Переходные процессы

в цепях первого порядка

Переходные процессы

В линейной электрической цепи, содержащей реактивные элементы, при переходе от одного режима к другому возникает переходный процесс, характер и длительность которого определяется топологией схемы и параметрами элементов.

Переходные процессы обусловлены законами коммутации, частными случаями закона сохранения энергии.

Условия возникновения переходных процессов:

- а) наличие коммутации в цепи;
- б) скачкообразно меняются параметры цепи;
- в) скачкообразное изменение всей структуры цепи.

Законы коммутации

Первый закон:

- в ветви электрической цепи с катушками индуктивности ток и магнитный поток не могут измениться скачком, в первый момент после коммутации они сохраняют те значения, которые имели до коммутации.

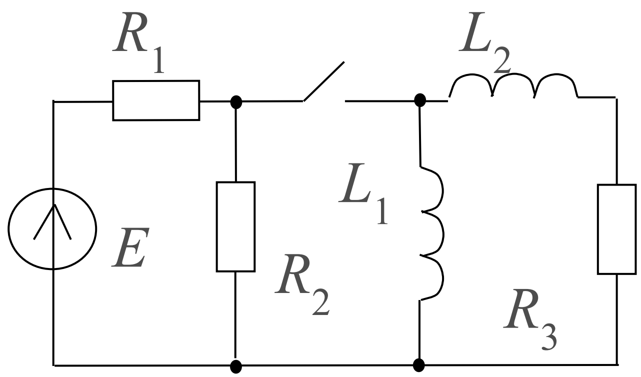
Второй закон:

- напряжение на обкладках конденсатора и его заряд не могут измениться скачком, и сразу после коммутации они сохраняют те значения, которые имели до коммутации

Начальные условия

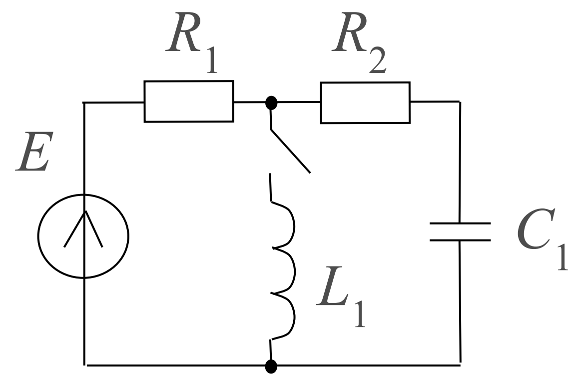
Начальными условиями называются те значения токов и напряжений, которые были на реактивных элементах к моменту начала переходного процесса.

при замыкании ключа



$i_{L1}(0)=i_{L2}(0)=0$

$u_{L1}(0)=u_{L2}(0)=0$



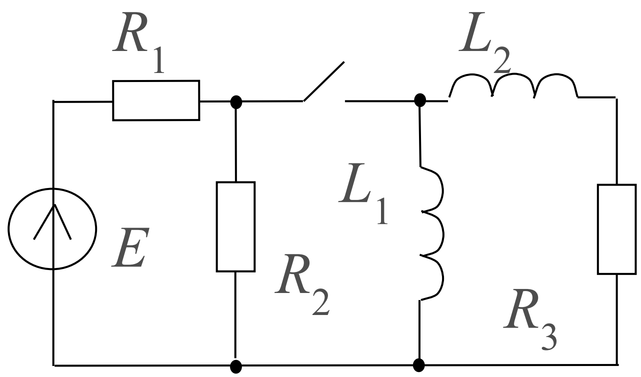
$i_{L1}(0)=0,\ i_{C1}(0)=0$

$u_{L1}(0)=0,\ u_{C1}(0)=E$

Начальные условия

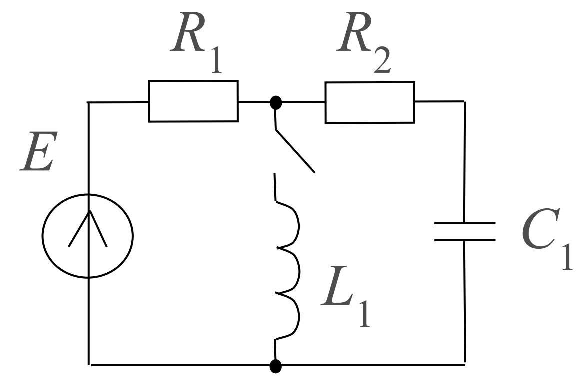
Начальными условиями называются те значения токов и напряжений, которые были на реактивных элементах к моменту начала переходного процесса.

при размыкании ключа



$i_{L1}(0) \neq 0,\ i_{L2}(0) \neq 0.$

$u_{L1}(0) \neq 0,\ u_{L2}(0) \neq 0.$



$i_{L1}(0) \neq 0,\ i_{C1}(0) = 0.$

$u_{L1}(0) = 0,\ u_{C1}(0) = 0.$

Математическое описание

Дифференциальное уравнение, описывающее переходный процесс в цепи с n независимыми накопителями энергии, имеет вид:

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \ldots + a_k \frac{d^k x}{dt^k} + \ldots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = f(t)$$

где x – искомая функция времени (напряжение, ток, потокосцепление и т.п.); $f(t)$ – известное внешнее воздействие (напряжение и (или) ток источника электрической энергии); a_k – k-й постоянный коэффициент, определяемый параметрами цепи.

Решение диф. уравнения

Решение дифференциального уравнения в общем случае имеет вид:

$$x = x_{пр} + x_{св}$$

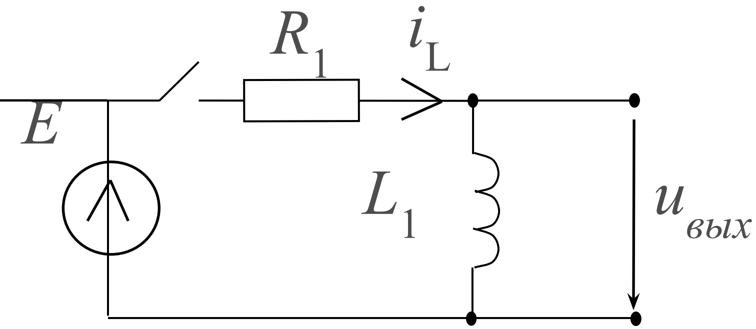
где $x_{пр}$ – принужденная составляющая, частное решение диф. уравнения (зависит от внешнего воздействия, определяется путем расчета стационарного режима работы схемы после окончания переходного процесса), $x_{св}$ – свободная составляющая, общее решение диф. уравнения с нулевой правой частью (соответствует режиму, когда внешние (принуждающие) силы (источники энергии) не воздействуют на цепь).

Классический метод расчета

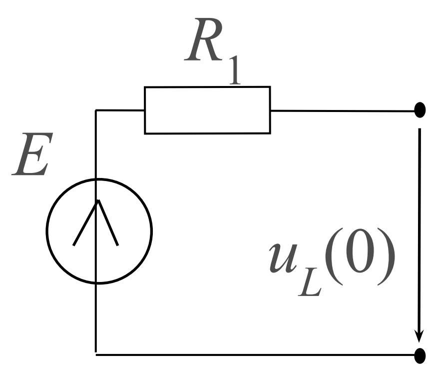
Алгоритм расчета переходных процессов классическим методом:

- 1) определение начальных условий;
- 2) составление системы уравнений в дифференциальной форме после начала переходного процесса;
- 3) составление характеристического уравнения и расчет его корней (метод Эйлера);
- 4) расчет принужденной составляющей;
- 5) запись общего решения как суммы принужденной и свободной составляющих, определение постоянных интегрирования, построение графиков.

Расчет схемы первого порядка



1.Определяем начальные условия:



$\boldsymbol{u_L(0) = E,}$
$\boldsymbol{i_L(0) = 0.}$

Расчет схемы первого порядка

3. Решение для однородного дифференциального уравнения первого порядка записывается в виде:

$$x_{св} = Ae^{pt}$$

Найдем производную для $x(t)$:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt}Ae^{pt} = pAe^{pt} = px(t)$$

Дифференциальную формулу напряжения на катушке можно представить в операторной форме:

$$u_L = L\frac{di_L}{dt} = Lpi_L$$

Расчет схемы первого порядка

Для заданной схемы:

$$i_L R_1 + L_1 p i_L = 0$$

Составляем характеристическое уравнение при отсутствии входного воздействия:

$$R_1 + L_1 p = 0$$

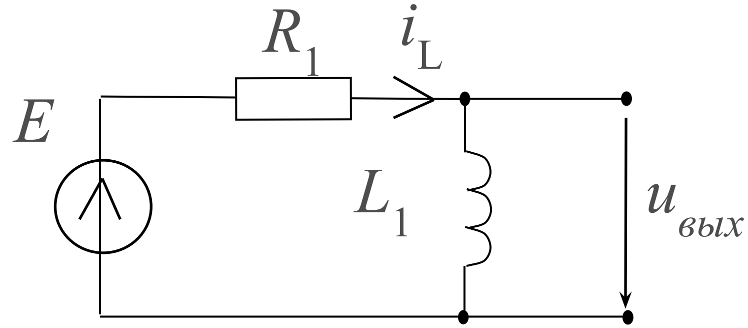
Находим корень: $$p = -\frac{R_1}{L_1}$$

Корень p определяет длительность переходного процесса через постоянную времени τ:

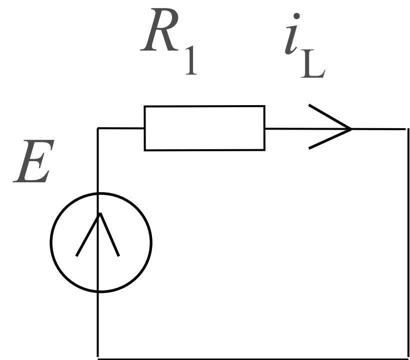
$$\tau = \frac{1}{|p|}$$

Расчет схемы первого порядка

4. Определяем принужденную составляющую:



