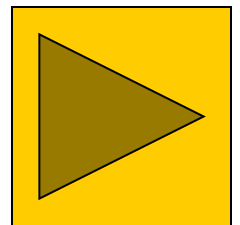


Тема проекта:

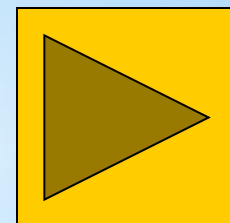
Иррациональные
уравнения в школьном
курсе математики. Методы
решения.



* Актуальность темы

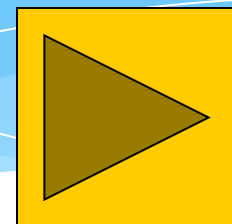
Материал, связанный с уравнениями, составляет значительную часть школьного курса математики. Однако в школе иррациональным уравнениям уделяется достаточно мало внимания, но задания по теме "Иррациональные уравнения" встречаются на ЕГЭ, и они могут стать "камнем преткновения" для выпускников.

Так как при решении иррациональных уравнений в школе применяются тождественные преобразования, то чаще всего возникают ошибки, которые обычно связаны с потерей или приобретением посторонних корней в процессе решения. Поэтому необходимо рассмотреть такие ситуации, показать, как их распознавать и как с ними можно бороться.



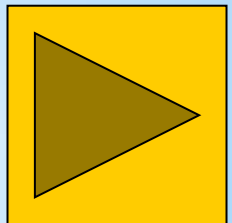
Цель проекта.

Разработать методику обучения решению иррациональных уравнений в школе, а также выявить возможности использования общих методов решения уравнений при решении иррациональных уравнений.



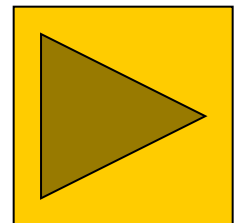
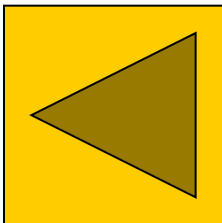
* Задачи проекта!

- Подобрать теоретический материал, связанный с равносильностью уравнений, равносильностью преобразований, методами решения иррациональных уравнений;
- Показать, как общие методы решения уравнений применимы для решения иррациональных уравнений;
- Подобрать примеры решения иррациональных уравнений демонстрации излагаемой теории.



Содержание

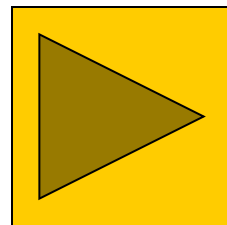
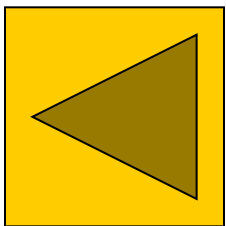
1. [Эпиграф.](#)
2. [Определение иррациональных уравнений.](#)
3. [Упражнения на распознавание видов уравнений.](#)
4. [Работаем устно.](#)
5. [Методы решения.](#)
6. [Графический метод.](#)
7. [Функционально-графический метод.](#)
8. [Решите уравнения.](#)
9. Возведение в степень ([алгоритм 1](#)).
10. [Алгоритм 2.](#)
11. [Пример](#) по алгоритму 1.
12. [Пример](#) по алгоритму 2.
13. [Специальные](#) методы решения уравнений.
14. Справка по [ОДЗ](#).
15. Справка. [Корень n-й степени.](#)
16. Справка. [Модуль.](#)



*Именно математика
дает надежнейшие правила:
кто им следует – тому
не опасен обман чувств.*



Л. Эйлер

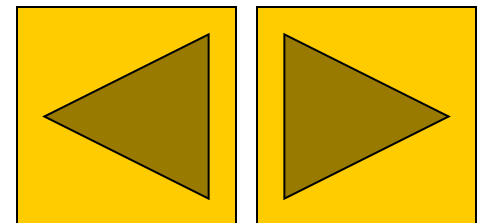


Определение

Иррациональное уравнение –
уравнение, содержащее
переменную под знаком
корня (радикала).

