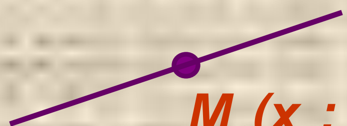
Прямая на плоскости

- Общее уравнение прямой
- Уравнение прямой в отрезках
- Каноническое уравнение прямой
- Уравнение прямой с угловым коэффициентом
- Угол между двумя прямыми
- Расстояние от точки до прямой
- Биссектриса углов между прямыми
- Деление отрезка в заданном отношении

Общее уравнение прямой

Уравнение вида: $Ax + By + C = 0$

с произвольными коэффициентами A; B; C такими , что A и B не равны нулю одновременно, называется ***общим уравнением прямой.***



$M_0(x_0; y_0)$

Если точка $M_0(x_0; y_0)$ принадлежит прямой, то общее уравнение прямой превращается в тождество: $Ax_0 + By_0 + C = 0$

Теорема Пусть задана прямая: $Ax + By + C = 0$ **(1)**

Вектор $\overline{n} = \{A; B\}$ будет ***ортогонален*** этой прямой.

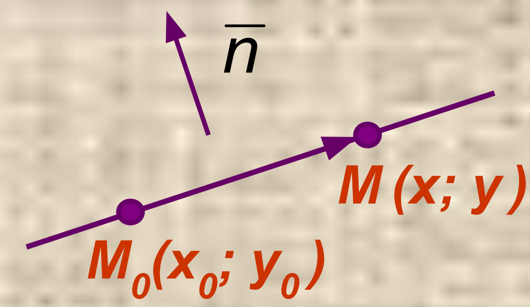
Доказательство:

Пусть некоторая точка $M_0(x_0; y_0)$ принадлежит прямой:

$$Ax_0 + By_0 + C = 0 \qquad \textbf{(2)}$$

Общее уравнение прямой

Найдем разность уравнений *(1)* и *(2)*:



$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ Ax_0 + By_0 + C = 0 \end{cases} -$$

$$\boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0} \quad \mathbf{(3)}$$

Пусть точки $M_0(x_0; y_0)$ и $M(x; y)$ лежат на данной прямой.

Рассмотрим векторы: $\overline{n} = \{A; B\}$ и $\overline{M_0M} = \{x - x_0; y - y_0\}$

Равенство *(3)* представляет собой скалярное произведение этих векторов, которое равно нулю:

$$\overline{n} \cdot \overline{M_0M} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \overline{n} \perp \overline{M_0M}$$

Таким образом, вектор $\overline{n}$ перпендикулярен прямой и называется ***нормальным вектором*** прямой.

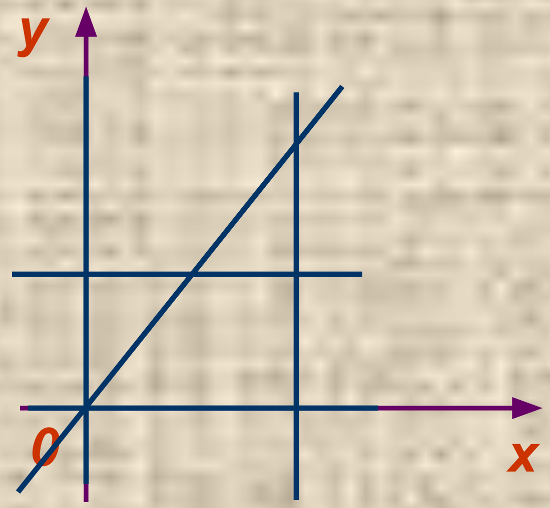
Равенство *(3)* также является ***общим уравнением*** прямой

Общее уравнение прямой

Общее уравнение прямой называется ***полным***, если все коэффициенты A, B, и C отличны от нуля.

В противном случае уравнение называется ***неполным***.

