(2) = 4 \ln 2$$

$$S_1 = 4 \ln 3$$

2.

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2$$

$$S = 4 \ln 3 - 2$$

4) Используя геометрические соображения, вычислить интеграл:

$$a) \int_0^4 \sqrt{4x - x^2} dx$$

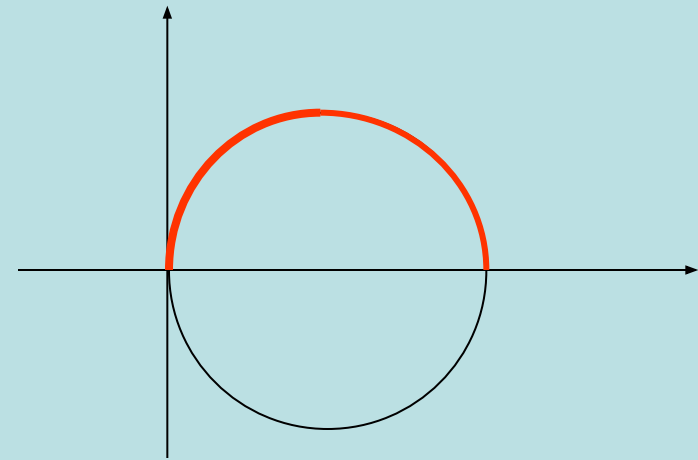
$$б) \int_{-1}^0 \sqrt{-x^2 - 2x} dx$$

Решение. а) Имеем:

$$y = \sqrt{4x - x^2};$$

$$y^2 = 4x - x^2;$$

$$(x - 2)^2 + y^2 = 2^2$$



Это уравнение окружности радиуса  $r=2$  с центром в точке  $(2;0)$ .

Значит, заданным интегралом выражается площадь половины круга.

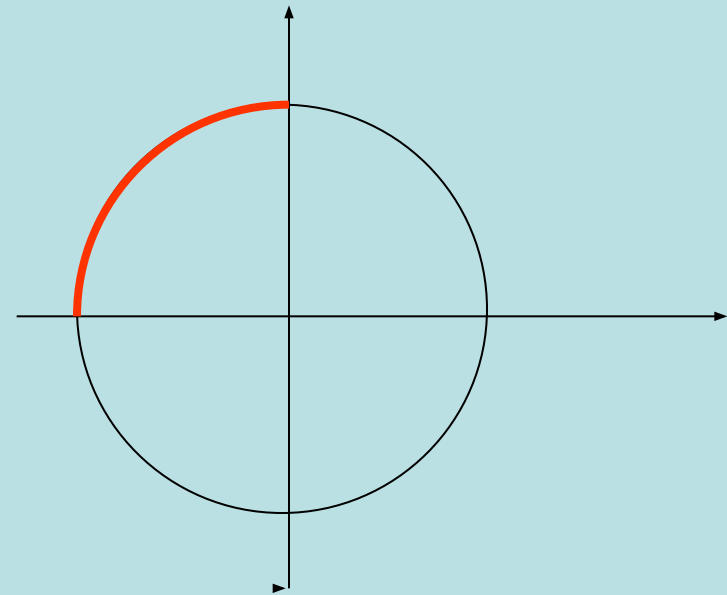
$$S = 0,5\pi r^2 = 0,5\pi \cdot 4 = 2\pi$$

б) Имеем:

$$y = \sqrt{-x^2 - 2x};$$

$$(x + 1)^2 + y^2 = 1^2.$$

$$S = 0,25 \cdot \pi \cdot r^2 = 0,25 \cdot \pi \cdot 1 = 0,25 \cdot \pi$$



5) Вычислить интеграл:

