МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ТРЁХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ТРЕМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ

Основные понятия

Рассмотрим систему трёх линейных уравнений с тремя неизвестными: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases}$

где - x_1, x_2, x_3 неизвестные, a_{ij} - коэффициенты ($i = 1,2,3;\ j = 1,2,3$),

b_1, b_2, b_3 - свободные члены.

<u>Тройка чисел $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ называется решением системы трёх линейных уравнений с тремя неизвестными</u>, если при подстановке их в уравнения системы вместо x_1, x_2, x_3 получают верные числовые равенства.

Если система трёх линейных уравнений имеет хотя бы одно решение, то она называется **<u>совместной</u>**.

Если система трёх линейных уравнений решений не имеет, то она называется **<u>несовместной</u>**.

Если система трёх линейных уравнений имеет единственное решение, то ее называют **<u>определенной</u>**; если решений больше одного, то – **<u>неопределенной</u>**.

Если свободные члены всех уравнений системы равны нулю , то система называется **<u>однородной</u>**, в противном случае – **<u>неоднородной</u>**.

Метод Крамера

Пусть нам требуется решить систему трёх линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases} \qquad (1)$$

в которой определитель системы (он составлен из коэффициентов при неизвестных) $\Delta \neq 0$, а определители $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, \Delta_{x_3}$ получаются из определителя системы Δ посредством замены свободными членами элементов соответственно первого, второго и третьего столбцов.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{32} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{32} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{32} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Теорема (правило Крамера). Если определитель системы $\Delta \neq 0$, то рассматриваемая система (1) имеет одно и только одно решение, причём

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \; x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \; x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta}.$$

Решите систему методом Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 9, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_3 = 2. \end{cases}$$

Решение:

1. Вычислим определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot(-2)\cdot 2 + 3\cdot 1\cdot 1 + (-1)\cdot 1\cdot 0 - (-1)\cdot(-2)\cdot 1 - 3\cdot 1\cdot 2 - 2\cdot 1\cdot 0 = -13.$$

Так как определитель системы отличен от нуля, то система имеет единственное решение, которое может быть найдено методом Крамера.

2. Составим и вычислим необходимые определители :

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 9 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 9\cdot(-2)\cdot 2 + 3\cdot 1\cdot 2 + (-1)\cdot 3\cdot 0 - (-1)\cdot(-2)\cdot 2 - 3\cdot 3\cdot 2 - 9\cdot 1\cdot 0 = -52,$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 2 & 9 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot 3\cdot 2 + 9\cdot 1\cdot 1 + (-1)\cdot 1\cdot 2 - (-1)\cdot 3\cdot 1 - 9\cdot 1\cdot 2 - 2\cdot 1\cdot 2 = 0,$$

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot(-2)\cdot 2 + 3\cdot 3\cdot 1 + 9\cdot 1\cdot 0 - 9\cdot(-2)\cdot 1 - 3\cdot 1\cdot 2 - 2\cdot 3\cdot 0 = 13.$$

Решите систему методом Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 9, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_3 = 2. \end{cases}$$

3. Находим неизвестные по формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta},\ x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta};$$

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = \frac{-52}{-13} = 4,$$

$$x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = \frac{0}{-13} = 0,$$

$$x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta} = \frac{13}{-13} = -1.$$

Ответ: $x_1 = 4,\ x_2 = 0,\ x_3 = -1.$

Метод Гаусса

Ранее рассмотренный метод можно применять при решении только тех систем, в которых число уравнений совпадает с числом неизвестных, причём определитель системы должен быть отличен от нуля. Метод Гаусса является более универсальным и пригоден для систем с любым числом уравнений. Он заключается в последовательном исключении неизвестных из уравнений системы.

Вновь рассмотрим систему трёх линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

Первое уравнение оставим без изменения, а из 2-го и 3-го исключим слагаемые, содержащие x_1. Для этого второе уравнение разделим на a_{21} и умножим на $-a_{11}$, а затем сложим с 1-ым уравнением. Аналогично третье уравнение разделим на a_{31} и умножим на $-a_{11}$, а затем сложим с первым. В результате исходная система примет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ \qquad\qquad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2, \\ \qquad\qquad a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 = b'_3. \end{cases}$$

Метод Гаусса

Теперь из последнего уравнения исключим слагаемое, содержащее x_2. Для этого третье уравнение разделим на a'_{32}, умножим на $-a'_{22}$ и сложим со вторым. Тогда будем иметь систему уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ \qquad\quad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2, \\ \qquad\qquad\qquad a''_{33}x_3 = b''_3. \end{cases}$$

Отсюда из последнего уравнения легко найти x_3, затем из 2-го уравнения x_2 и, наконец, из 1-го – x_1.