Виды неполных уравнений:



1) $C = 0; \quad Ax + By = 0$

2) $B = 0; \quad Ax + C = 0$

3) $A = 0; \quad By + C = 0$

4) $B = C = 0; \quad Ax = 0 \Rightarrow x = 0$

5) $A = C = 0; \quad By = 0 \Rightarrow y = 0$

Уравнение прямой в отрезках

Рассмотрим полное уравнение прямой:

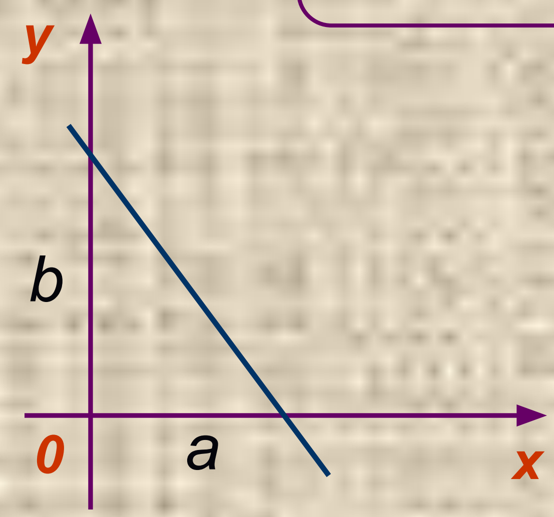
$$Ax + By + C = 0 \quad \Rightarrow \quad Ax + By = -C \quad \Rightarrow \quad \frac{Ax}{-C} + \frac{By}{-C} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{\frac{-C}{A}} + \frac{y}{\frac{-C}{B}} = 1$$

Обозначим: $\frac{-C}{A} = a \quad \frac{-C}{B} = b$ Получим: $\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1}$

Уравнение в отрезках

Уравнение в отрезках используется для построения прямой, при этом a и b – отрезки, которые отсекает прямая от осей координат.

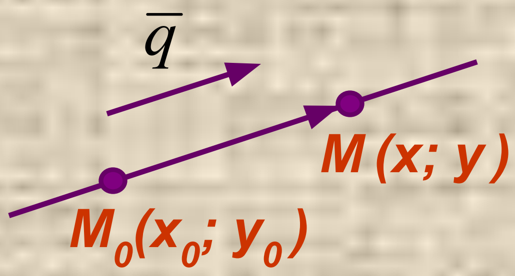


Каноническое уравнение прямой

Любой ненулевой вектор, параллельный данной прямой, называется ***направляющим вектором*** этой прямой.

Требуется найти уравнение прямой, проходящей через заданную точку ***$M_0(x_0; y_0)$*** и параллельно заданному вектору $\overline{q} = \{l; m\}$

Очевидно, что точка ***$M(x; y)$*** лежит на прямой, только в том случае, если векторы



$\overline{q} = \{l; m\}$ и $\overline{M_0M} = \{x - x_0; y - y_0\}$

коллинеарны.

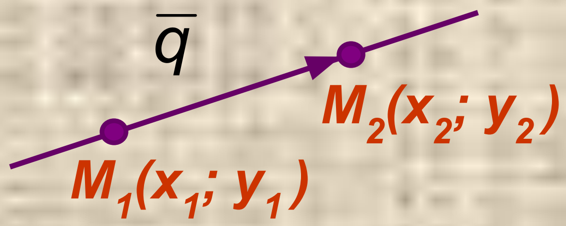
По условию коллинеарности получаем:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}$$

Каноническое уравнение прямой

Каноническое уравнение прямой

Пусть прямая проходит через две заданные и отличные друг от друга точки: ***$M_1(x_1; y_1)$*** и ***$M_2(x_2; y_2)$.***



Тогда в качестве направляющего вектора в каноническом уравнении можно взять вектор:

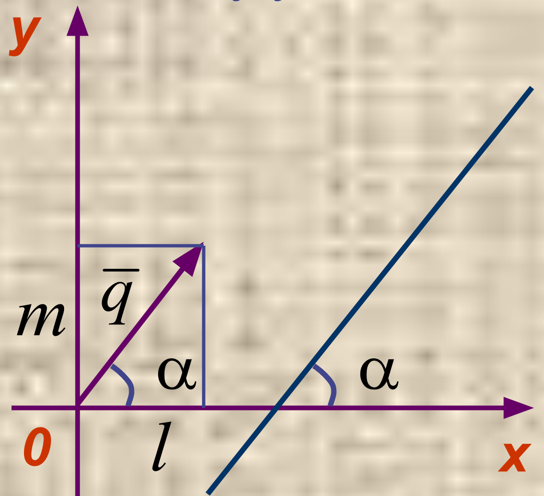
$$\overline{q} = \overline{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1\}$$

$$\boxed{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}}$$

Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки

Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Если прямая не параллельна оси OY и имеет направляющий вектор $\overline{q} = \{l; m\}$, то ***угловой коэффициент*** k этой прямой равен тангенсу угла наклона прямой к оси OX.