После окончания переходного процесса, ток становится постоянным:



$\boldsymbol{U_L = 0,}$

$\boldsymbol{I_L = E/R.}$

Расчет схемы первого порядка

5. Записываем решение в общем виде:

$$i_L(t) = \frac{E}{R_1} + Ae^{pt}$$

Решаем уравнение при t = 0 (начальные условия):

$$i_L(0) = \frac{E}{R_1} + A \quad => \quad 0 = \frac{E}{R_1} + A \quad => \quad A = -\frac{E}{R_1}$$

Окончательное решение:

$$i_L(t) = \frac{E}{R_1} - \frac{E}{R_1} e^{-\frac{R_1}{L_1}t}$$

$$u_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt} = -\frac{EL_1 pe^{pt}}{R_1} = Ee^{-\frac{R_1}{L_1}t}$$

Расчет в SmathStudio

$E := 1$

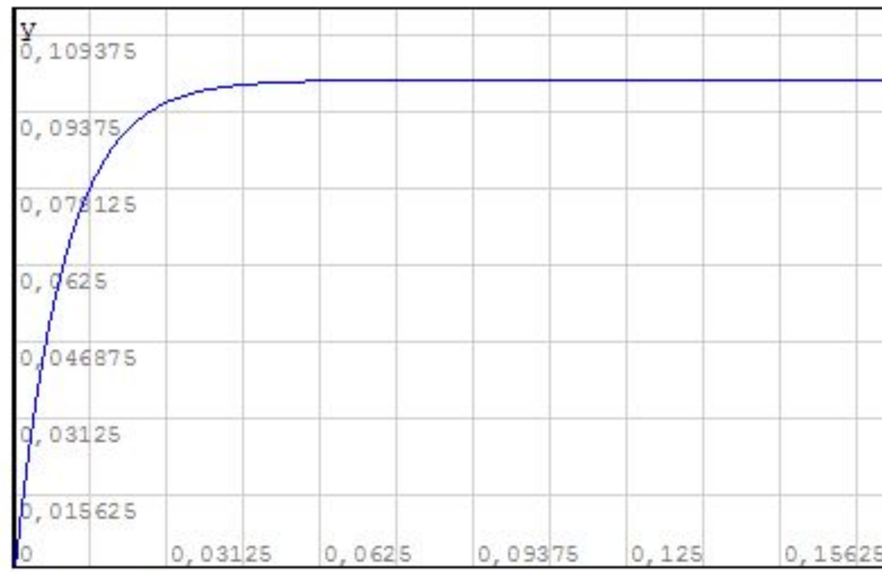
$R1 := 10$

$L1 := 0,1$

$p := -\dfrac{R1}{L1} = -100$

$$i1 = \frac{E}{R1} - \frac{E}{R1} \cdot \exp(p \cdot t)$$

$t = x$

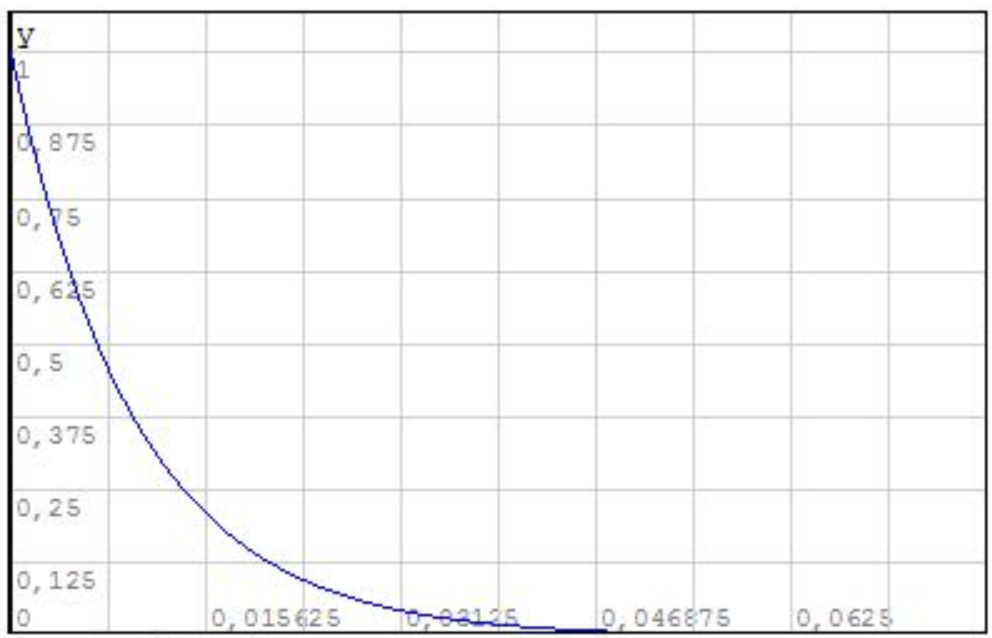


$$\frac{E}{R1} - \frac{E}{R1} \cdot \exp(p \cdot x)$$

Расчет в SmathStudio

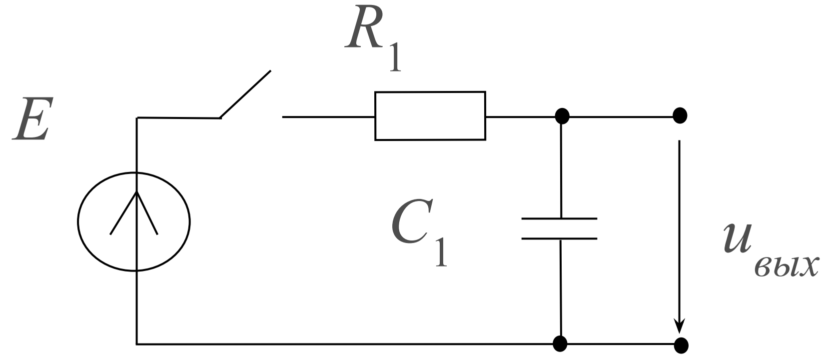
$$u = L1 \cdot \frac{d}{dt} i1 = L1 \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{E}{R1} - \frac{E}{R1} \cdot \exp(p \cdot t)\right)$$

$$u = -\frac{L1 \cdot p \cdot \exp(p \cdot t) \cdot E}{R1} = E \cdot \exp(p \cdot t)$$

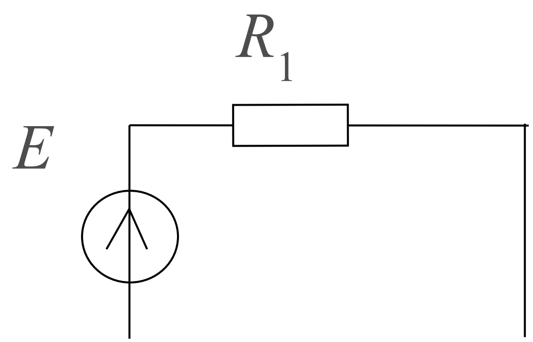


$E \cdot \exp(p \cdot x)$

Расчет схемы первого порядка



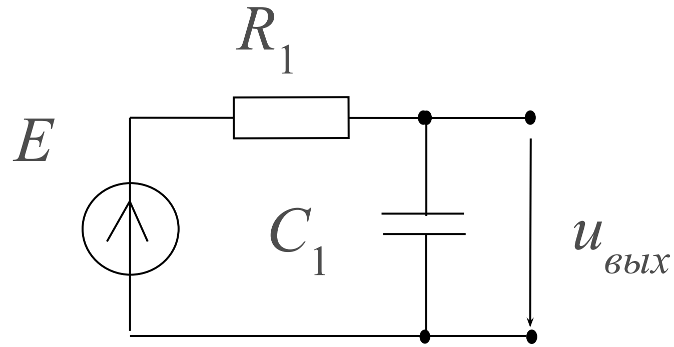
1.Определяем начальные условия:



$$\boldsymbol{u_C(0) = 0,}$$
$$\boldsymbol{i_C(0) = E/R_1.}$$

Расчет схемы первого порядка

2. Составляем уравнение по второму закону Кирхгофа для цепи после коммутации:



$$i_C = C\frac{du_C}{dt}$$

В общем виде: $u_{r1} + u_{C1} = E$

В дифференциальной форме: $C\frac{du_C}{dt}R_1 + u_C = E$

Расчет схемы первого порядка

3. Решение для однородного дифференциального уравнения первого порядка записывается в виде:

$$x_{св} = A^{pt}$$

Найдем интеграл для $x(t)$:

$$\int x dt = \int A^{pt} dt = \frac{Ae^{pt}}{p} = \frac{x(t)}{p}.$$

Дифференциальную формулу тока на емкости можно представить в операторной форме:

$$\frac{1}{C}\int x dt = \frac{1}{C}\int A^{pt} dt = \frac{Ae^{pt}}{pC} = \frac{1}{pC}x(t).$$

Расчет схемы первого порядка

Составляем характеристическое уравнение при отсутствии входного воздействия:

$$R_1 C_1 p + 1 = 0$$

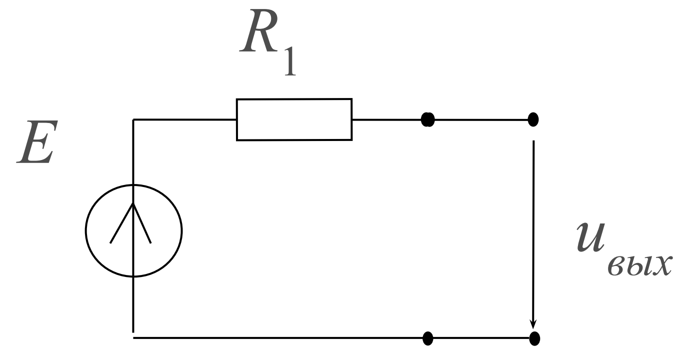
Находимое корень: $p = -\dfrac{1}{R_1 C_1}$