(примеры)

(справка)



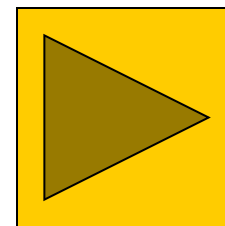
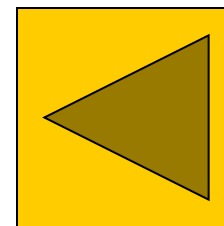
Какие из данных уравнений являются иррациональными?

1. $\frac{x}{\sqrt{2}-1} + 3x^2 = 4$

2. $3x - \sqrt[3]{7} = 0$

3. $\sqrt{x-1} = x-3$

4. $2^{\sqrt{x}} = 2^x$



Работаем устно

1) $\sqrt[3]{x} = 2;$

2) $\sqrt{x-1} = 2;$

3) $\sqrt[3]{x} = 0;$

4) $\sqrt{2-x} = 0;$

5) $\sqrt[4]{-x} = -1$

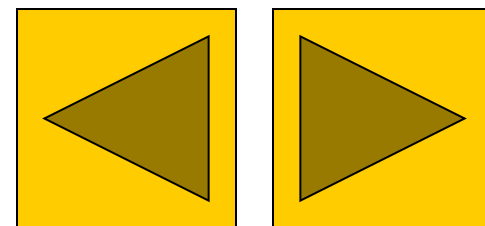
6) $\sqrt[8]{2x} = 1$

7) $\sqrt{x-2} = -\sqrt{2};$

8) $\sqrt[4]{-5-x^2} = 25;$

9) $\sqrt{x} + \sqrt{2x-3} = -2;$

10) $\sqrt{2-x} + 0,01 = 0.$



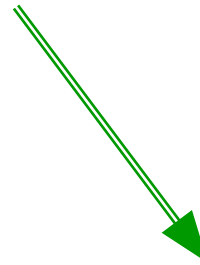
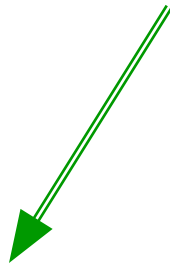
Методы решения

Графический

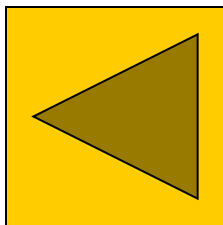
(Функционально-
графический)

Основные
алгебраические

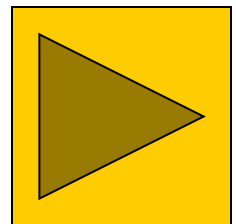
Специальные



- **Возведение обеих частей уравнения в степень**
(подробнее)



- **Переход к равносильной системе**
(подробнее)