$$k = tg\alpha = \frac{m}{l}$$

Уравнение прямой с угловым коэффициентом

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} \Rightarrow \boxed{y - y_0 = k(x - x_0)} \Rightarrow$$

$$y = y_0 + kx - kx_0 \Rightarrow \boxed{y = kx + b}$$

= b

Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Пример

Прямая проходит через точку $M(1; 2)$ и имеет направляющий вектор:

Написать: каноническое, общее уравнение прямой, уравнение прямой в отрезках, уравнение с угловым коэффициентом.
Найти нормальный вектор прямой, отрезки, которые отсекает прямая от осей координат и угол, который составляет прямая с осью OX.

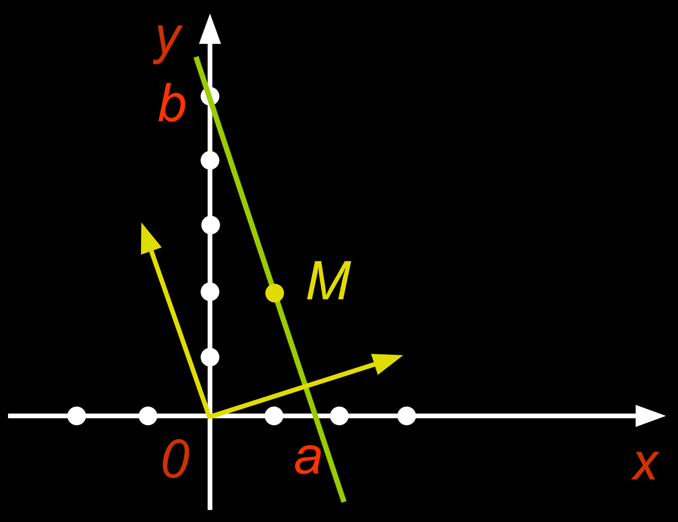
1. Каноническое уравнение:

2. Общее уравнение:

Пример

3. Уравнение в отрезках:

4. Уравнение с угловым коэффициентом:

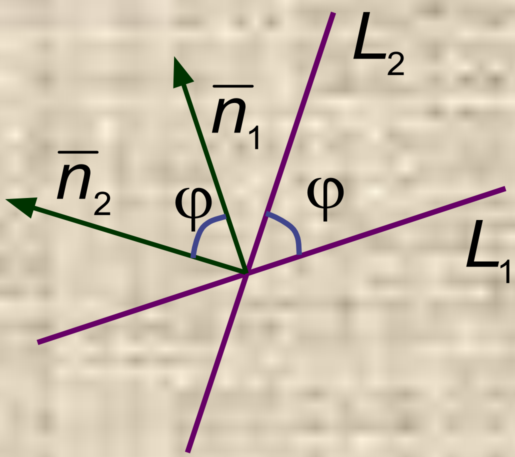


Угол между двумя прямыми

Пусть две прямые L_1 и L_2 заданы общими уравнениями:

$$L_1: \quad A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

$$L_2: \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0$$



Угол между этими прямыми определяется как угол между нормальными векторами к этим прямым:

$$\overline{n}_1 = \{A_1; B_1\} \qquad \overline{n}_2 = \{A_2; B_2\}$$

$$\boxed{\cos\varphi = \cos(\overline{n}_1; \overline{n}_2) = \frac{\overline{n}_1 \cdot \overline{n}_2}{|\overline{n}_1| \cdot |\overline{n}_2|} = \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}}$$

$$A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad L_1 \perp L_2$$

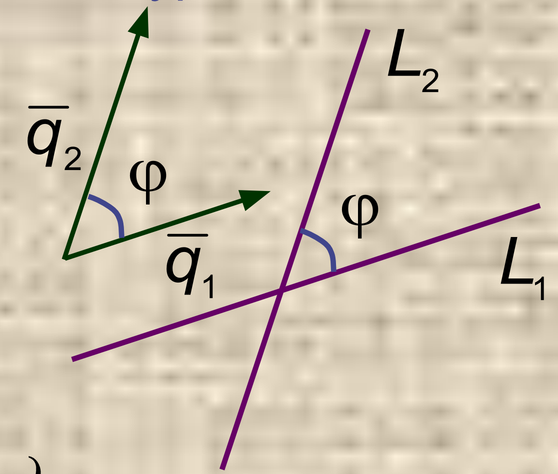
$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \quad \Rightarrow \quad L_1 \parallel L_2$$

