Тригонометрия

Автор:
учитель математики
Комлякова Ксения Геннадьевна
ГБОУ Гимназия №105,
г. Санкт-Петербург

«Приобретать знания – храбрость, приумножать их – мудрость, а умело применять – великое искусство»

(восточная мудрость)

I. Простейшие тригонометрические уравнения.

$$\cos x = \alpha$$

Если $|\alpha| \le 1,$ то

$$x = \pm \arccos \alpha + 2\pi n, n \in Z.$$

$$\sin x = \alpha$$

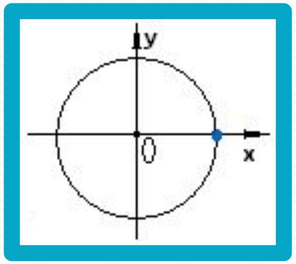
Если $|\alpha| \le 1,$ то

$$x = (-1)^n \arcsin \alpha + \pi n, n \in Z$$

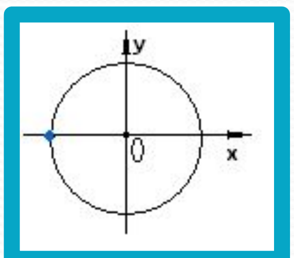
Если $|\alpha| > 1,$ то решений нет

Особые случаи:

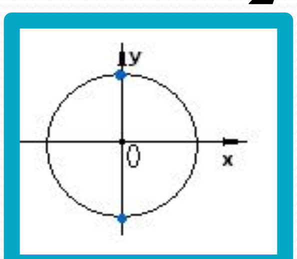
$$\cos x = 1; x = 2\pi n, n \in Z;$$



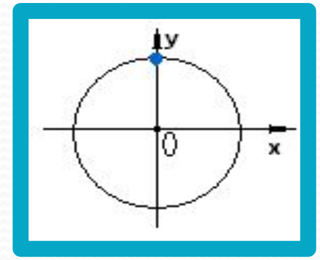
$$\cos x = -1; x = \pi + 2\pi n, n \in Z;$$



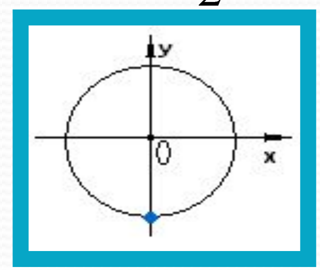
$$\cos x = 0; x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z.$$



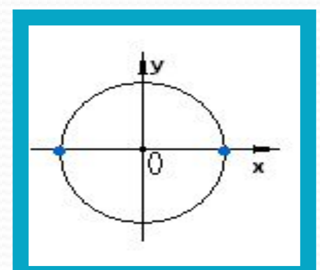
$$\sin x = 1; x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z;$$



$$\sin x = -1; x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z;$$



$$\sin x = 0; x = \pi n, n \in Z.$$



$$tgx = a, ctgx = a.$$

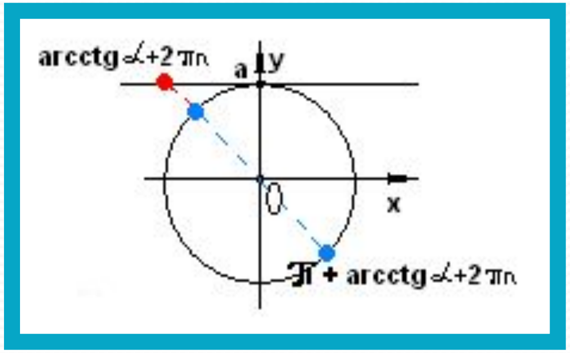
Уравнения вида

$$tgx = a$$

$$x = arcctg\alpha + \pi n, n \in Z.$$

$$ctgx = a$$

$$x = arctg\alpha + \pi n, n \in Z.$$



Нужно помнить, что при $a \in R$:

$$0 < arcctg\alpha < \pi; \; ctg(arcctg\alpha) = \alpha;$$

$$arcctg(-\alpha) = \pi - arcctg\alpha;$$

$$arctg\alpha + arcctg\alpha = \frac{\pi}{2}.$$

$$-\frac{\pi}{2} < arctg\alpha < \frac{\pi}{2};$$

$$arctg(-\alpha) = -arctg\alpha.$$

$$tg(arctg\alpha) = \alpha;$$

Укажите общую формулу, по которой находятся все корни уравнения

1 вариант

	1	2
	Cos x = - 1/2	Sin x = - ½
А	X = ±arccos(-1/2) + 2πK, KϵZ	X = $(-1/2)^n$ + π n, nϵZ
Б	X = ±arccos ½ + 2π m, mϵZ	X = ±arcsin(-1/2) + π n, nϵZ
В	Корней нет	X = $(-1)^{n+1}$ arcsin1/2 + π n, nϵZ
Г	X = ±2 π /3 + 2 π m, mϵZ	Корней нет
Д	X = π -arccos(-1/2) + 2 π n, nϵZ	X = - π /6+2 π t,tϵZ