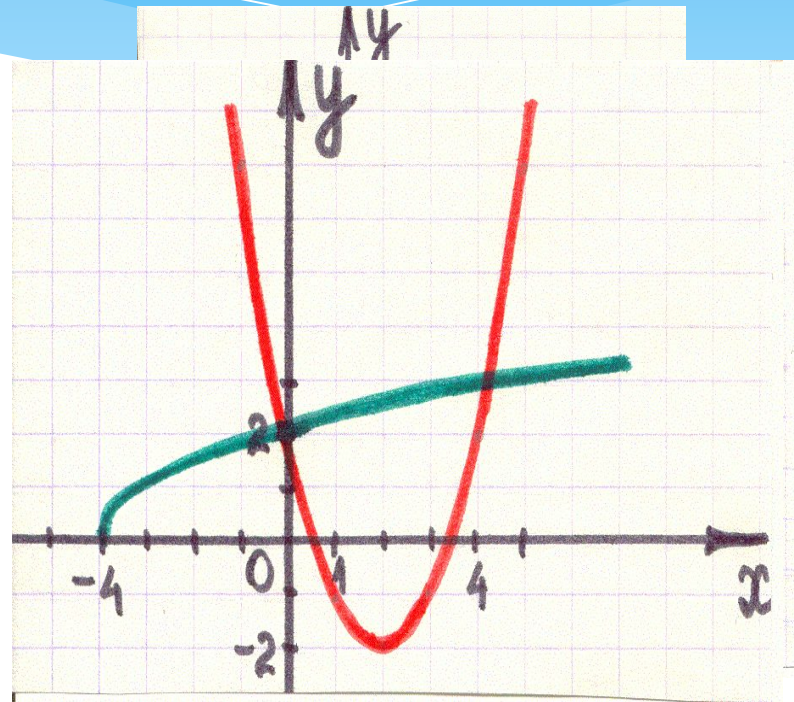


Графический метод (пример 1)

* Решите графически
уравнение

$$\sqrt{x+4} = x^2 - 4x + 2$$

- 1) Строим график $y = \sqrt{x+4}$.
- 2) Строим график $y = x^2 - 4x + 2$
в той же системе координат.
- 3) Находим абсциссы точек
Пересечения графиков
(значения берутся приближенно).
- 4) Записываем ответ.



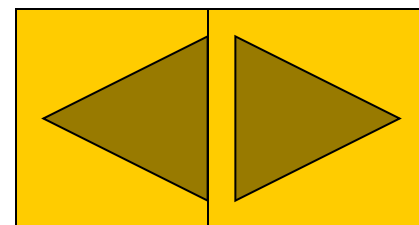
Ответ. $x=0$; $x=4,2$.

Функционально-графический метод

Пример: решите уравнение $\sqrt{x+7} = 5-x$

Решение.

1. $f(x) = \sqrt{x+7}$ - возрастает на $D(f)$.
 2. $g(x) = 5-x$, убывает на $D(g)$.
 3. Уравнение $f(x) = g(x)$ имеет не более одного корня.
 4. Подбором находим, что $x=2$.
- Ответ. 2.



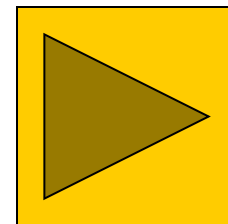
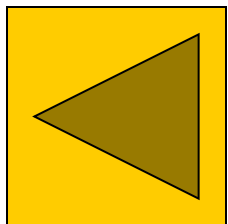
Решите уравнения

1) $\sqrt[3]{3x-1} = x-1,$ [\(алгоритм 2\)](#)

2) $\sqrt{3-3x} = x-1.$ [\(алгоритм 1\)](#)

3) $\sqrt{x^2 + 2x + 10} = 2x - 1$

[\(алгоритм\)](#)

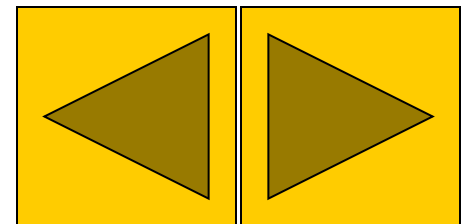


Алгоритм 1

При n – четном

1. Уедини корень (если необходимо);
2. Возведи обе части уравнения в степень n ;
3. Если необходимо, то выполни п.1;
4. Реши полученное уравнение;
5. Выполни **проверку!**
6. Запиши ответ.

(к методам)

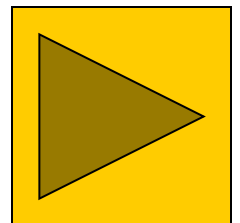
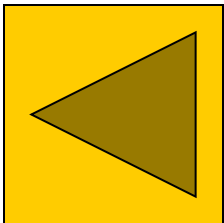


Алгоритм 2

При n - нечетном

1. **Уедини** корень (если необходимо);
2. Возведи обе части уравнения в степень n ;
3. Если необходимо, то выполни п.1;
4. Реши полученное уравнение;
5. Запиши ответ.

