ЦЕНТР МАСС ТВЕРДОГО ТЕЛА. ИМПУЛЬС ТВЕРДОГО ТЕЛА.

Рис. 1 – Траектория движения центра масс однородной палки

Рис. 2 – Траектория движения центра масс палки с грузом

Центр масс- точка тела, которая движется так, как будто на нее действуют только внешние силы, причем ее положение зависит от того, как распределена масса внутри тела.

Центр масс, **центр инерции**, **барицентр** - геометрическая точка, характеризующая движение тела или системы частиц как целого. В общем случае центр масс не совпадает с **центром тяжести**, совпадение происходит только у систем материальных точек и тел с однородной по объёму плотностью в однородном гравитационном поле.

Центр масс тела не следует путать с центром тяжести.

Центром тяжести механической системы называется точка, относительно которой суммарный момент сил тяжести(действующих на систему) равен нулю. Например, в системе, состоящей из двух одинаковых масс, соединённых несгибаемым стержнем, и помещённой в неоднородное гравитационное поле (например, планеты), центр масс будет находиться в середине стержня, в то время как центр тяжести системы будет смещён к тому концу стержня, который находится ближе к планете (ибо вес массы $P = m \cdot g$ зависит от параметра гравитационного поля g), и, вообще говоря, даже расположен вне стержня.

Пример. Система состоит из двух материальных точек массами m_1 и m_2.

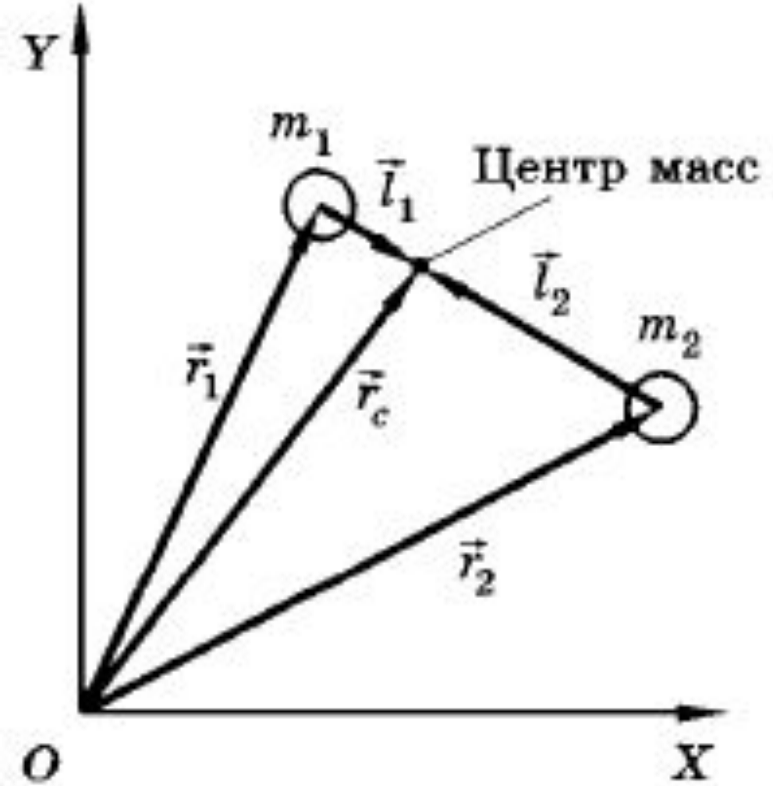

Рис. 3 – Система из двух материальных точек

Предположим, что

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{l_2}{l_1} \qquad (1)$$

где l_1 и l_2 - векторы, проведенные от точек к центру масс;

r_1 и r_2 - радиус-векторы точек;

r_c - радиус-вектор, проведенный из начала координат к центру масс точек.

Из рисунка 3 видно

$$\vec{r}_1 + \vec{l}_1 = \vec{r}_c$$
$$\vec{r}_2 + \vec{l}_2 = \vec{r}_c \qquad (2)$$

Умножим (2) на m_1 и m_2 соответственно

$$m_1\vec{r}_1 + m_1\vec{l}_1 = m_1\vec{r}_c \qquad (3)$$

$$m_2\vec{r}_2 + m_2\vec{l}_2 = m_2\vec{r}_c \qquad (4)$$

Сложим (3) и (4), получим

$$m_1\vec{r}_1 + m_1\vec{l}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_2\vec{l}_2 = m_1\vec{r}_c + m_2\vec{r}_c \qquad (5)$$

Так как

$$m_1\vec{l}_1 = -m_2\vec{l}_2$$

то (5) можно записать в виде

$$m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 = (m_1 + m_2)\vec{r}_c \qquad (6)$$

Из (6) следует, что для системы из двух тел положение центра масс задается радиус-вектором