2 вариант

	1	2
	Cos x = - 1/3	Sin x = - 1/4
А	X = π - arccos1/3 + 2 π t, tϵZ	X =$(-1)^{n+1}$arcsin1\4 + π n, nϵZ
Б	X = ±arccos1/3 + 2 π n, nϵZ	X = - arcsin(-1/4) + π n, nϵZ
В	X = ±arccos(-1/3) + 2 π m, mϵZ	X =$(-1)^n$arcsin(-1/4) + π n, nϵZ
Г	X = ±2 π /3+2 π n, nϵZ	X = $(-1/4)^n$+ π n, nϵZ
Д	X = - arccos(-1/3) +2 π n, nϵZ	X = - π /4+2 π t, tϵZ

Типы тригонометрических уравнений

Простейшие тригонометрические уравнения	$1)\sqrt{2}\cos x+1=0$ $2)\sin(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6})+1=0$
Уравнения, приводимые к квадратным	$3)5\cos^2 x+6\sin x-6=0$
Однородные тригонометрические уравнения	$4)\sin^2 x-4\sin x\cos x+3\cos^2 x=0$ $5)\sin\frac{x}{2}=\sqrt{3}\cos\frac{x}{2}$

Примеры решения тригонометрических уравнений

$$2\sin^2 x+\sin x-1=0$$

$$y=\sin x$$

$$2\sin^2 x + 3\cos x - 3 = 0$$

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$\sin 2x + \sin x = 0$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$2 \sin x \cos x + \sin x = 0$$

$$\sin x \left(2 \cos x + 1\right) = 0$$

$$4\,\mathrm{tg}\,x - 3\,\mathrm{ctg}\,x = 1$$

$$\mathrm{ctg}\,x = 1/\,\mathrm{tg}\,x$$

$$\sin^2 x - 6\sin x\cos x + 5\cos^2 x = 0$$

$$:\cos^2 x$$

$$tg^2 x - 6\, tg\, x + 5 = 0$$

$$y = tg\, x$$

$$\sqrt{3}\cos x + \sin x = \sqrt{3}$$

Один из способов решения такого уравнения состоит в том, что левую часть уравнения можно преобразовать по формуле:

$$a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2 + b^2}\cos(x - \varphi),$$ где

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \end{cases}$$

- $2\cos 3x + 4\sin(x/2) = 7$
- Укажите число корней уравнения на промежутке $[0; 2\pi]$:
- $\sin x = ?$ $\frac{1}{3}$

Для решения задач повышенной сложности в алгебре используются нестандартные методы решения.
Один из таких методов – метод МАЖОРАНТ.

Уметь решать задачи методом мажорант важно для более глубинного познания математики.

Очень удобно применять метод МАЖОРАНТ при решении нестанадартных уравнений, в левой и правой частях которых, находятся функции, имеющие различную природу.

Метод МАЖОРАНТ часто называют методом математической оценки или методом «mini-max»

Термин ***«мажоранта»*** происходит от французского слова *«majorante»*, от *«majorer»* — объявлять большим.

Мажорантой функции f(x) на множестве P называется такое **число M**, что либо **f(x) ≤ M** для всех x є P, либо **f(x) ≥ M** для всех x є P.

Многие известные нам функции имеют мажоранты.