Угол между двумя прямыми

Пусть две прямые L_1 и L_2 заданы каноническими уравнениями:

$$L_1: \quad \frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1}$$

$$L_2: \quad \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2}$$



Угол между этими прямыми определяется как угол между направляющими векторами к этим прямым: $\overline{q}_1 = \{l_1; m_1\}$ $\overline{q}_2 = \{l_2; m_2\}$

$$\boxed{\cos\varphi = \cos(\overline{q}_1; \overline{q}_2) = \frac{\overline{q}_1 \cdot \overline{q}_2}{|\overline{q}_1| \cdot |\overline{q}_2|} = \frac{l_1 \cdot l_2 + m_1 \cdot m_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2}}}$$

$$l_1 \cdot l_2 + m_1 \cdot m_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad L_1 \perp L_2$$

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} \quad \Rightarrow \quad L_1 \parallel L_2$$

Угол между двумя прямыми

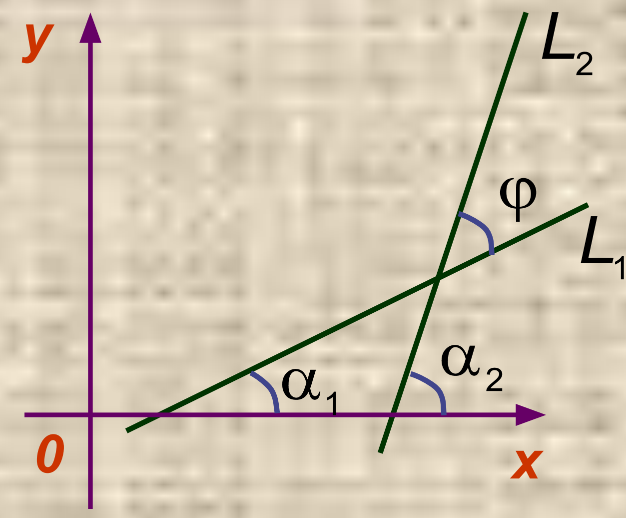
Пусть две прямые L_1 и L_2 заданы уравнениями с угловыми коэффициентами:

$$L_1: \quad y = k_1 x + b_1$$

$$L_2: \quad y = k_2 x + b_2$$

$$\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$$

$$k_1 = tg\alpha_1 \qquad k_2 = tg\alpha_2$$



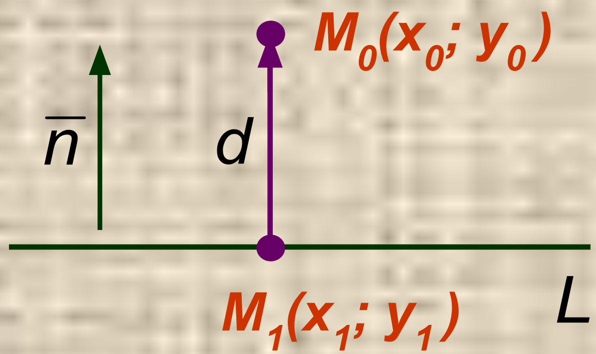
$$\boxed{tg\varphi = tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_2 \cdot tg\alpha_1} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 \cdot k_1}}$$

$$k_1 \cdot k_2 = -1 \quad \Rightarrow \quad L_1 \perp L_2$$

$$k_1 = k_2 \quad \Rightarrow \quad L_1 \parallel L_2$$

Расстояние от точки до прямой

Пусть необходимо найти расстояние от точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямой, заданной общим уравнением: $Ax + By + C = 0$



Пусть $M_1(x_1; y_1)$ – основание перпендикуляра, опущенного из точки M_0 на прямую L.