[\(к методам\)](#)



Возведение в степень

$$* \sqrt{3 - 3x} = x - 1$$

Решение. Возведем обе части уравнения в квадрат:

$$3 - 3x = x^2 - 2x + 1$$

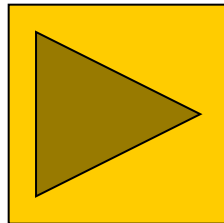
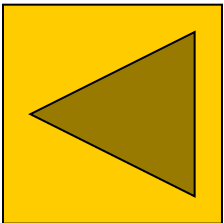
Преобразуем: $x^2 + x - 2 = 0$

$$x = 1, \quad x = -2$$

Проверка. Если $x=1$, то в левой части 0, в правой части 0,
 $0=0$ (верно).

Если $x=-2$, то в левой части 3, в правой части -3,
3 не равно -3, значит, -2 не является корнем.

Ответ. 1.



Возведение в степень

$$\ast \quad \sqrt[3]{3x-1} = x-1$$

Решение. Возведем обе части уравнения в 3-ю степень:

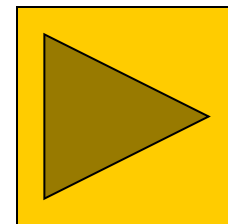
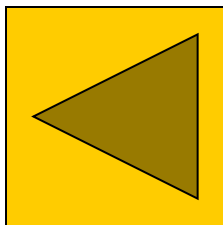
$$3x-1 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

Преобразуем: $x^3 - 3x^2 = 0$

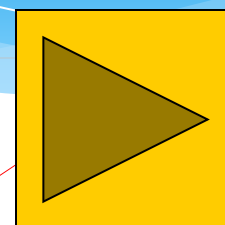
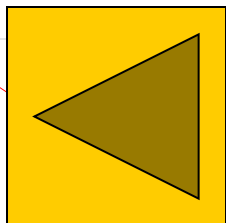
$$x^2(x-3) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{или} \quad x = 3$$

Ответ. 0 ; 3.



Переход к равносильной системе



1. Определить условия (если n –четно), при которых обе части уравнения неотрицательны;
2. Возвести обе части уравнения в n -ю степень;
3. Составить систему из уравнения и неравенства;
4. Решить систему;
5. Записать ответ.

Определение. $\sqrt[2n]{f(x)} = g(x)$, что 1) $g(x) \geq 0$,

$$2) g^{2n}(x) = f(x).$$

Переход к равносильной системе

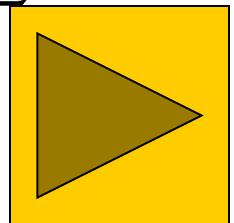
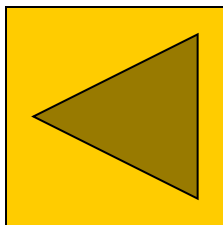
$$* \quad \sqrt{x^2 + 2x + 10} = 2x - 1$$

Решение. Перейдем к равносильной системе

$$\begin{cases} 2x - 1 \geq 0, \\ x^2 + 2x + 10 = 4x^2 - 4x = 1; \\ \begin{cases} x^2 - 2x - 3 = 0, \\ x \geq \frac{1}{2} \end{cases} \end{cases} \quad \begin{cases} \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases} \\ x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Откуда $x=3$.

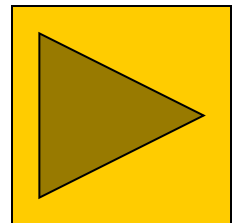
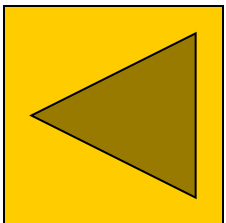
Ответ. 3.