Решите систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 9, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_3 = 2. \end{cases}$$

Решение:

1. Первое уравнение оставим без изменения, а из 2-го и 3-го исключим слагаемые, содержащие x_1. Для этого второе уравнение умножим на $-\frac{a_{11}}{a_{21}} = -2$, а затем сложим с 1-ым уравнением.

Аналогично третье уравнение умножим на $-\frac{a_{11}}{a_{31}} = -2$, а затем сложим с первым.

В результате исходная система примет вид:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 9, \\ 7x_2 - 3x_3 = 3, \\ 3x_2 - 5x_3 = 5. \end{cases}$$

2. Теперь из последнего уравнения исключим слагаемое, содержащее x_2. Для этого третье уравнение умножим на $-\frac{a'_{22}}{a'_{32}} = -\frac{7}{3}$, и сложим со вторым. Тогда будем иметь систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 9, \\ 7x_2 - 3x_3 = 3, \\ 8\frac{2}{3}x_3 = -8\frac{2}{3}. \end{cases}$$

Решите систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 9, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_3 = 2. \end{cases}$$

3. На этом прямой ход метода Гаусса закончен, начинаем обратный ход.

Из последнего уравнения полученной системы уравнений находим x_3:

$$x_3 = \frac{-8\frac{2}{3}}{8\frac{2}{3}} = -1.$$

Из второго уравнения получаем: $x_2 = \frac{1}{7}(3 + 3x_3) = \frac{1}{7}(3 + 3 \cdot (-1)) = 0.$

Из первого уравнения находим оставшуюся неизвестную переменную и этим завершаем обратный ход метода Гаусса:

$$x_1 = \frac{1}{2}(9 - 3x_2 + x_3) = \frac{1}{2}(9 - 3 \cdot 0 + (-1)) = 4.$$

Ответ: $x_1 = 4,\ x_2 = 0,\ x_3 = -1.$

Матричный метод (с помощью обратной матрицы)

Рассмотрим систему трёх линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

В матричной форме записи эта система уравнений имеет вид $A \cdot X = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Пусть $|A| \neq 0$. Тогда существует обратная матрица A^{-1}. Если умножить обе части равенства $A \cdot X = B$ на A^{-1} слева, то получим формулу для нахождения матрицы-столбца неизвестных переменных, т.е. $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$

или $X = A^{-1} \cdot B$.

Так мы получили решение системы трёх линейных уравнений с тремя неизвестными матричным методом.

Решите систему матричным методом:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 9, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_3 = 2. \end{cases}$$

Решение:

1. Перепишем систему уравнений в матричной форме:

$$A \cdot X = B \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Так как

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) \cdot 2 + 3 \cdot 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \cdot 0 - (-1) \cdot (-2) \cdot 1 - 3 \cdot 1 \cdot 2 - 2 \cdot 1 \cdot 0 = -13,$$

то систему трёх линейных уравнений с тремя неизвестными можно решить матричным методом. С помощью обратной матрицы решение этой системы может быть найдено как:

$$X = A^{-1} \cdot B \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Решите систему матричным методом:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 9, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_3 = 2. \end{cases}$$

2. Построим обратную матрицу A^{-1} с помощью матрицы из алгебраических дополнений элементов матрицы A :

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^T = \frac{1}{-13} \cdot \begin{pmatrix} -4 & -1 & 2 \\ -6 & 5 & 3 \\ 1 & -3 & -7 \end{pmatrix}^T = -\frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} -4 & -6 & 1 \\ -1 & 5 & -3 \\ 2 & 3 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{13} & \frac{6}{13} & -\frac{1}{13} \\ \frac{1}{13} & -\frac{5}{13} & \frac{3}{13} \\ -\frac{2}{13} & -\frac{3}{13} & \frac{7}{13} \end{pmatrix},$$

где $A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4,\quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1,\quad A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2,$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -6,\quad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5,\quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1,\quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3,\quad A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -7.$$

Решите систему матричным методом:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 9, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_3 = 2. \end{cases}$$

3. Осталось вычислить матрицу неизвестных переменных, умножив обратную матрицу на матрицу-столбец свободных членов:

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} \frac{4}{13} & \frac{6}{13} & -\frac{1}{13} \\ \frac{1}{13} & -\frac{5}{13} & \frac{3}{13} \\ -\frac{2}{13} & -\frac{3}{13} & \frac{7}{13} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{13} \cdot 9 + \frac{6}{13} \cdot 3 + \left(-\frac{1}{13}\right) \cdot 2 \\ \frac{1}{13} \cdot 9 + \left(-\frac{5}{13}\right) \cdot 3 + \frac{3}{13} \cdot 2 \\ -\frac{2}{13} \cdot 9 + \left(-\frac{3}{13}\right) \cdot 3 + \frac{7}{13} \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $x_1 = 4,\ x_2 = 0,\ x_3 = -1$.