Функции, имеющие мажоранты

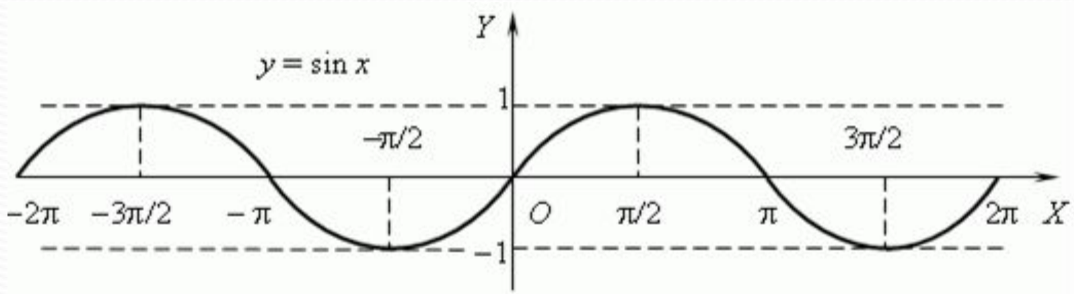
тригонометрические функции

Пример 1:

f(x)= sin x.

-1 ≤ sin x ≤ 1.

M = –1, M =1

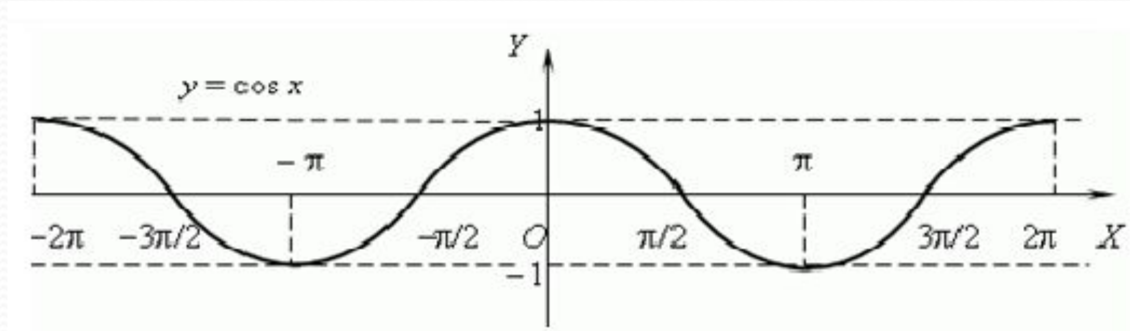


Пример 2:

f(x)= cos x

-1 ≤ cos x ≤ 1.