Специальные методы решения

(справка)

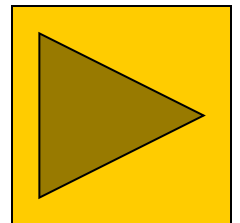
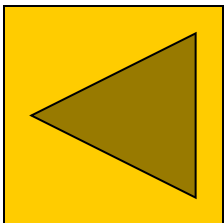
- * Метод пристального взгляда (справка)
- * Найди ОДЗ
- * Выполни замену
- * Умножай на сопряженное
- * Переходи к модулю (справка)
- * Оцени обе части уравнения



Область определения уравнения (ОДЗ) –

**это все значения переменной, при
которых данное уравнение имеет смысл.**

*Замечание. Если **ОДЗ** уравнения есть
пустое множество, то говорят, что
данное уравнение не определено на
множестве R и решений заведомо быть
не может.*



Справка

• Корень n -й степени из a ($\sqrt[n]{a}$) - это такое число b , что $b^n = a$

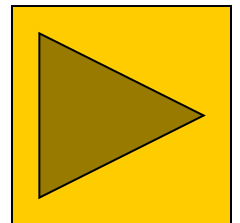
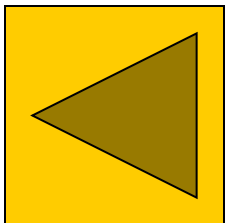
• Арифметический корень n -й степени:

$$\sqrt[n]{a} = b, \text{ что } 1) b \geq 0, \quad 2) b^n = a.$$

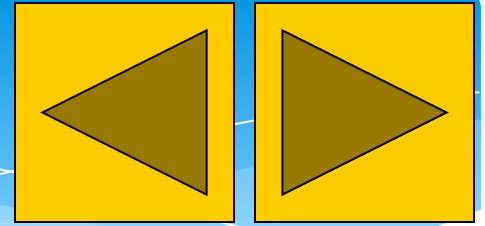
$$\sqrt[n]{a^n} = a, \quad n - \text{нечетно,}$$

$$\sqrt[n]{a^n} = |a|, \quad n - \text{четно,}$$

$$(\sqrt[n]{a})^n = a, \quad n - \text{любое.}$$

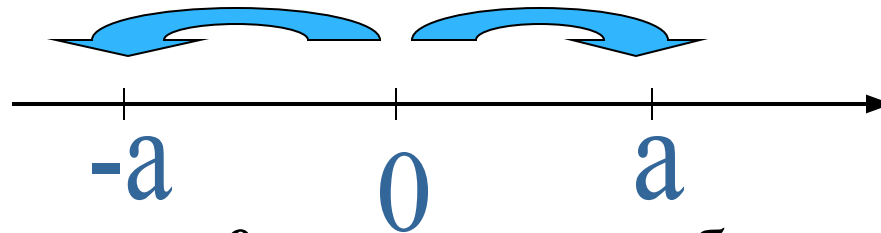


Справка



Модуль числа:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0, \\ 0, & \text{если } a = 0, \\ -a, & \text{если } a \leq 0. \end{cases}$$



Расстояние от 0 до точки, изображающей a на числовой оси

Источники:

- ▶ А. Н. Колмогоров «Алгебра и начала анализа: учебник для 10-11 классов общеобразовательных учреждений».
- ▶ В. С. Крамор, К. Н. Лунгу, А. К. Лунгу. «Математика: Типовые примеры на вступительных экзаменах. Пособие для старшеклассников и абитуриентов».
- ▶ Э. Н. Балаян «Практикум по решению задач. Иррациональные уравнения, неравенства и системы».
- ▶ Л. О. Денищева, Е. М. Бойченко, Ю. А. Глазков и др. «Готовимся к Единому Государственному экзамену. Математика».
- ▶ Под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова «Математика. Подготовка к ЕГЭ-2010»



* *Спасибо за внимание.*