$$a) \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{4 - x^2} dx$$

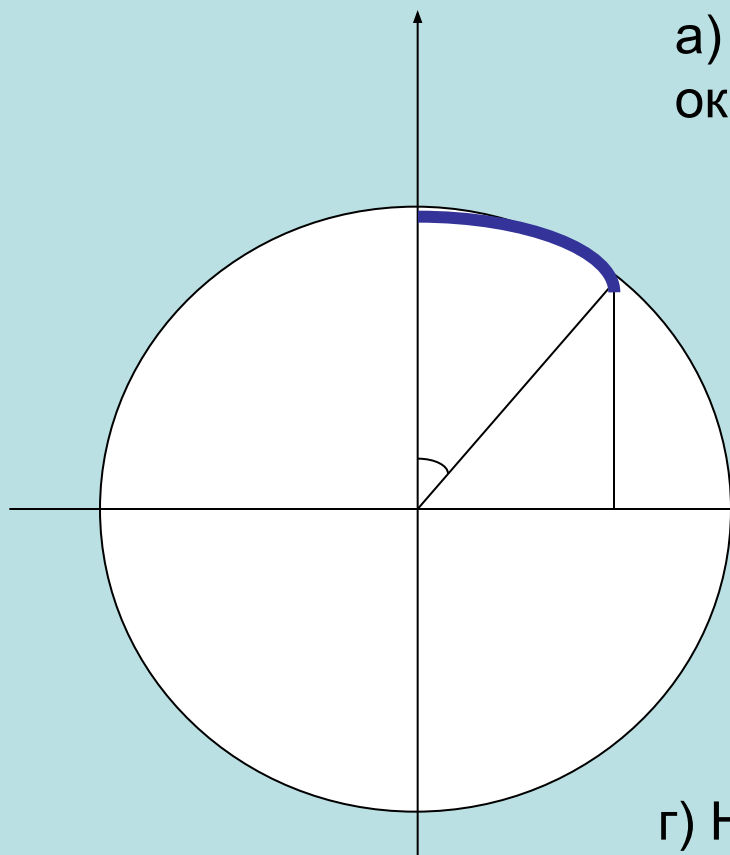
$$б) \int_{-4}^4 \sqrt{64 - x^2} dx$$

$$в) \int_0^5 |x - 1| dx$$



а) Фигура, площадь которой выражается заданным интегралом, состоит из сектора круга радиусом 2 и центральным углом  $45^\circ$  и прямоугольного равнобедренного треугольника с катетом

Решение:



а) Уравнение  
окружности:

$$y = \sqrt{4 - x^2}$$

$$y^2 + x^2 = 4$$

б) Найдем площадь  
сектора:

$$S = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot 45^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi \cdot 4}{8} = \frac{\pi}{2}$$

в) Найдем площадь  
треугольника:

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 1$$

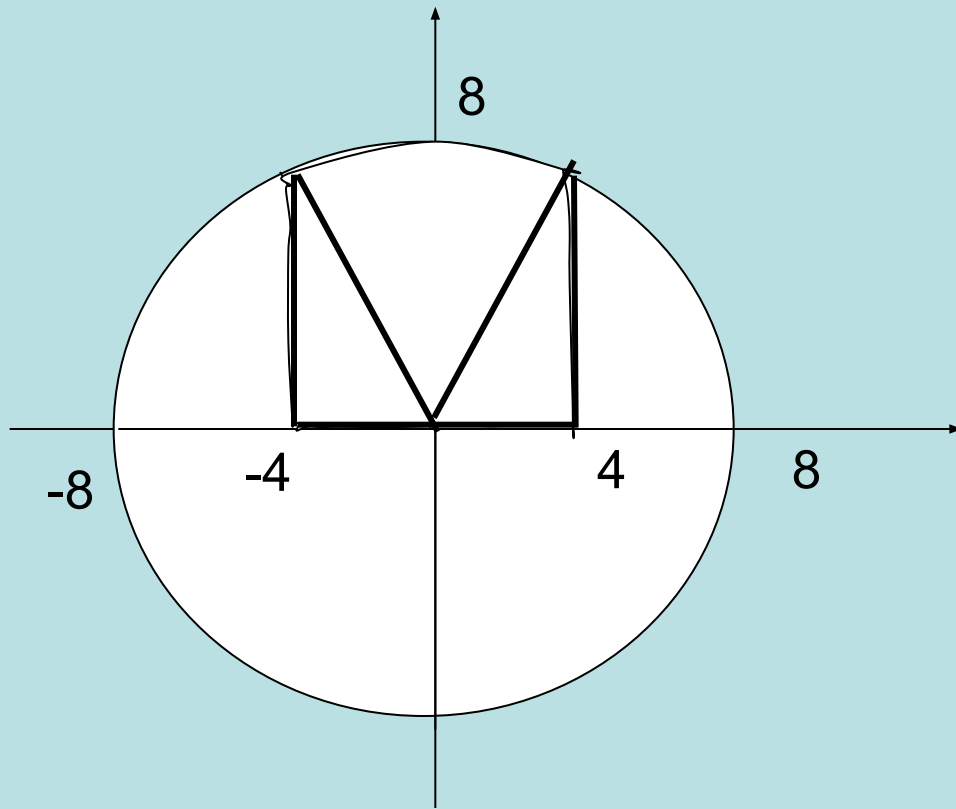
г) Найдем площадь, заданной  
фигуры:

$$S = S_1 + S_2 = \frac{\pi}{2} + 1$$

б)

Площадь, заданной фигуры можно найти как сумму площади сектора и двух прямоугольных треугольников.

