РАЗДЕЛ 2. ОСНОВЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Кривые 2-го порядка.

Канонические уравнения окружности, эллипса, гиперболы, параболы

Кривые второго порядка делятся на ***вырожденные*** и ***невырожденные.***

Вырожденные кривые второго порядка это прямые, которые задаются уравнением второй степени.

Невырожденными кривыми второго порядка являются эллипс, окружность, гипербола и парабола.

<u>Кривая второго порядка на плоскости</u> определяется уравнением второй степени с двумя переменными, причем единственным образом:

$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$, где A, B, C, D, E, F – числа, но A, B и C одновременно не равны нулю ?

Впервые кривые второго порядка изучались одним из учеников Платона. Его работа заключалась в следующем: если взять две пересекающиеся прямые и вращать их вокруг биссектрисы угла, ими образованного, то получится конусная поверхность. Если же пересечь эту поверхность плоскостью, то в сечении получаются различные геометрические фигуры, а именно эллипс, окружность, парабола, гипербола и несколько вырожденных фигур.

Однако эти научные знания нашли применение лишь в XVII веке, когда стало известно, что планеты движутся по эллиптическим траекториям, а пушечный снаряд летит по параболической. Ещё позже стало известно, что если придать телу первую космическую скорость, то оно будет двигаться по окружности вокруг Земли, при увеличении этой скорости – по эллипсу, а по достижении второй космической скорости тело по параболе покинет поле притяжения Земли.

ЭЛЛИПС

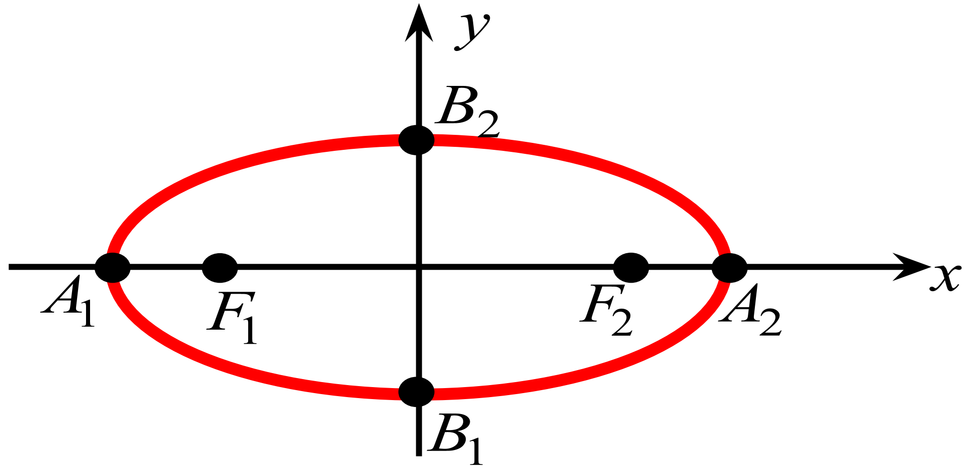
Это множество точек на плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух заданных точек плоскости F_1 и F_2 (называемых фокусами) есть величина постоянная, большая, чем расстояние между фокусами.

Каноническое уравнение эллипса: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

Числа a, b и c связаны между собой равенством:

$$a^2 - b^2 = c^2 \text{ или } b^2 - a^2 = c^2.$$

Выберем систему координат так, чтобы фокусы F_1 и F_2 лежали на оси Ox на одинаковом расстоянии от O: F_1 (-c; 0) и F_2 (c; 0).



Точки A_1, A_2, B_1, B_2 – **вершины эллипса**. Отрезок A_1A_2 называется **большой** (***фокальной***) **осью**, его длина $2a$; отрезок B_1B_2 – **малой осью**, его длина $2b$. Величины a и b называются **большой** и **малой полуосью** соответственно. Длина отрезка F_1F_2 (равная 2с) называется **фокусным расстоянием**.

Если M – произвольная точка эллипса, то отрезки MF_1 , MF_2 и их длины r_1, r_2 называются **фокальными радиусами точки** M.

СВОЙСТВА ЭЛЛИПСА

1) Эллипс лежит внутри прямоугольника, ограниченного прямыми $x=\pm a$, $y=\pm b$.