Корень p определяет длительность переходного процесса через постоянную времени τ:

$$\tau = \frac{1}{|p|}$$

Расчет схемы первого порядка

4. Определяем принужденную составляющую:



После окончания переходного процесса, напряжение на емкости становится равным входному воздействию:

$$U_C = E,$$
$$I_C = 0.$$

Расчет схемы первого порядка

5. Записываем решение в общем виде:

$$u_C(t) = E + Ae^{pt}$$

Решаем уравнение при t = 0 (начальные условия):

$$u_C(0) = E + A \quad => \quad 0 = E + A \quad => \quad A = -E$$

Окончательное решение:

$$u_C(t) = E - Ee^{-\frac{1}{R_1 C_1}t}$$

$$i_C(t) = C_1 \frac{du_C(t)}{dt} = -EC_1 pe^{pt} = \frac{E}{R_1} e^{-\frac{1}{R_1 C_1}t}$$

Расчет схемы первого порядка

$$E := 1$$

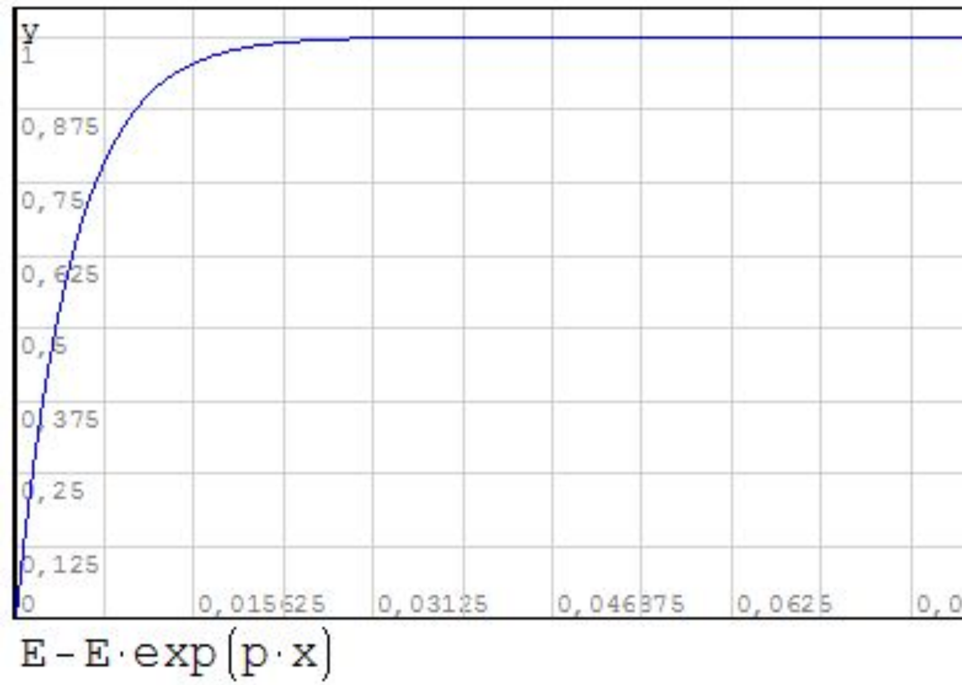
$$R1 := 10$$

$$C1 := 500 \cdot 10^{-6}$$

$$p := -\frac{1}{C1 \cdot R1} = -200$$

$$uc = E - E \cdot \exp(p \cdot t)$$

$$t = x$$



Расчет схемы первого порядка

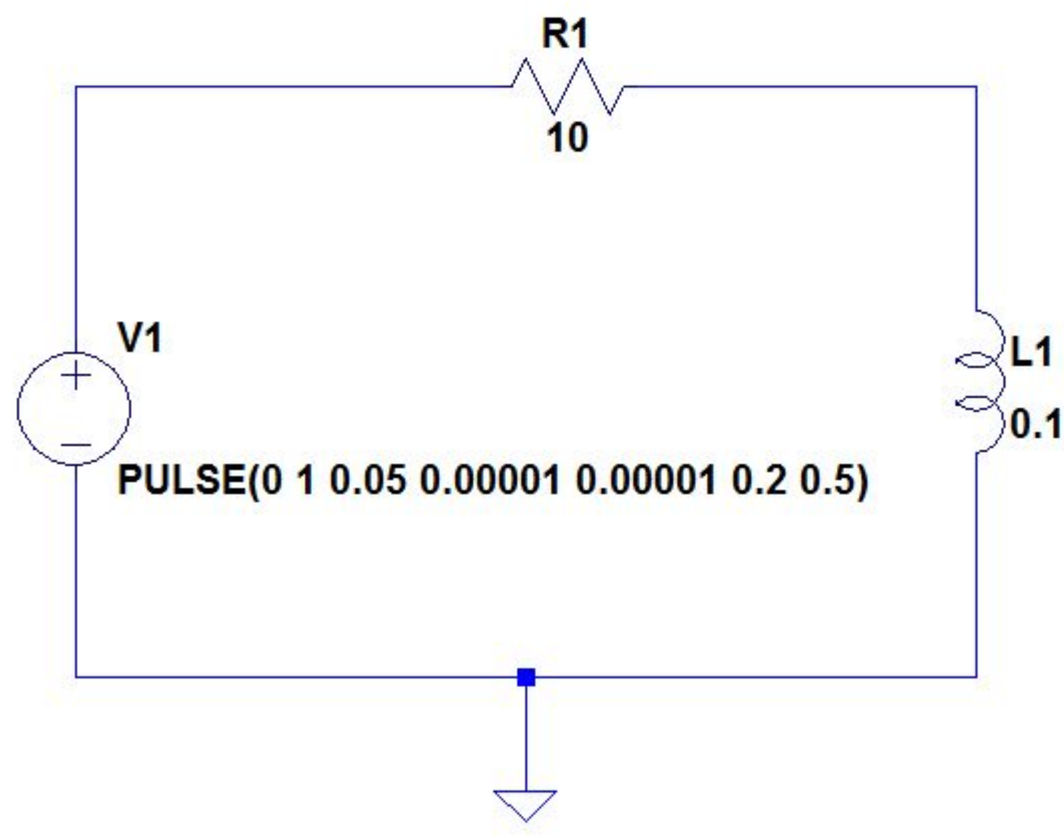
$$i = C1\cdot\frac{d}{dt}u = C1\cdot\frac{d}{dt}\left(E - E\cdot\exp(p\cdot t)\right)$$

