Понятие предела числовой последовательности. Предел функции в точке и на бесконечности. Теоремы о пределах функции.

Последовательность

Определение 1.

Функцию вида $y = f(x)$, $x \in N$ называют **функцией натурального аргумента** или **числовой последовательностью** и обозначают $y = f(n)$ или $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n, \ldots,$ или (y_n).

(a_n) – последовательность

a_1 ; a_2 ; a_3 ;…. a_n - члены последовательности

Первый член послед. n-ый член послед.

Способы задания числовой последовательности

1. Словесный способ.

Правила задания последовательности описываются словами, без указания формул или когда закономерности между элементами последовательности нет.

Пример 1. **Последовательность простых чисел: 2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,… .**

Пример 2. **Произвольный набор чисел:**

1,4,12,25,26,33,39,… .

Пример 3. **Последовательность четных чисел: 2,4,6,8,10,12,14,16,… .**

Способы задания числовой последовательности

2. *Аналитический способ.*

Любой n-й элемент последовательности можно определить с помощью формулы.

Пример 1. **Последовательность четных чисел: $y = 2n$.**

Пример 2. **Последовательность квадратов натуральных чисел:**

$y = n^2$.

Пример 3. **Стационарная последовательность: $y = C$**

$C, C, C, C,\ldots,C,\ldots$

Пример 4. **Последовательность $y = n^2 - 3n$**

$-2, -2, 0, 4, 10,\ldots$

Пример 5. **Последовательность $y = 2^n$**

$2, 2^2, 2^3,\ldots,2^n,\ldots$

Способы задания числовой последовательности

3. Рекуррентный способ.

Указывается правило, позволяющее вычислить n-й элемент последовательности, если известен ее предыдущий элемент.

Пример 1. $\mathbf{a_1 = 3}$ $\mathbf{a_{n+1} =}$ [illegible]^2

$a_1=3$ $a_3 = 9^2 = 81$

$a_2 = 3^2 = 9$ $a_4 = 81^2 = 6561$

Примеры последовательностей.

Продолжите ряд: 1, 10, 3, 9, 5, 8, 7, 7, 9, 6…

Ответ: Ряд состоит из двух частей: числа на нечетных местах: 1, 3, 5, 7, 9...; числа на четных местах: 10, 9, 8, 7

Продолжите ряд 77, 49, 36, 18…

Ответ: Перемножаются две цифры, входящие в предыдущее число

Числа Фибоначчи.

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610…

Элементы числовой последовательности, в которой каждое последующее число равно сумме двух предыдущих чисел.

Леонардо Фибоначчи - итальянский математик.
(родился около 1170 — умер после 1228),

Определение 2.

Последовательность (y_n), называют ***ограниченной сверху***, если все ее члены не больше некоторого числа.

Последовательность (y_n) ***ограничена сверху***, если существует число M такое, что для любого n выполняется неравенство $y_n \le M$. Число M называют ***верхней границей последовательности***.

Например: -1, -4, -9, -16,…, - n²   ,…

Определение 3.

Последовательность *(y_n),* называют ***ограниченной снизу***, если все ее члены не меньше некоторого числа.

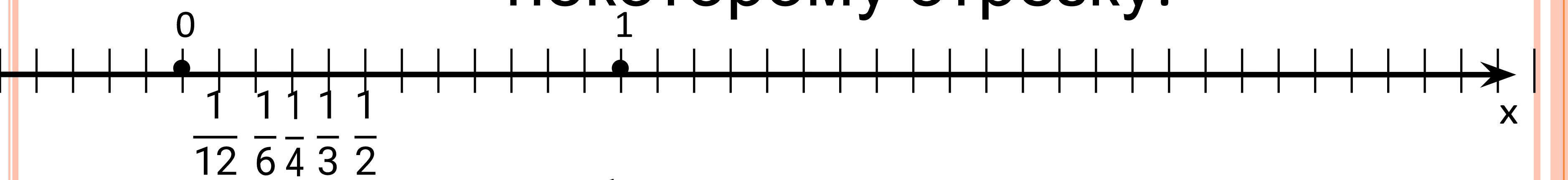
Последовательность *(y_n)* ***ограничена снизу***, если существует число *m* такое, что для любого *n* выполняется неравенство $y_n \geq m$. Число *m* называют ***верхней границей последовательности***.

Например: 1, 4, 9, 16,…,n^2,…

Нижняя граница - 1

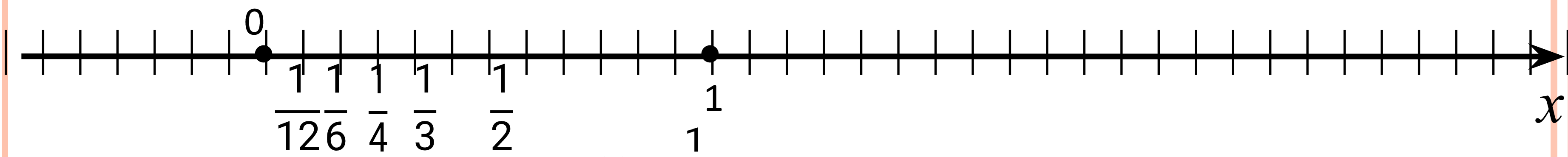
Если последовательность ограничена и снизу и сверху, то ее ***называют ограниченной последовательностью***.

Ограниченность последовательности означает, что все члены последовательности принадлежат некоторому отрезку.



$y_n = \frac{1}{n}$ - ограниченная последовательность

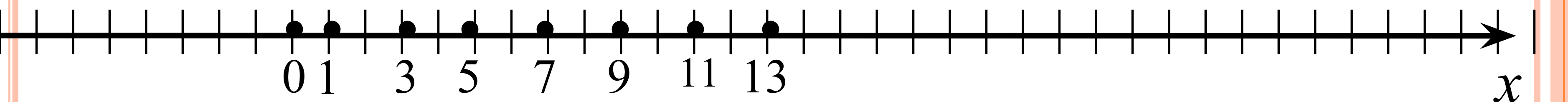
$y_n \in [0;1]$



$y_n = \frac{1}{n}$ - ограниченная последовательность

Члены последовательности (y_n) как бы «сгущаются» около точки 0. Говорят последовательность *(y_n)* *сходится*.

$y_n = 2n - 1$



У последовательности (y_n) такой «точки сгущения» нет. Говорят последовательность *(y_n)* *расходится*.

Определение 6.

Число b называют **пределом последовательности** (y_n), если в любой заранее выбранной окрестности точки b содержатся все члены последовательности, начиная с некоторого номера.

$$y_n \to b \qquad \lim_{n \to \infty} y_n = b$$

Читают: *предел последовательности (y_n) при стремлении n к бесконечности равен b или предел последовательности (y_n) равен b.*

«ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ ЧИСЛОВЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ».

- ***Теорема***

Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b,\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = c$ *,то*

предел суммы *равен сумме пределов:*

$$\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = b + c;$$

предел произведения *равен произведению пределов:* $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n y_n) = bc$;

предел частного *равен частному пределов:*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{b}{c},\ c \neq 0;$$

постоянный множитель *можно вынести за знак предела:* $\lim\limits_{n\to\infty} (kx_n) = kc$.