2) Эллипс имеет **центр симметрии** (начало координат) и две **оси симметрии** (оси Ox и Oy).

Величина ε, равная отношению фокусного расстояния эллипса к его большой оси, называется **эксцентриситетом** эллипса: $$\varepsilon=\frac{2c}{2a}=\frac{c}{a}$$

Так как $c=\sqrt{a^2-b^2}<a$, то $0<\varepsilon<1$.

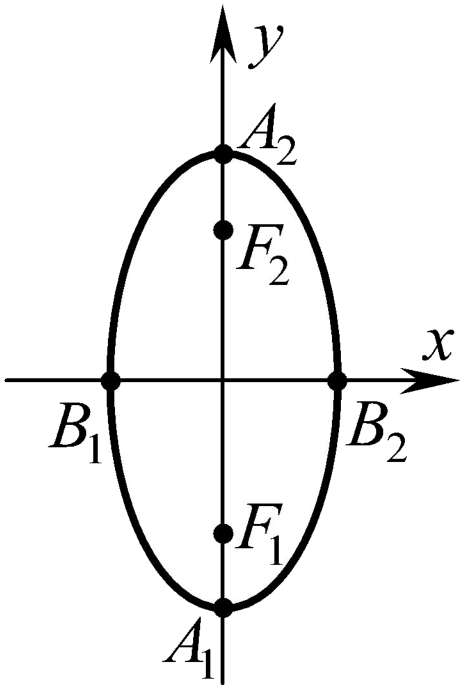
Величина ε характеризует форму эллипса:

$\varepsilon\approx 1$ – эллипс сильно вытянут

$\varepsilon\approx 0$ – эллипс имеет более округлую форму

$\varepsilon=0$ – эллипс вырождается в окружность $x^2+y^2=r^2$.

Если выбрать систему координат так, чтобы фокусы F_1 и F_2 были на оси Oy на одинаковом расстоянии от начала координат, то уравнение эллипса будет иметь вид: $$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$



Для этого эллипса большая ось – ось Oy, малая ось – ось Ox, фокусы имеют координаты $F_1(0;-c)$ и $F_2(0;c)$, где

$$c=\sqrt{b^2-a^2}$$

$$\varepsilon=\frac{2c}{2b}=\frac{c}{b}$$

Оба случая расположения эллипса относительно осей координат можно представить в таблице 1.

ГИПЕРБОЛА

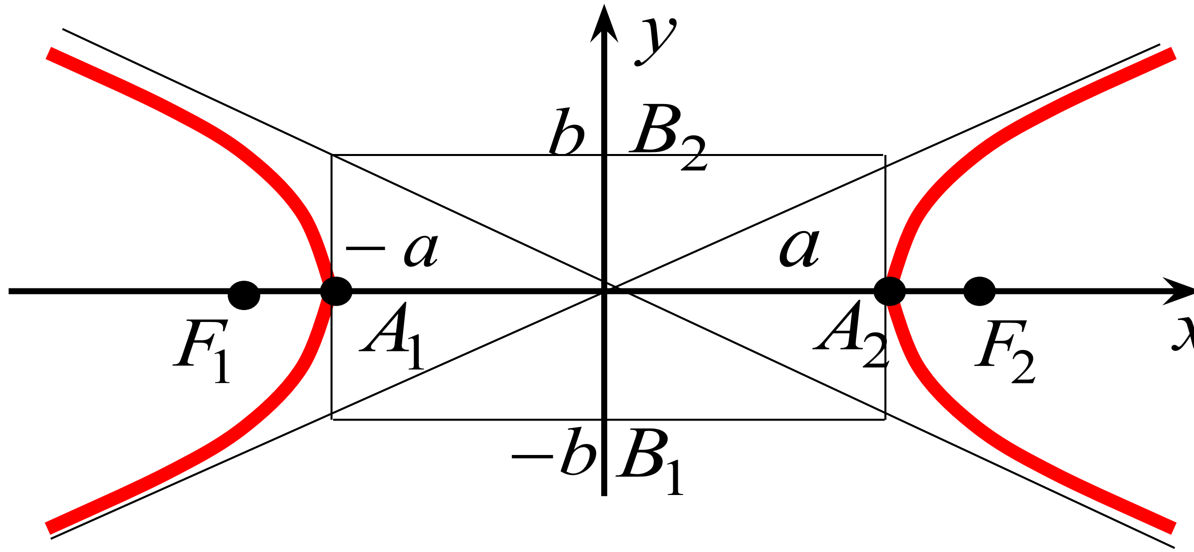
Это множество точек на плоскости, разность расстояний от каждой из которых до двух заданных точек плоскости F_1 и F_2 (называемых фокусами) есть величина постоянная, меньшая, чем расстояние между фокусами.