M = –1, M= 1

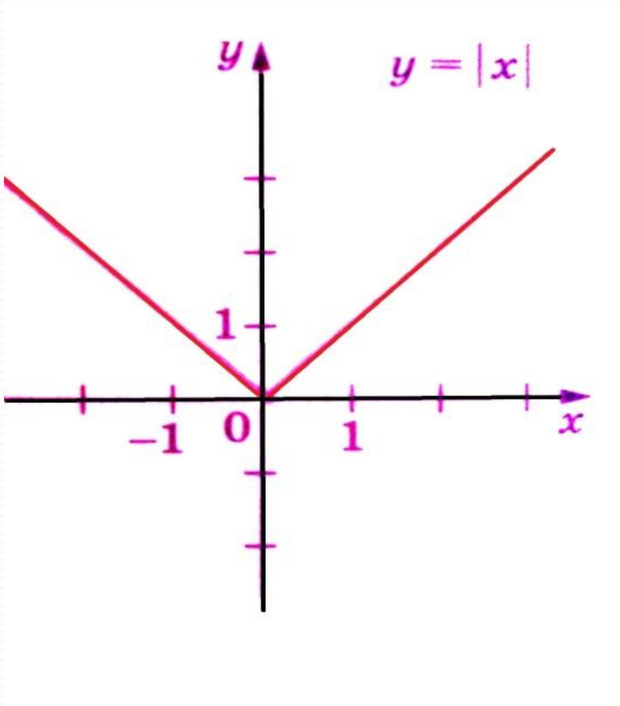


Функци,и имеющие мажоранты

пример 4: $f(x)= |x|$

по определению $|x| \geq 0$

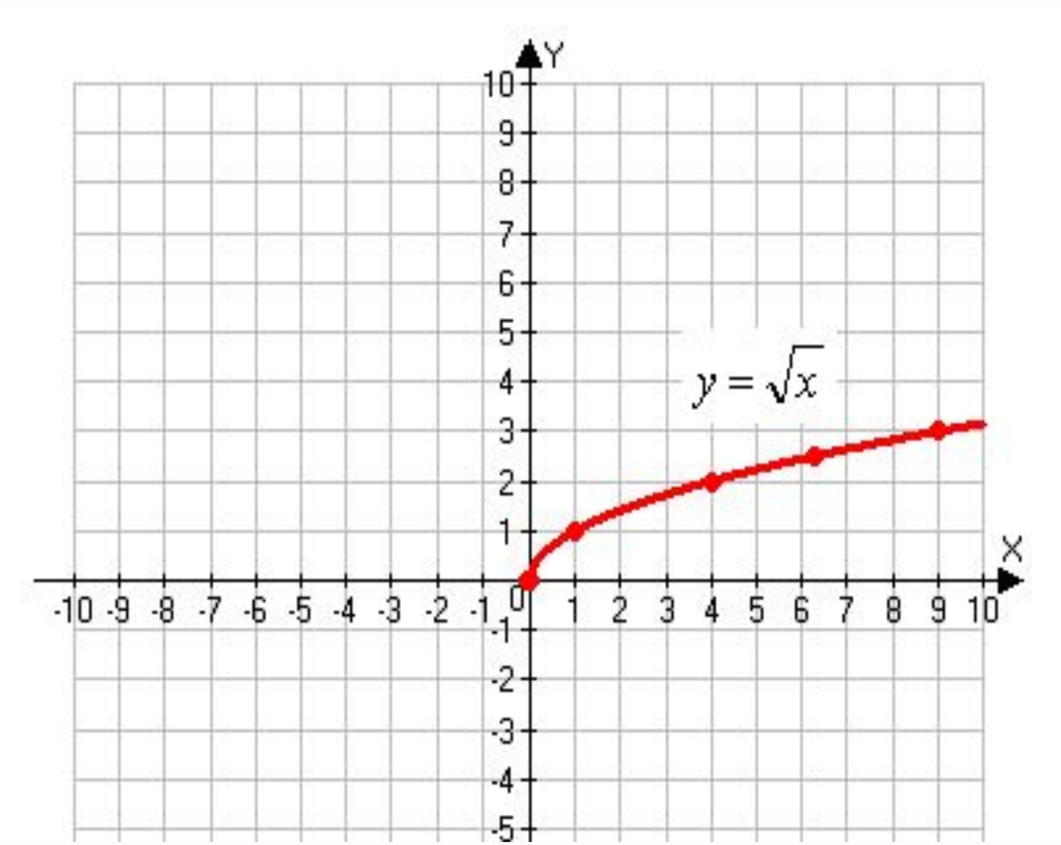
$M= 0$



Функции имеющие мажоранты

Пример 5. у = $\sqrt{f(x)} \geq 0$

М=0



2. Метод мажорант

Пусть мы имеем уравнение $f(x) = g(x)$

и существует такое число **M**, что для любого **X** из области определения функций f(x) и g(x)

Имеем: $f(x) \le M$ и $g(x) \ge M$ (или наоборот)

Тогда уравнение $f(x) = g(x)$ эквивалентно системе

$$\begin{cases} f(x) = M \\ g(x) = M \end{cases}$$

Приме
р

$$\sqrt{16-(4x+5)^2} = 4 + cos^2\frac{2\pi x}{5}$$

Оценим левую и правую части уравнения:

$$(4x+5)^2 \geq 0$$

$$-(4x+5)^2 \leq 0$$

$$16-(4x+5)^2 \leq 16$$

$$\sqrt{16-(4x+5)^2} \leq 4$$

$$0 \leq cos^2\frac{2\pi x}{5} \leq 1$$

$$4 \leq 4 + cos^2\frac{2\pi x}{5} \leq 5$$

Равенство будет выполняться, если обе части = 4.

$$\begin{cases} \sqrt{16-(4x+5)^2} = 4 \\ 4 + cos^2\frac{2\pi x}{5} = 4 \end{cases}$$

Решим *первое* уравнение системы:

$$\sqrt{16-(4x+5)^2}=4$$

$$16-(4x+5)^2=16$$

$$-(4x+5)^2=0$$

$$4x+5=0$$

$$x=-\frac{5}{4}$$

Проверим, является ли найденное число корнем *второго* уравнения системы:

$$4+cos^2\frac{2\pi\cdot\left(-\frac{5}{4}\right)}{5}=4$$

$$4+cos^2\left(\frac{-5\cdot\pi}{2\cdot 5}\right)=4$$

$$4+cos^2\frac{\pi}{2}=4$$

$$4+0=4$$

$4=4$ - верно

Ответ: $x=-\frac{5}{4}$

«***Уравнение*** – это золотой ключ, открывающий все математические сезамы»

(С. Коваль)