$$\vec{r}_c = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} \qquad (7)$$

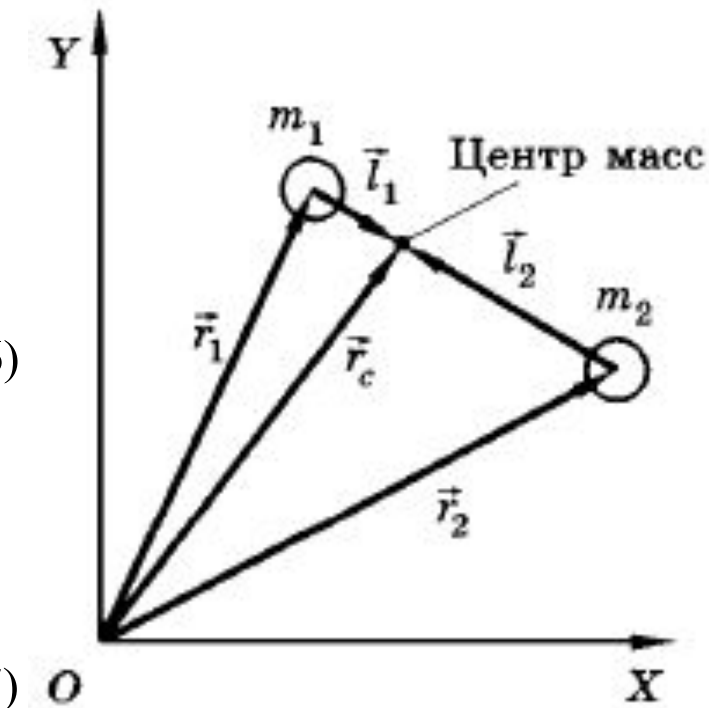

Рис. 3 – Система из двух материальных точек

Для системы из произвольного числа материальных точек

$$\boxed{\vec{r}_c = \frac{\sum_i m_i\vec{r}_i}{\sum_i m_i}} \qquad (8)$$

где m_i – масса i-го элемента;
r_i - радиус-вектор i-го элемента.

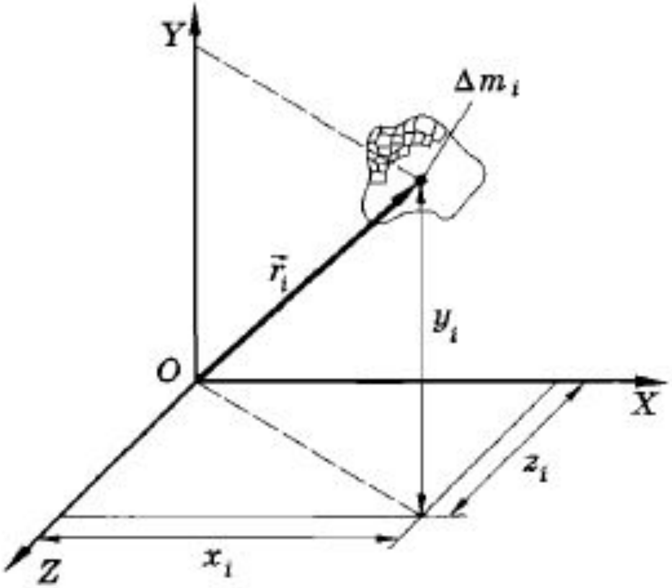

Рис. 4 – Положение материальной точки в трехмерной системе координат

$$x_c = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i} \quad y_c = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i} \quad z_c = \frac{\sum_i m_i z_i}{\sum_i m_i} \qquad (9)$$

где x_i, y_i, z_i - координаты одного из элементов тела.

Импульс твердого тела.

Импульс твердого тела равен импульсу материальной точки той же массы, скорость которой равна скорости центра масс тела.

По определению импульс твердого тела равен суммарному импульсу всех его точек.

Центр масс твердого тела движется так же как двигалась бы материальная точка, масса которой равна массе тела, под действием внешних сил, приложенных к данному телу.

$$\boxed{\vec{p} = m\vec{\upsilon}_c}$$

Импульс твердого тела равен суммарному импульсу всех его точек

$$\vec{p} = \sum_i m_i \vec{\upsilon}_i \tag{10}$$

где v_i – скорость отдельных точек тела.

С учетом (8) можно записать

$$m\vec{r}_c = \sum_i m_i \vec{r}_i \tag{11}$$

Путь за время Δt радиус-векторы изменятся на Δr

$$m\Delta\vec{r}_c = \sum_i m_i \Delta\vec{r}_i \tag{12}$$

Разделим левую и правую части выражения (12) на Δt

$$m\frac{\Delta\vec{r}_c}{\Delta t} = \sum_i m_i \frac{\Delta\vec{r}_i}{\Delta t} \tag{13}$$

$$m\vec{\upsilon}_c = \sum_i m_i \vec{\upsilon}_i \tag{14}$$

$$\boxed{\vec{p} = m\vec{\upsilon}_c} \tag{15}$$

Уравнение движения i-го элемента массой m_i

$$\frac{\Delta \vec{p}_i}{\Delta t} = \frac{\Delta(m_i \vec{\upsilon}_i)}{\Delta t} = \sum_{k \neq i} \vec{F}_{ik} + \vec{F}_i \qquad (16)$$

где $\vec{F}_i$ – внешняя сила,

$\sum\limits_{k \neq i} \vec{F}_{ik}$ – сумма внутренних сил, действующих на i-ый элемент тела со стороны других элементов

По III закону Ньютона

$$\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki} \qquad (17)$$

Тогда сумма всех внутренних сил равна 0

$$\vec{F}_{ik} + \vec{F}_{ki} = 0 \qquad (18)$$

Тогда (16) можно записать в виде

$$\sum_i \frac{\Delta(m_i \vec{\upsilon}_i)}{\Delta t} = \sum_i \vec{F}_i \qquad (19)$$

или

$$\Delta \frac{\sum\limits_i m_i \vec{\upsilon}_i}{\Delta t} = \sum_i \vec{F}_i \qquad (20)$$

С учетом (14)

$$\Delta \frac{m \vec{\upsilon}_c}{\Delta t} = \sum_i \vec{F}_i \qquad (21)$$

$$\frac{m \Delta \vec{\upsilon}_c}{\Delta t} = \sum_i \vec{F}_i \qquad (22)$$

$$\boxed{m \vec{a}_c = \sum_i \vec{F}_i} \qquad (23)$$

Следствие теоремы о движении центра масс:

Если сумма внешних сил равна 0, то центр масс покоится или движется равномерно и прямолинейно.

$$\frac{\Delta \vec{\upsilon}_c}{\Delta t} = 0 \qquad (24)$$

$$\Delta \vec{\upsilon}_c = const$$