$$d = \left|\overline{M_1M_0}\right| = \left|\{x_0 - x_1; y_0 - y_1\}\right|$$

Найдем скалярное произведение векторов $\overline{n} = \{A; B\}$ и $\overline{M_1M_0}$

$$\overline{n} \cdot \overline{M_1M_0} = |\overline{n}| \cdot \left|\overline{M_1M_0}\right| \cdot \cos\varphi$$

$$\varphi = 0 \quad \text{или} \quad \varphi = \pi \quad \Longrightarrow \quad \cos\varphi = \pm 1$$

$$\overline{n} \cdot \overline{M_1M_0} = \pm|\overline{n}| \cdot \left|\overline{M_1M_0}\right| = \pm|\overline{n}| \cdot d$$

Найдем скалярное произведение в координатной форме:

$$\overline{n} \cdot \overline{M_1M_0} = A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) = Ax_0 - Ax_1 + By_0 - By_1$$

Расстояние от точки до прямой

$$= Ax_0 + By_0 - (Ax_1 + By_1)$$

Точка ***$M_1(x_1; y_1)$*** принадлежит прямой ***L***, следовательно:

$$Ax_1 + By_1 + C = 0 \implies Ax_1 + By_1 = -C$$

$$\begin{cases} \overline{n} \cdot \overline{M_1M_0} = Ax_0 + By_0 + C \\ \overline{n} \cdot \overline{M_1M_0} = \pm|\overline{n}| \cdot d \end{cases} \implies \pm|\overline{n}| \cdot d = Ax_0 + By_0 + C$$

$$d = \pm\frac{Ax_0 + By_0 + C}{|\overline{n}|}$$

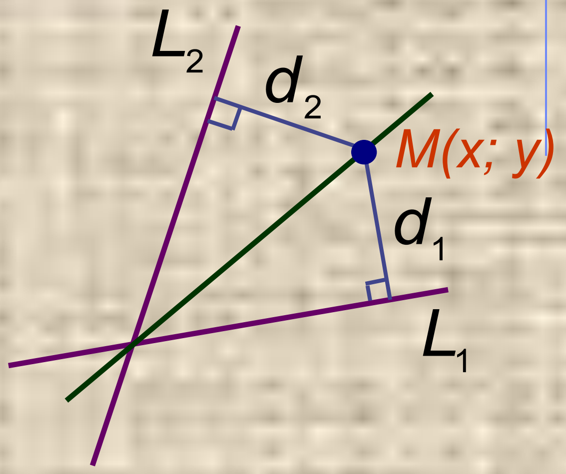
$$\boxed{d = \left|\frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right|}$$

Биссектриса углов между прямыми

Пусть две прямые ***L₁*** и ***L₂*** заданы общими уравнениями:

$$L_1: \quad A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

$$L_2: \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0$$



Если точка *M(x; y)* лежит на биссектрисе угла между прямыми, то расстояние от точки *M* до прямой L_1 равна расстоянию до прямой L_2: $d_1 = d_2$

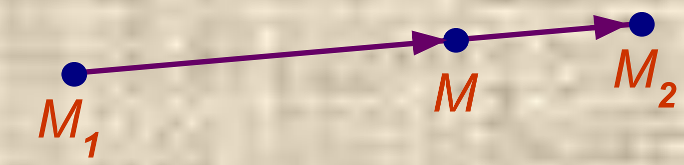
$$d_1 = \left| \frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} \right| \qquad d_2 = \left| \frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \right|$$

$$\boxed{\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \pm \frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}}$$

Деление отрезка в заданном отношении

Разделить отрезок M_1M_2 в заданном отношении $\lambda > 0$ значит найти на отрезке такую точку $M(x;y)$, что имеет место равенство:

$$\frac{|M_1M|}{|MM_2|} = \lambda \quad \text{или} \quad |M_1M| = \lambda |MM_2|$$



Пусть $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$. Найдем координаты точки M.