Решение:



$$y = \sqrt{64 - x^2}$$

$$y^2 + x^2 = 64$$

$$S_1 = \frac{\pi \cdot 64 \cdot 60^\circ}{360^\circ} = \frac{32 \cdot \pi}{3}$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4\sqrt{2} \cdot 2 = 16\sqrt{2}$$

$$S = \frac{32 \cdot \pi}{3} + 16\sqrt{2}$$

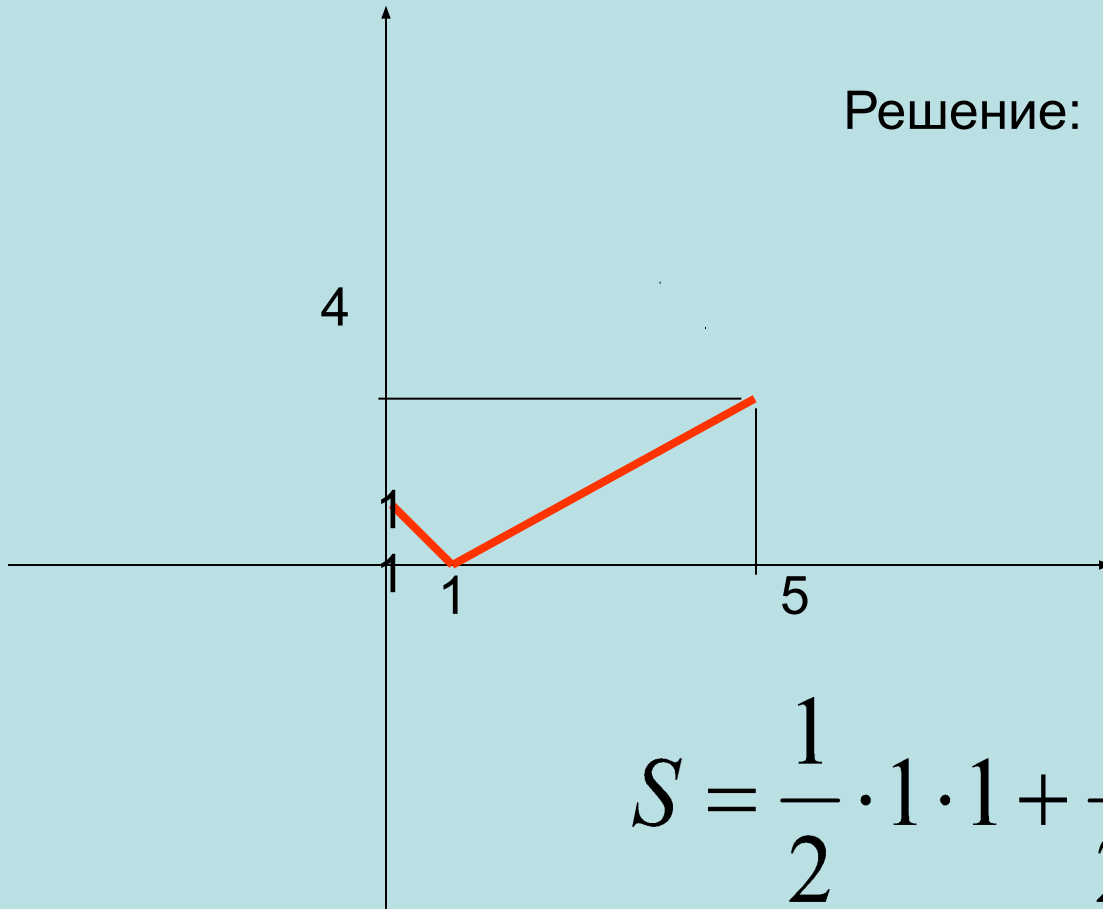
Ответ:

$$S = \frac{32\pi}{3} + 16\sqrt{2}$$

Г)

Площадь, заданной фигуры можно найти как  
сумму  
площадей двух прямоугольных треугольников.