Каноническое уравнение гиперболы: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Числа a, b и c связаны между собой равенством:

$$a^2 + b^2 = c^2 \text{ или } b^2 + a^2 = c^2.$$

Выберем систему координат так, чтобы фокусы F_1 и F_2 лежали на оси Ox на одинаковом расстоянии от O: F_1 (-c; 0) и F_2 (c; 0).



Точки A_1, A_2 – **вершины гиперболы**. Отрезок A_1A_2 называется **действительной осью**, его длина $2a$; отрезок B_1B_2 – **мнимой осью**, его длина $2b$. Величины a и b называются **действительной** и **мнимой полуосью** соответственно. Длина отрезка F_1F_2, равная 2с, называется **фокусным расстоянием**.

Если M – произвольная точка гиперболы, то отрезки MF_1 , MF_2 и их длины r_1, r_2 называются **фокальными радиусами точки** M.

СВОЙСТВА ГИПЕРБОЛЫ

1) В полосе, ограниченной прямыми *x=±a,* точек гиперболы нет.

2) Гипербола имеет **центр симметрии** (начало координат) и две **оси симметрии** (оси Ох и Оу).

Центр симметрии гиперболы называют **центром гиперболы**. Ось симметрии гиперболы, проходящую **через фокусы** (ось Ох) называют **действительной** (или фокальной) осью симметрии, а вторую ось (ось Оу) – **мнимой** осью.

Эксцентриситет гиперболы есть отношение фокусного расстояния к его действительной оси:

$$\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$$

Так как $c = \sqrt{a^2 + b^2} > a$, то $\varepsilon > 1$.

Прямые, заданные уравнениями $y = \pm\frac{a}{b}x$ называются **асимптотами** гиперболы.

Если в уравнении гиперболы *a*=*b*, то гипербола называется ***равнобочной*** и ее уравнение имеет вид:

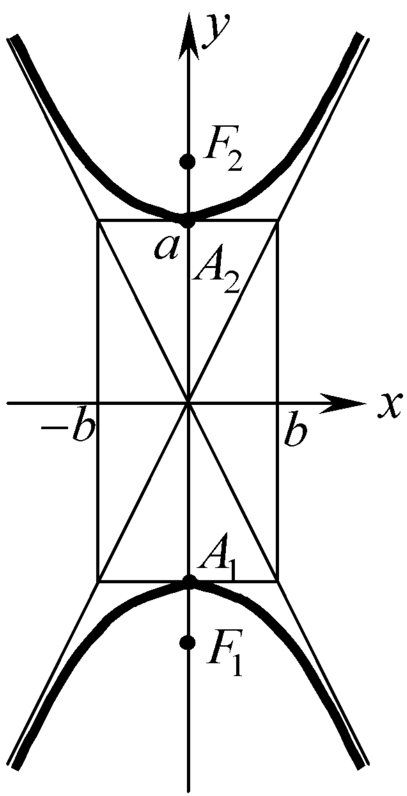
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$$ или $x^2 - y^2 = a^2$.

Асимптоты равнобочной гиперболы $y = \pm x$ являются биссектрисами координатных углов.

Для равносторонней гиперблолы $c^2 = a^2 + a^2$, т.е. $c = a\sqrt{2}$ и ее эксцентриситет будет в этом случае равен $\sqrt{2} \approx 1{,}41$.

Если выбрать систему координат так, чтобы фокусы F_1 и F_2 были на оси Oy на одинаковом расстоянии от начала координат, то уравнение гиперболы будет иметь вид:

$$-\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$



Для этой гиперболы действительная ось – ось Оу, мнимая ось – ось Ох и координаты фокусов $F_1(0;–c)$ и $F_2(0;c)$ (где $c=\sqrt{b^2-a^2}$)

$$\varepsilon=\frac{2c}{2b}=\frac{c}{b}$$

Оба случая расположения гиперболы относительно осей координат представим в таблице 2.