$$\overline{M_1M} = \lambda \cdot \overline{MM_2}$$

В координатной форме:

$$\overline{M_1M} = \{x - x_1; y - y_1\} \qquad \overline{MM_2} = \{x_2 - x; y_2 - y\}$$

$$\left.\begin{array}{l} x - x_1 = \lambda \cdot (x_2 - x) \\ y - y_1 = \lambda \cdot (y_2 - y) \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = \lambda x_2 - \lambda x + x_1 \\ y = \lambda y_2 - \lambda y + y_1 \end{array}\right] \Rightarrow$$

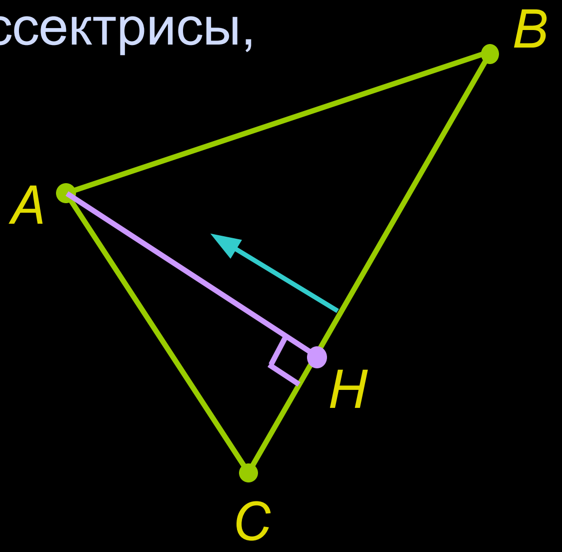
$$\left.\begin{array}{l} x \cdot (1+\lambda) = \lambda x_2 + x_1 \\ y \cdot (1+\lambda) = \lambda y_2 + y_1 \end{array}\right] \Rightarrow \boxed{x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} \qquad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}}$$

Пример

Даны вершины треугольника: A(1; 1); B(10; 13); C(13; 6)

Найти: Уравнения высоты, медианы и биссектрисы, проведенных из вершины A.

1. Уравнение высоты:



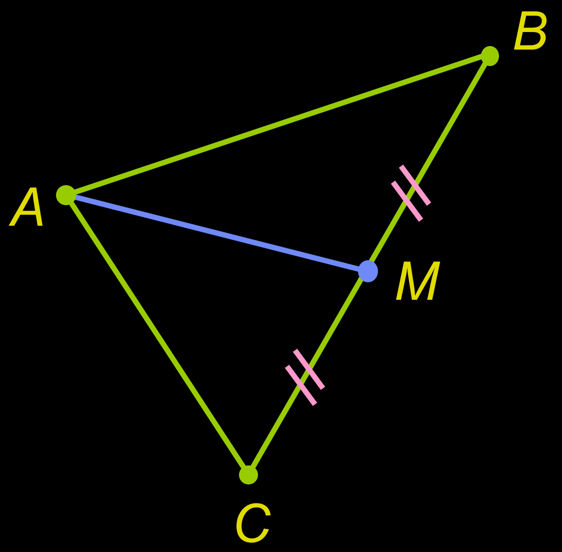
(BC):

(AH):

Пример

2. Уравнение медианы:

т. M:

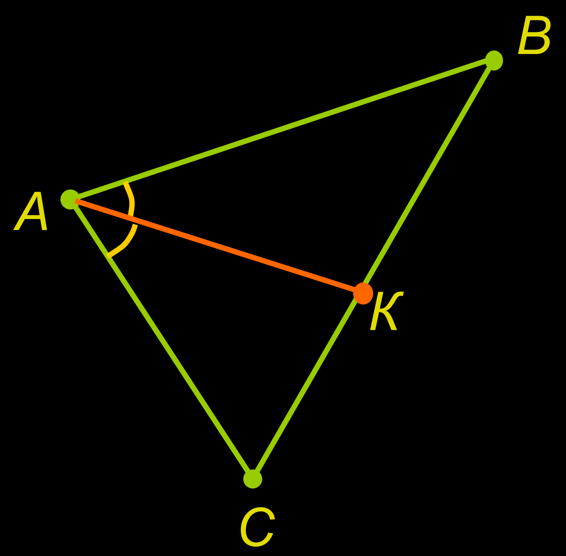


Пример

4. Уравнение биссектрисы:

(AB):

(AC):



Пример

Для биссектрисы внутреннего угла треугольника должно выполняться условие:

или

1)

2)