$$i = -C1\cdot p\cdot\exp(p\cdot t)\cdot E = \frac{E}{R1}\cdot\exp(p\cdot t)$$

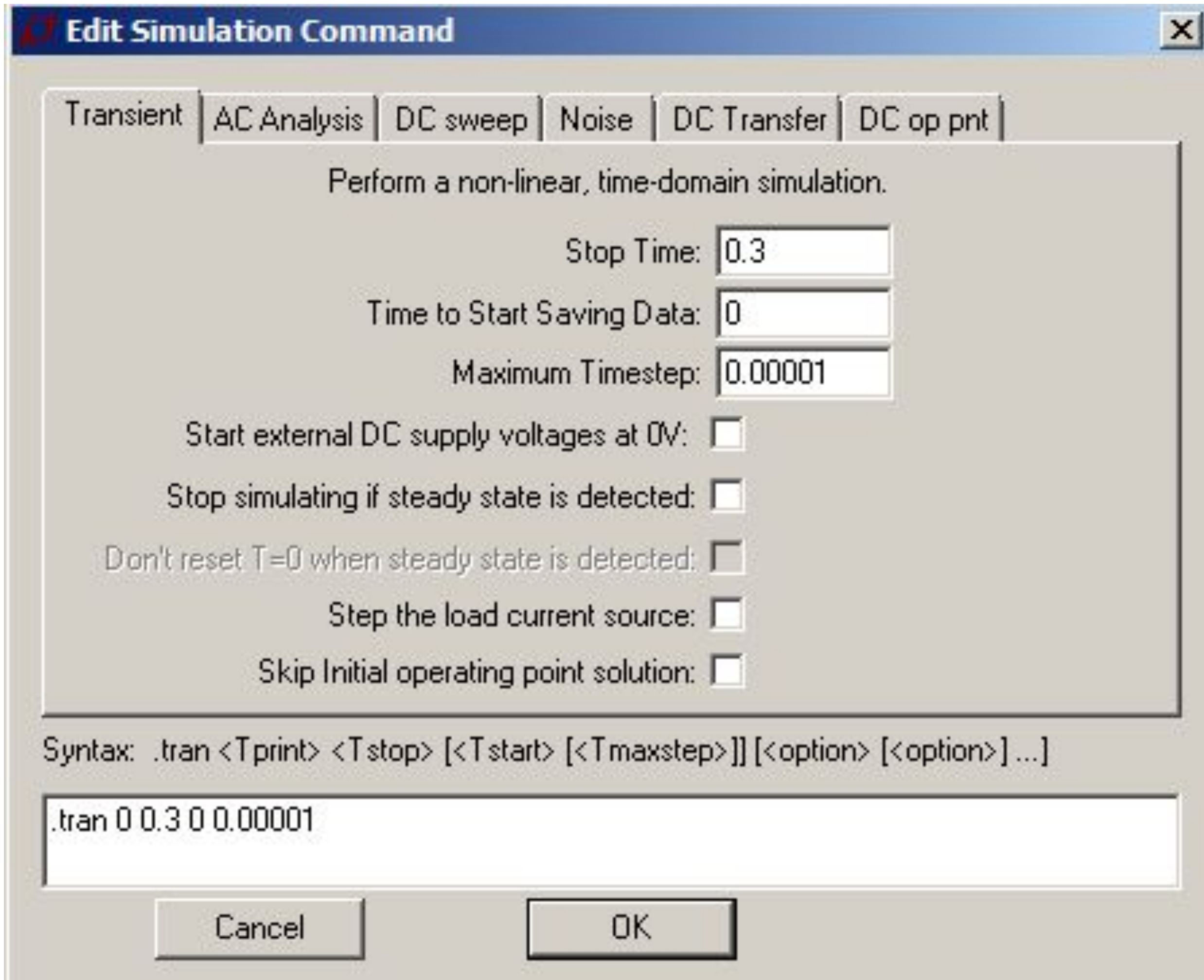
$$\frac{E}{R1}\cdot\exp(p\cdot x)$$

Анализ в LTSpice IV

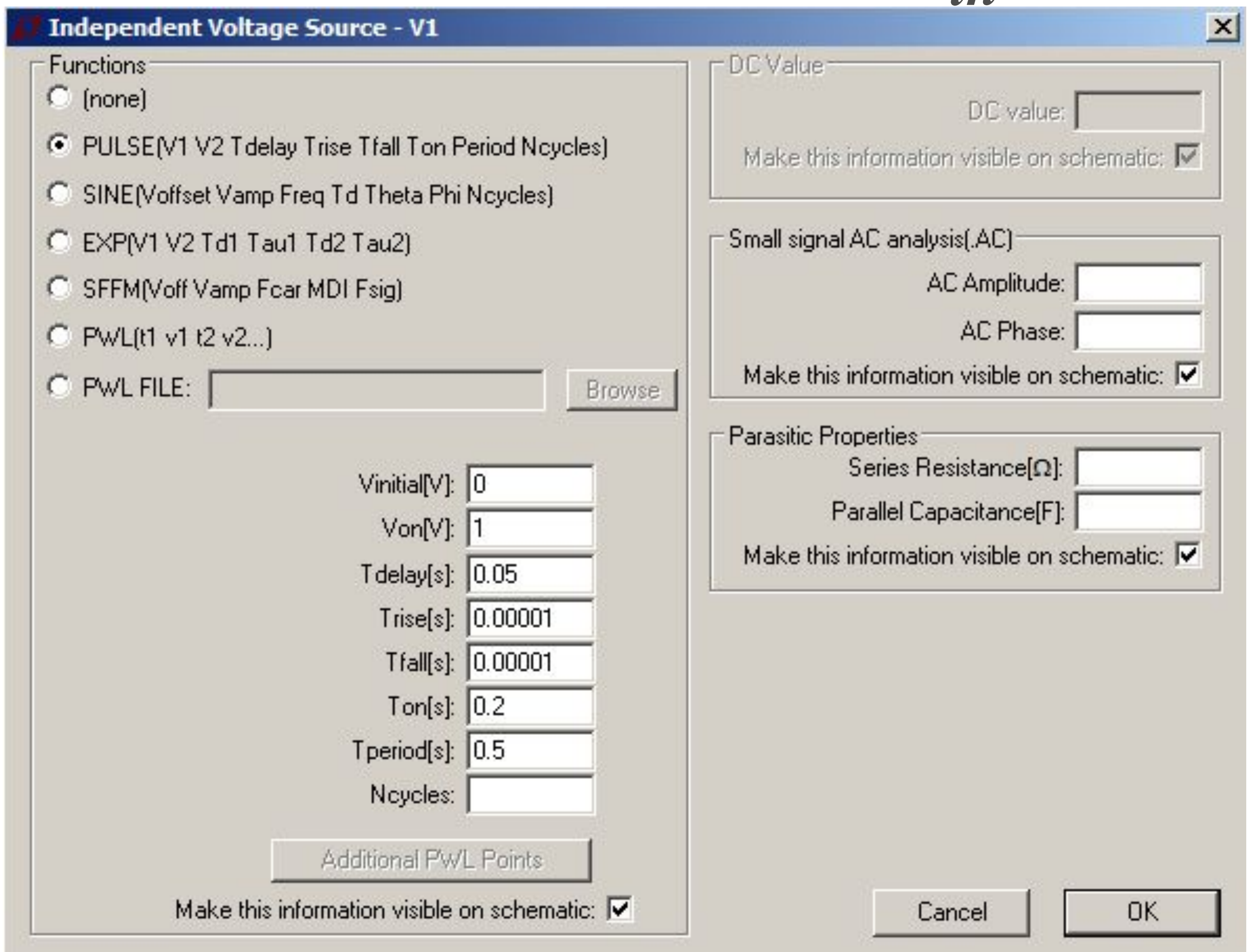
Цепь первого порядка с катушкой индуктивности:



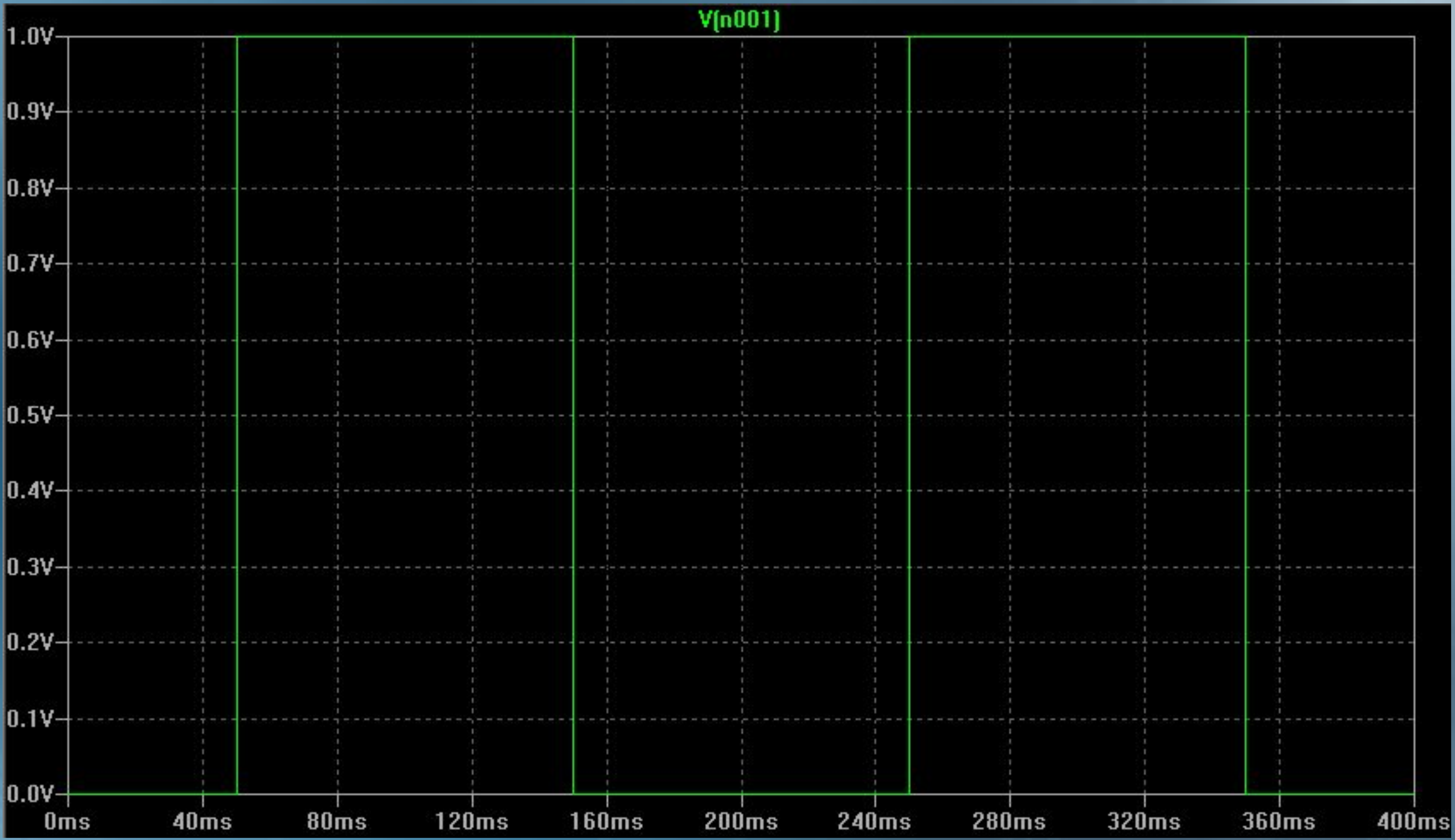
Настройки симуляции



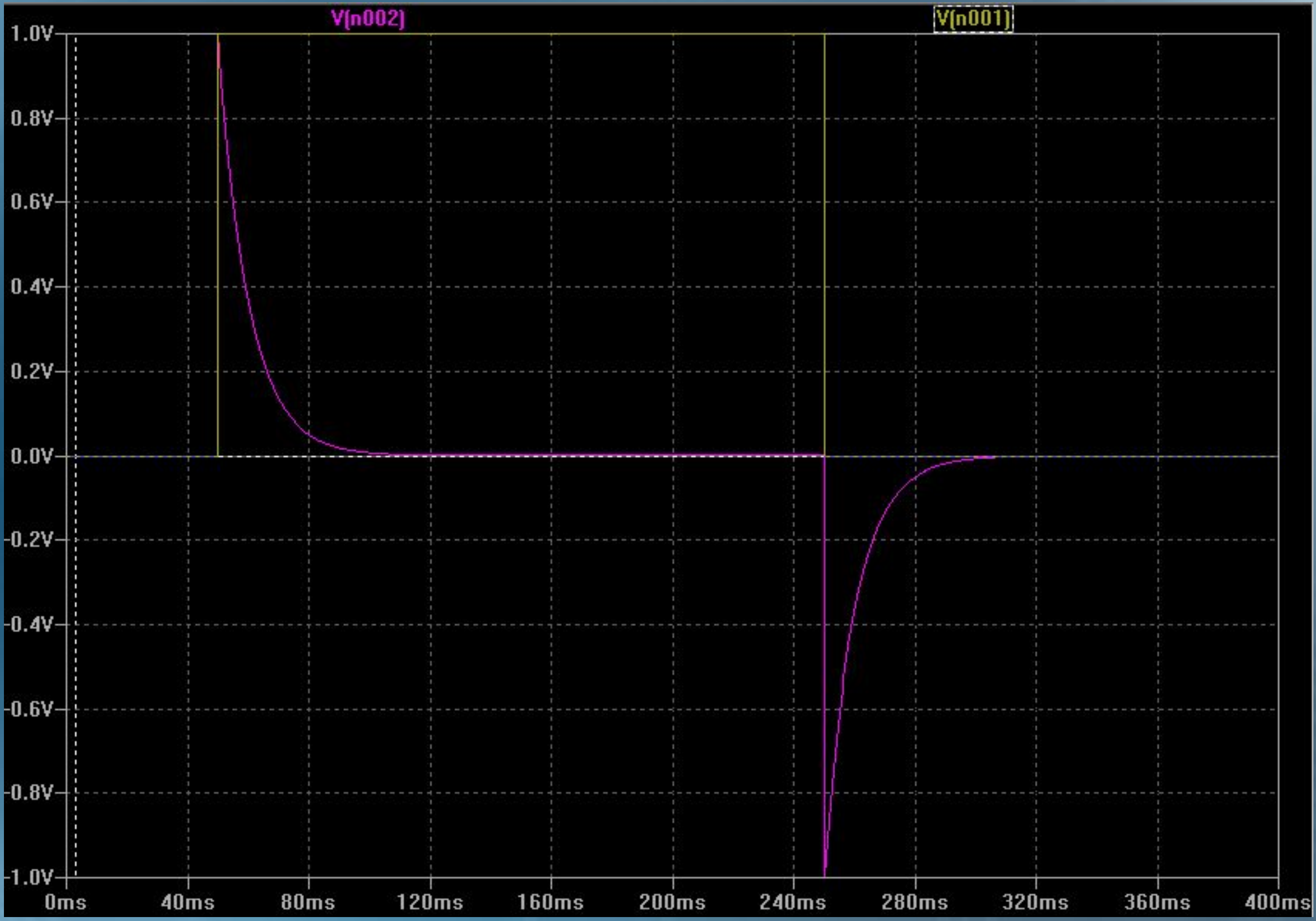
Настройки источника v_{in}



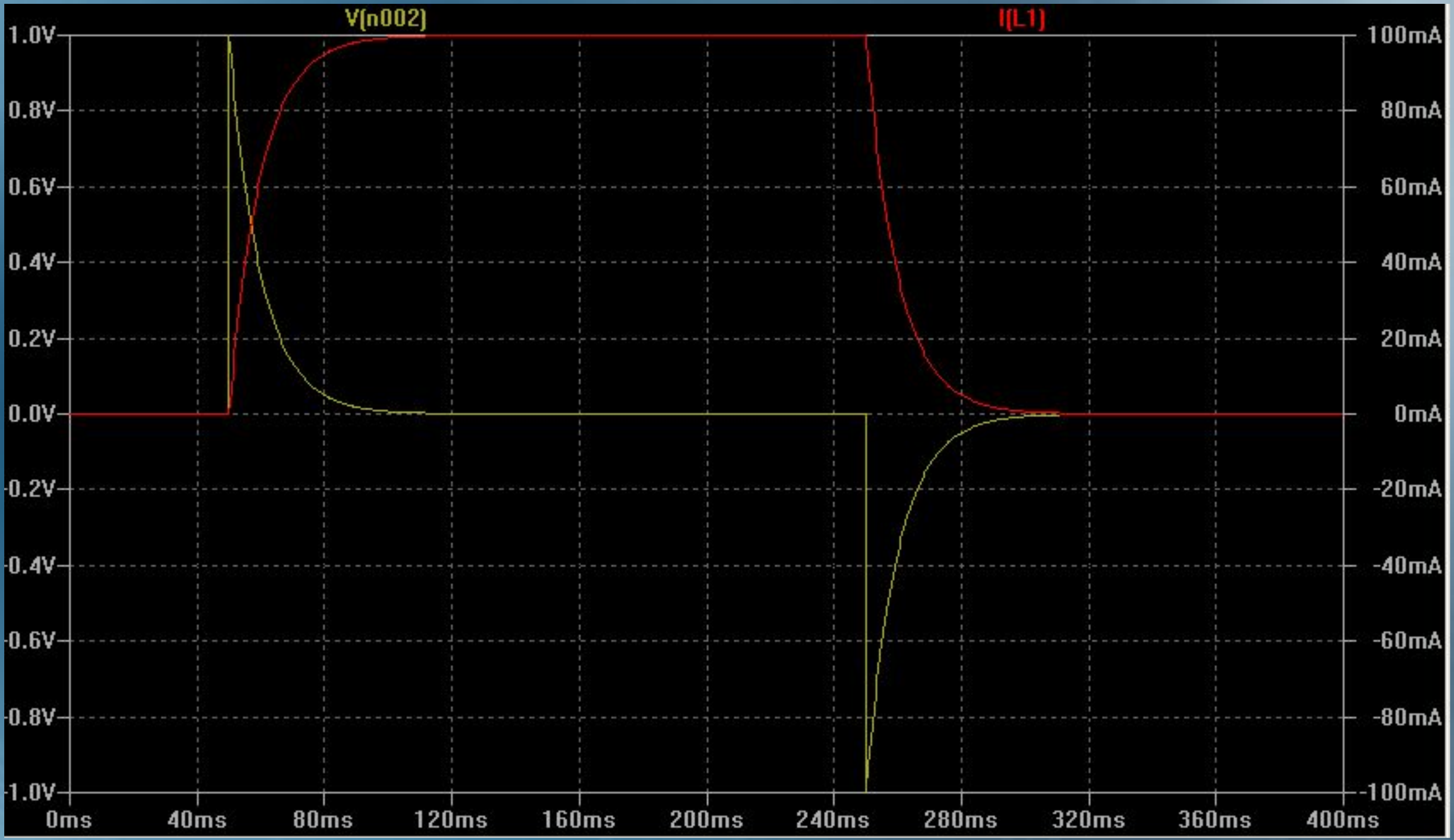
Напряжение источника v_{in}



Напряжения v_{in} и v_L

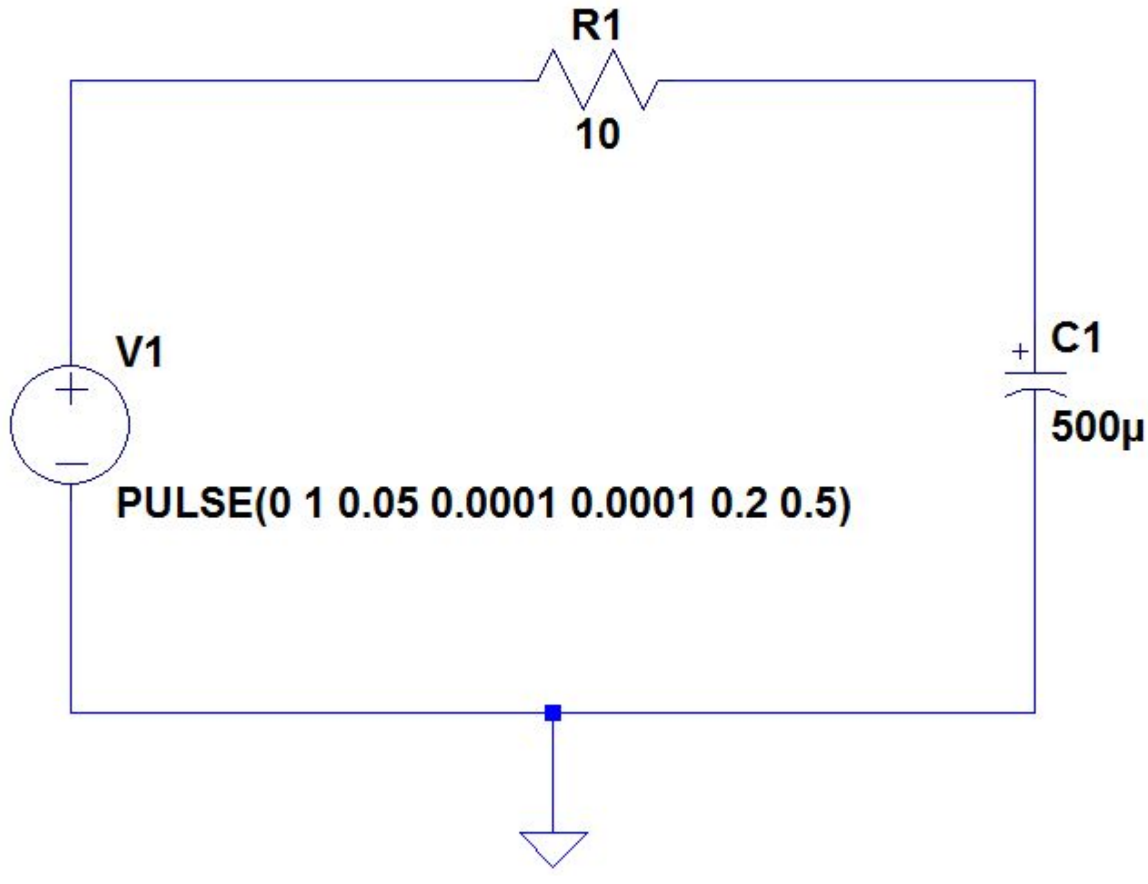


Напряжение и ток на катушке



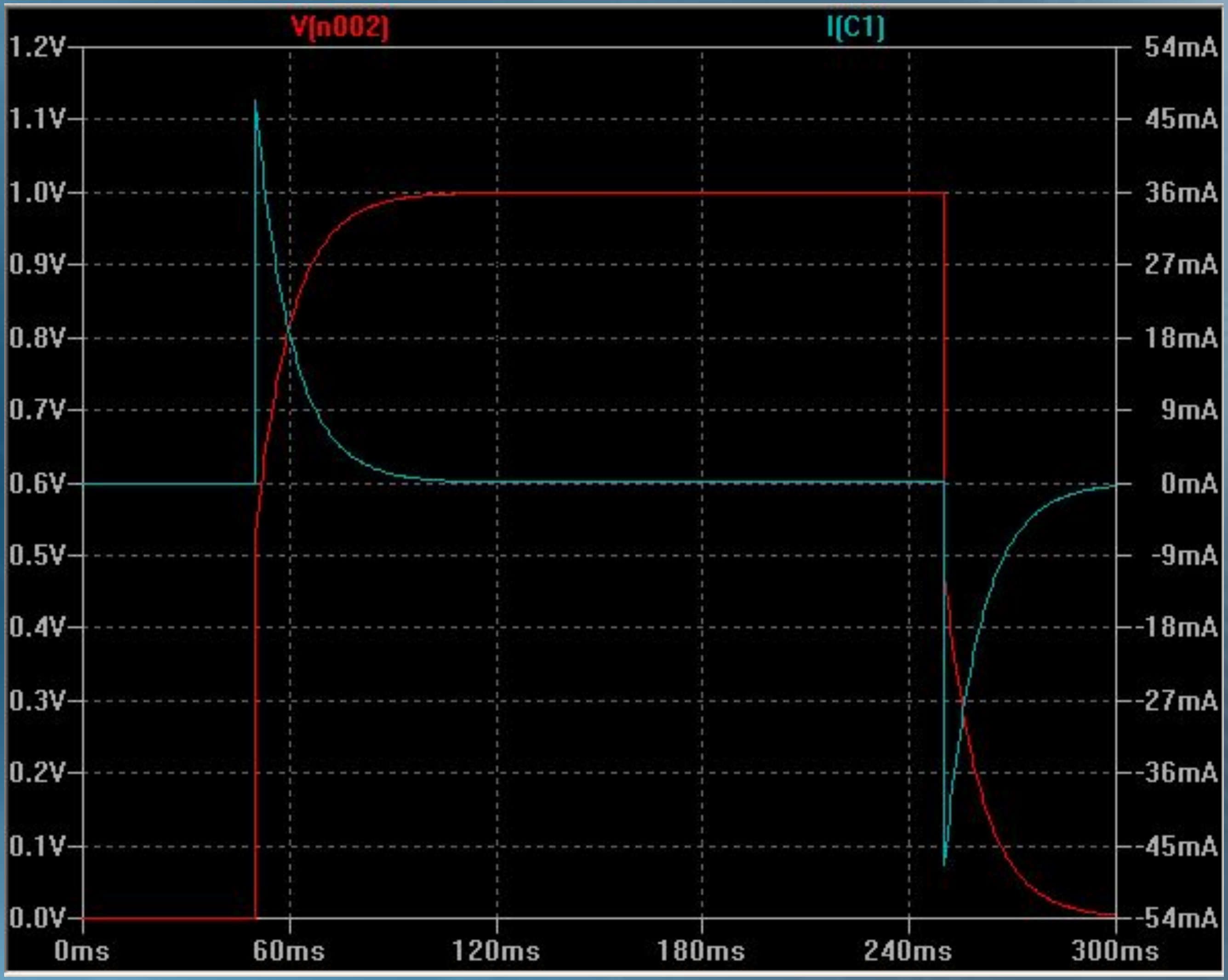
Анализ в LTSpice IV

Цепь первого порядка с конденсатором:



Напряжения v_{in} и v_C

Напряжение и ток на емкости



Операторный метод Хевисайда

Дифференциальное уравнение может быть представлено операторным изображением.

Сложные математические операции решения дифференциальных уравнений заменяются решением простых - алгебраических уравнений, записанных в операторной форме. При этом $f(t)$ называют оригиналом, $F(p)$ - изображением.

Полученные операторные уравнения решаются относительно комплексного переменного $F(p)$ для искомой функции.

Заключительным этапом расчета переходных процессов операторным методом является нахождение оригинала функции по известному изображению.

Преобразование Лапласа

Для преобразования функции вещественного переменного $f(t)$ в функцию комплексного переменного $F(p)$ пользуются преобразованием Лапласа:

$$F(P) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt$$

Между изображением и оригиналом нет равенства, а есть только соответствие:

$$f(t) = F(p) \quad \text{или} \quad F(p) = f(t)$$

Известно более 1500 оригиналов и соответствующих им изображений.

Оригиналы и их изображения

Оригинал	Изображение
A	$\dfrac{A}{p}$
$e^{\alpha t}$	$\dfrac{1}{p-\alpha}$
$e^{j(\omega t+\psi)}$	$\dfrac{e^{j\psi}}{p-j\omega}$
$1-e^{-\alpha t}$	$\dfrac{\alpha}{p(p-\alpha)}$

Оригиналы и их изображения

Оригинал	Изображение
$\sin \omega t$	$\dfrac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
$\sin(\omega t + \psi)$	$\dfrac{p \sin \psi + \omega \cos \psi}{p^2 + \omega^2}$
$\dfrac{df(t)}{dt}$	$pF(p) - f(0)$
$\int\limits_0^t f(t) dt$	$\dfrac{F(p)}{p}$

Формула разложения

Переход от изображения к оригиналу возможен по теореме разложения с помощью формулы:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} e^{p_k t}$$

Порядок расчета:

1) приравнивая $F_2(p)$ нулю, определяют корни p_1, p_2, p_3 и т. д.;

2) вычисляют производную знаменателя дроби $F(p)$ и подставляют в нее поочередно корни;