Решение:



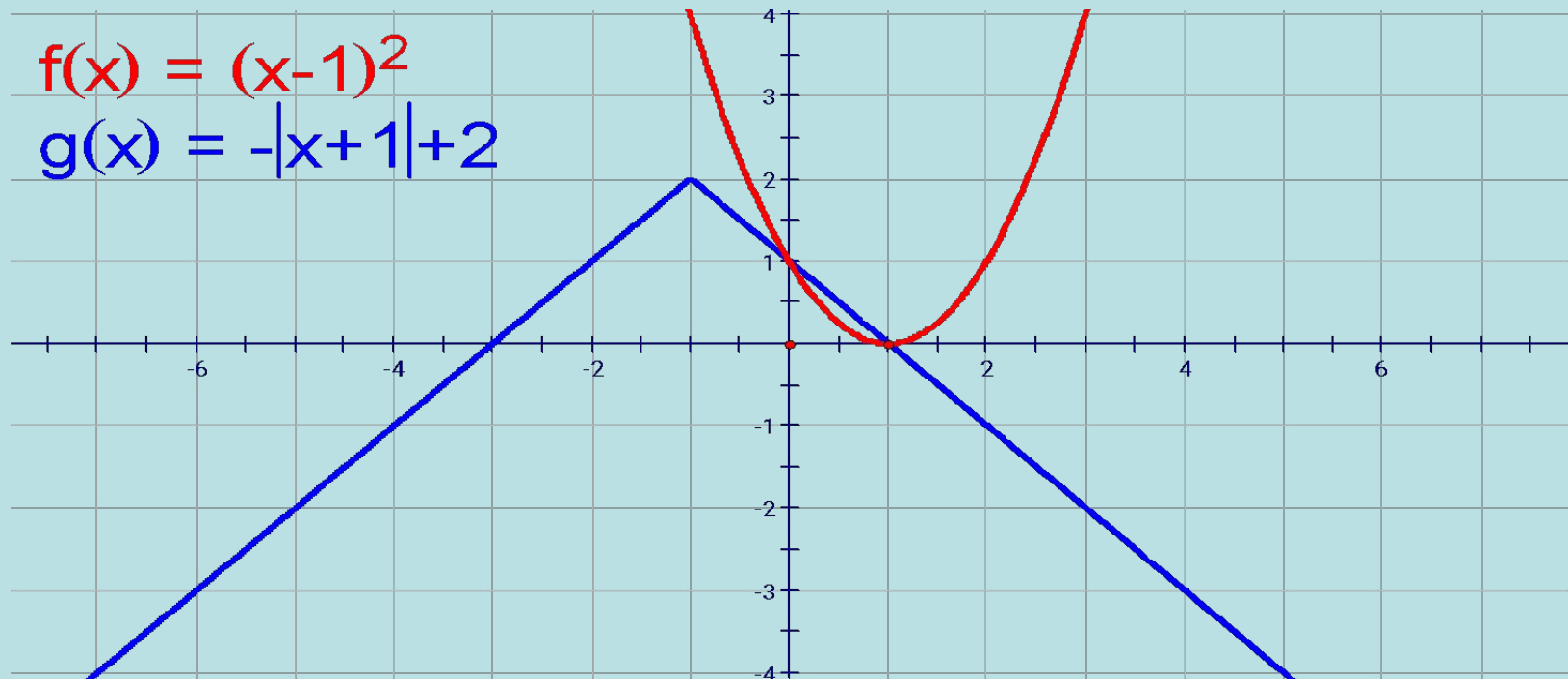
$$S = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8,5$$

Ответ: 8,5

6) Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций:

$$a) y = (x - 1)^2$$

$$y = -|x + 1| + 2$$



Решение:

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \int_0^1 (x-1)^2 dx = \left( \frac{x^3}{3} - 2 \cdot \frac{x^2}{2} + x \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3} - 1 + 1 = \frac{1}{3}$$

$$S = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

- 7) Найти площадь фигуры, ограниченной графиком функции и касательной к нему в точке  $x=3$

$$y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$$

Заданная функция имеет точку максимума  $(1;5)$  и точку минимума  $(3;1)$ . Построим график этой функции. Касательная к нему в точке  $x=3$  параллельна оси абсцисс и имеет с графиком еще одну общую точку  $(0;1)$ .

$$f(x) = (x^3 - 6x^2) + 9x + 1$$

$$g(x) = 1$$



$$S = \int_0^3 ((x^3 - 6x^2 + 9x + 1) - 1) dx = \frac{27}{4}$$