ПАРАБОЛА

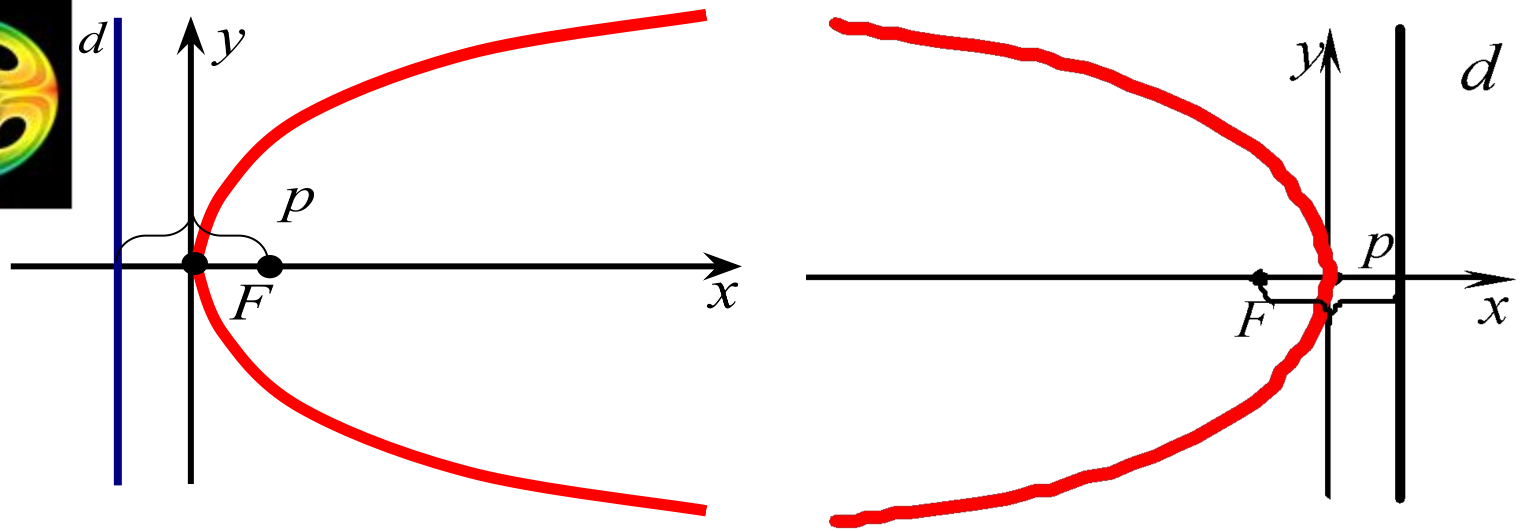
Это множество точек на плоскости, равноудаленных от заданной точки (называемой фокусом) и данной прямой d, называемой директрисой.

Расстояние от фокуса F до директрисы d принято обозначать p ($p>0$).

Каноническое уравнение параболы: $y^2 = \pm 2px$

Выберем систему координат так, чтобы директриса параболы **d** была перпендикулярна оси Ox и фокус **F** лежал на положительной части Ox. В этом случае

F ($\pm 0{,}5p$; 0) и уравнение директрисы d: $x = \pm\ 0{,}5p$.



Точка, в которой парабола пересекает свою ось, называется **вершиной параболы**,

Число p называется **параметром параболы**.

Если M – произвольная точка параболы, то отрезок MF и его длина называются **фокальным радиусом** r точки M.

СВОЙСТВА ПАРАБОЛЫ

1) Парабола лежит в полуплоскости $x \geq 0$ ($x \leq 0$).

2) Парабола имеет ось симметрии (ось Ox). Ось симметрии параболы называют **осью параболы**.

Если выбрать систему координат так, чтобы директриса была перпендикулярна *Oy*, фокус лежал на положительной (отрицательной) части оси *Oy*, то парабола будет располагаться в полуплоскости $y \geq 0$ ($y \leq 0$).

В этом случае парабола будет задаваться уравнениями $x^2 = \pm 2py$, а для директрисы и фокуса получим: $F(0; \pm 0{,}5p)$ и $d: y = \pm 0{,}5\,p$.