3) вычисляют числитель $F_1(p)$, подставляя в него корни;

4) рассчитывают оригинал $f(t)$, производя вычисления отдельных слагаемых и суммируя их.

Формула разложения

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} e^{p} k^{t}$$

Пример.

$$F(p) = \frac{120}{p^2 + 160p + 6000}$$

Обозначим $F_1(p)$=120; $F_2(p)$=p^2+160 p+6000.

Найдем корни многочлена знаменателя $F_2(p)$=0;

$$p_{1.2} = 80 \pm \sqrt{6400 - 6000};$$

$$p_1 = -60$$

$$p_2 = -100$$

Формула разложения

Применим формулу разложения:

$$F_1(p_1)=F_1(p_2)=F_1(p)=120$$

Производная знаменателя $F_2^{/}(p) = 2p + 160$.

Подставляем в нее поочередно корни:

$$F_2^{/}(p_1)=2(-60)+160=40$$

$$F_2^{/}(p_2)=2(-100)+160= -40$$

По формуле разложения найдем оригинал:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} e^{p_k t} = \frac{F_1(p_1)}{F_2'(p_1)} e^{p_1 t} + \frac{F_1(p_2)}{F_2'(p_2)} e^{p_2 t} =$$

$$= \frac{120}{40} e^{-60t} + \frac{120}{-40} e^{-100t} = 3e^{-60t} - 3e^{-100t}$$

Операторный метод расчета

Алгоритм расчета переходных процессов операторным методом:

- 1) определение начальных условий;
- 2) построение операторной схемы замещения и составление системы уравнений в операторной форме после начала переходного процесса;
- 3) получение операторных функций токов и напряжений в дробно-рациональном виде;
- 4) представление знаменателя в виде уравнения в однородной форме, расчет его корней;
- 5) переход от операторного изображения к оригиналу с помощью таблиц или формулы разложения, построение графиков.

Операторные изображения

Операторные изображения для токов и напряжений в электрической цепи:

$$u(t) \doteqdot U(p); \qquad i(t) \doteqdot I(p);$$

$$u_L(t) = L\frac{di}{dt} \doteqdot pLI(p) - Li(0) = U_L(p);$$

$$i_C(t) = C\frac{du}{dt} \doteqdot pCU(p) - Cu(0) = I_C(p);$$

$$U_C(p) = \frac{I_C(p) + Cu(0)}{pC} = \frac{I_C(p)}{pC} + \frac{u(0)}{p}.$$

Операторные изображения

При нулевых начальных условиях:

$$Li(0) = 0; \qquad \frac{u(0)}{p} = 0.$$

Операторные функции для тока на катушке и напряжения на емкости примут вид:

$$I_L(p) = pLU(p) = Z_L(p)U(p);$$

$$U_C(p) = \frac{I_C(p)}{pC} = \frac{I_C(p)}{Z_C(p)}.$$

По аналогии с комплексным сопротивлением вводится понятие операторного сопротивления:

$$Z_L(p) = pL; \qquad Z_C(p) = \frac{1}{pC}.$$

Операторные изображения

При ненулевых начальных условиях:

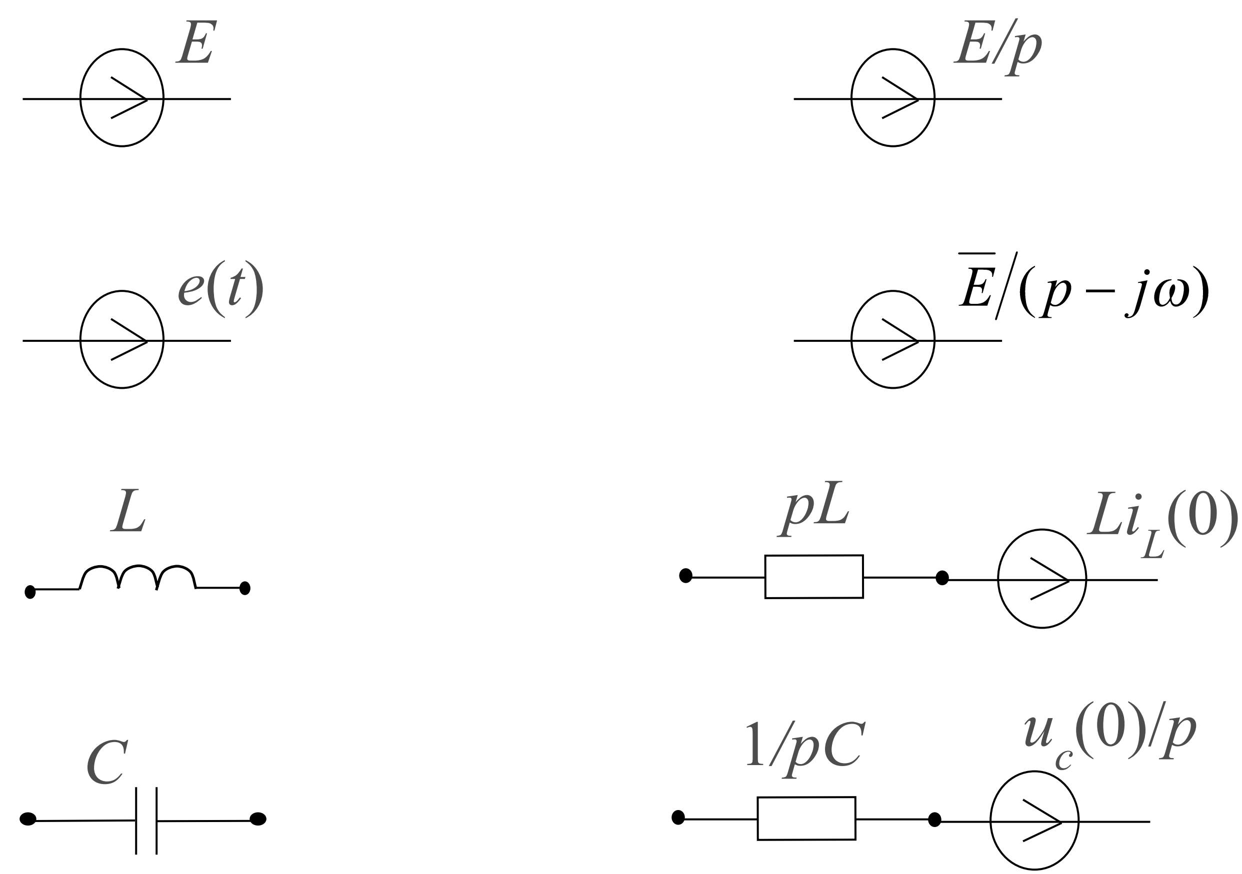
$$Li(0) \neq 0; \qquad \frac{u(0)}{p} \neq 0.$$

Эти слагаемые называют внутренними эдс. Они учитывают энергию запасенную в магнитном поле катушки и в электрическом поле конденсатора к моменту коммутации (при t=0).

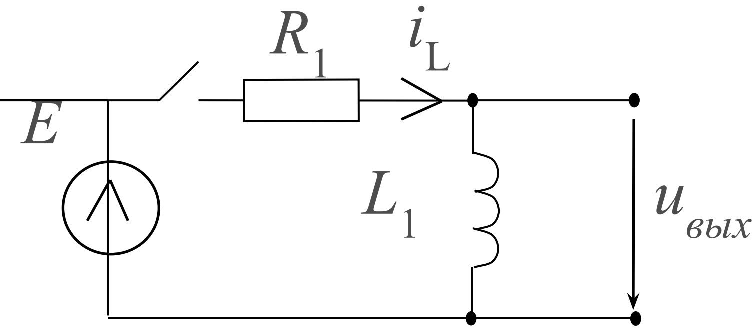
На схеме замещения их моделируют введением дополнительных источников эдс. Направление источника совпадает с направлением тока через катушку и противоположно направлению напряжения на конденсаторе.

Операторная схема замещения

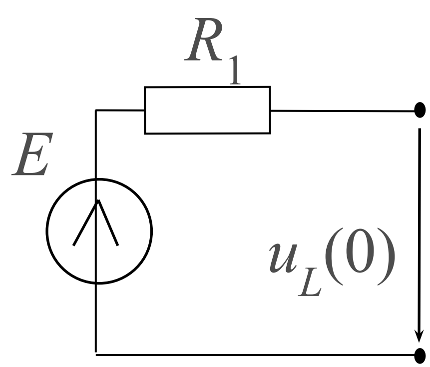
Элемент электрической цепи	Элемент операторной схемы замещения



Расчет схемы первого порядка



1.Определяем начальные условия:

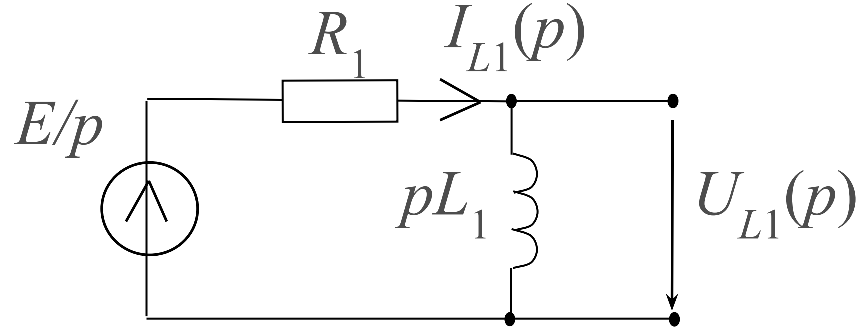


$\boldsymbol{u_L(0) = E,}$

$\boldsymbol{i_L(0) = 0.}$

Расчет схемы первого порядка

2. Составляем операторную схему замещения и уравнение по второму закону Кирхгофа:



$$U_{R1}(p) + U_{L1}(p) = \frac{E}{p}$$

$$I_{L1}(p) \cdot (R_1 + pL) = \frac{E}{p}$$

Расчет схемы первого порядка

3. Получение операторных функций тока и напряжений в дробно-рациональной форме:

$$I_{L1}(p) = \frac{E}{p(R_1 + pL_1)}.$$

$$U_{L1}(p) = \frac{E}{p(R_1 + pL_1)} \cdot pL_1 = \frac{EL_1}{R_1 + pL_1}.$$

$$U_{R1}(p) = \frac{E}{p(R_1 + pL_1)} \cdot R_1.$$

Расчет схемы первого порядка

4. Применяем теорему разложения для расчета оригинала тока. Находим корни:

$$p(R_1 + pL_1) = 0. \qquad p_1 = 0, \;\; p_2 = -\frac{R_1}{L_1}.$$

Вычисляем производную знаменателя:

$$F_2' = R_1 + 2pL_1.$$

5. Находим оригинал тока по формуле разложения:

$$i_{L1}(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} e^{p_k t} = \frac{F_1(p_1)}{F_2'(p_1)} e^{p_1 t} + \frac{F_1(p_2)}{F_2'(p_2)} e^{p_2 t} =$$

$$= \frac{E}{R_1} + \frac{E}{R_1 + 2\left(-\frac{R_1}{L_1}\right) L_1} e^{-\frac{R_1}{L_1}t} = \frac{E}{R_1} - \frac{E}{R_1} e^{-\frac{R_1}{L_1}t}$$

Расчет схемы первого порядка

Применяем теорему разложения для расчета оригинала функции напряжения. Находим корни:

$$R_1 + pL_1 = 0. \qquad p_1 = -\frac{R_1}{L_1}.$$

Вычисляем производную знаменателя:

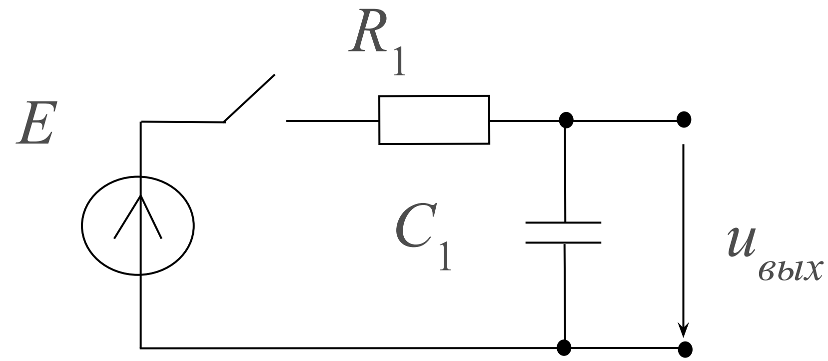
$$F_2' = L_1.$$

Находим оригинал напряжения по формуле разложения:

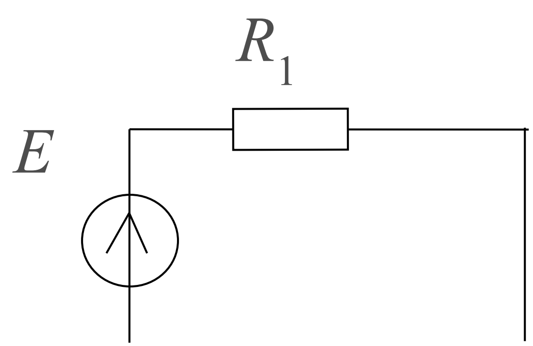
$$u_{L1}(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} e^{p_k t} = \frac{F_1(p_1)}{F_2'(p_1)} e^{p_1 t} =$$

$$= \frac{EL_1}{L_1} e^{-\frac{R_1}{L_1}t} = Ee^{-\frac{R_1}{L_1}t}$$

Расчет схемы первого порядка



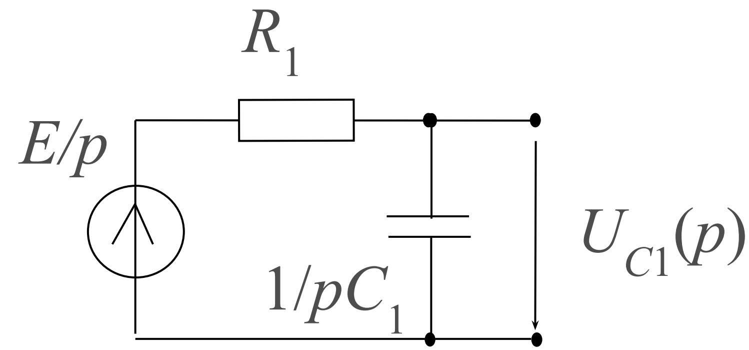
1.Определяем начальные условия:



$$\boldsymbol{u_C(0) = 0,}$$
$$\boldsymbol{i_C(0) = E/R_1.}$$

Расчет схемы первого порядка

2. Составляем операторную схему замещения и уравнение по второму закону Кирхгофа:



$$U_{R1}(p)+U_{C1}(p)=\frac{E}{p}$$

$$I_{C1}(p)\cdot\left(R_1+\frac{1}{pC_1}\right)=\frac{E}{p}$$

Расчет схемы первого порядка

3. Получение операторных функций тока и напряжений в дробно-рациональной форме:

$$I_{C1}(p) = \frac{E}{p\left(R_1 + \frac{1}{pC_1}\right)} = \frac{EC_1}{pR_1C_1 + 1}.$$

$$U_{C1}(p) = \frac{EC_1}{pR_1C_1 + 1} \cdot \frac{1}{pC_1} = \frac{E}{p(pR_1C_1 + 1)}.$$

$$U_{R1}(p) = \frac{E}{p\left(R_1 + \frac{1}{pC_1}\right)} \cdot R_1 = \frac{EC_1R_1}{pR_1C_1 + 1}.$$

Расчет схемы первого порядка

4. Применяем теорему разложения. Находим корни:

$$p(pR_1C_1+1)=0. \qquad p_1=0,\ \ p_2=-\frac{1}{R_1C_1}.$$

Вычисляем производную знаменателя:

$$F_2'=1+2pC_1R_1.$$

5. Находим оригинал напряжения:

$$u_{C1}(t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)}e^{p_kt}=\frac{F_1(p_1)}{F_2'(p_1)}e^{p_1t}+\frac{F_1(p_2)}{F_2'(p_2)}e^{p_2t}=$$

$$=E+\frac{E}{1+2\left(-\frac{1}{R_1C_1}\right)R_1C_1}e^{-\frac{1}{R_1C_1}t}=E-Ee^{-\frac{1}{R_1C_1}t}.$$

Расчет схемы первого порядка

Применяем теорему разложения для расчета оригинала функции тока. Находим корни:

$$pR_1C_1 + 1 = 0. \qquad p_1 = -\frac{1}{R_1C_1}.$$

Вычисляем производную знаменателя:

$$F_2' = R_1C_1.$$

Находим оригинал тока по формуле разложения:

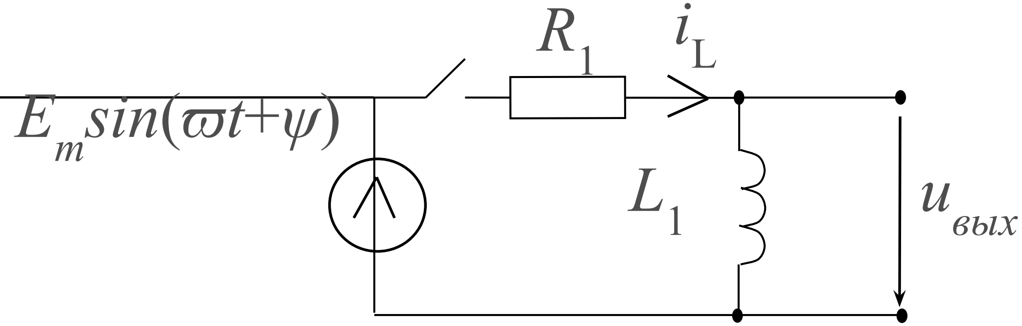
$$i_{C1}(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} e^{p_k t} = \frac{F_1(p_1)}{F_2'(p_1)} e^{p_1 t} =$$

$$= \frac{EC_1}{R_1C_1} e^{-\frac{1}{R_1C_1}t} = \frac{E}{R_1} e^{-\frac{1}{R_1C_1}t}.$$

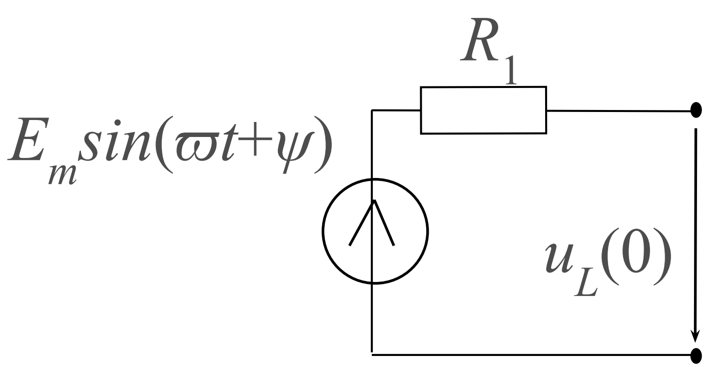
Переходной процесс в цепи переменного тока

Алгоритм расчета переходных процессов в цепях переменного синусоидального тока остается неизменным. Следует учитывать, что начальные условия и вынужденное значение переменной представляются в комплексной форме. При этом, свободная составляющая рассчитывается точно так же, как и в цепи постоянного тока, поскольку общее решение дифференциального уравнения не зависит от внешнего воздействия.

RL-цепь на переменном токе



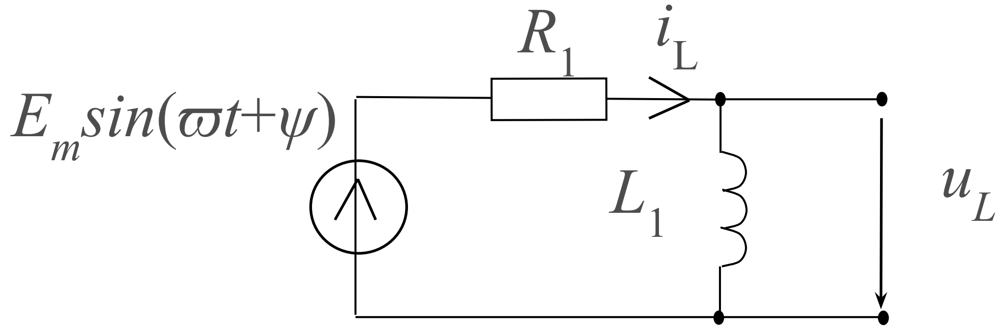
1.Определяем начальные условия:



$\boldsymbol{u_L(0) = E_m sin\psi}$,
$\boldsymbol{i_L(0) = 0}$.

RL-цепь на переменном токе

2. Составляем уравнение по второму закону Кирхгофа для цепи после коммутации:



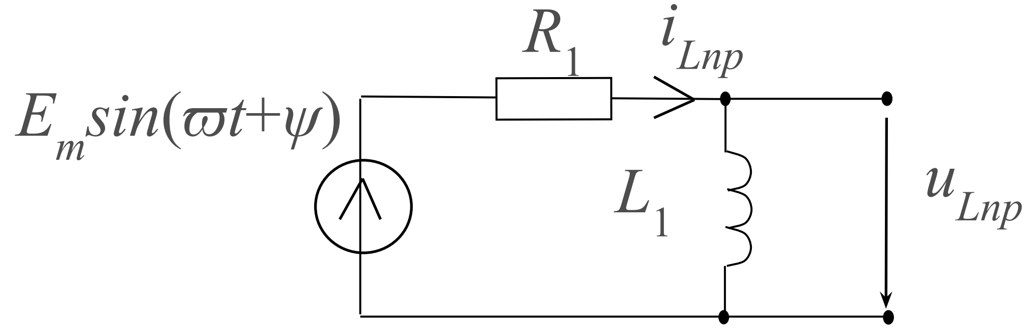
$$Ri + L\frac{di}{dt} = E_m \sin(\omega t + \psi).$$

3. Характеристическое уравнение и корень не зависят от характера внешнего воздействия:

$$p = -\frac{R_1}{L_1}.$$

RL-цепь на переменном токе

4. Определяем принужденную составляющую:



После окончания переходного процесса, ток на катушке рассчитывается по методу комплексных амплитуд:

$$\bar{I}_{\text{пр}} = \frac{E_m e^{j\psi}}{R_1 + j\omega L_1}.$$

RL-цепь на переменном токе

$$Z_m = \sqrt{(R_1)^2 + (\omega L_1)^2}; \quad \psi_Z = arctg\left(\frac{\omega L_1}{R_1}\right).$$

$$\overline{I}_{\text{пр}} = \frac{E_m e^{j\psi_E}}{Z_m e^{j\psi_Z}} = \frac{E_m}{Z_m} e^{j(\psi_E - \psi_Z)}.$$

$$I_m = \frac{E_m}{Z_m}, \qquad \varphi = \psi_E - \psi_Z.$$

$$\overline{I}_{\text{пр}} = I_m e^{j\varphi}, \qquad i_{np}(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi).$$

RL-цепь на переменном токе

5. Записываем решение в общем виде:

$$i_L(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi) + Ae^{pt}.$$

Решаем уравнение при t = 0 (начальные условия):

$$A = -I_m \sin(\varphi).$$

Окончательное решение:

$$i_L(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi) -$$

$$- I_m \sin(\varphi) e^{-\frac{R_1}{L_1} t}.$$

RL-цепь на переменном токе

Дифференцируем формулу для нахождения напряжения на катушке:

$$u_L(t) = L\frac{di_L}{dt} =$$

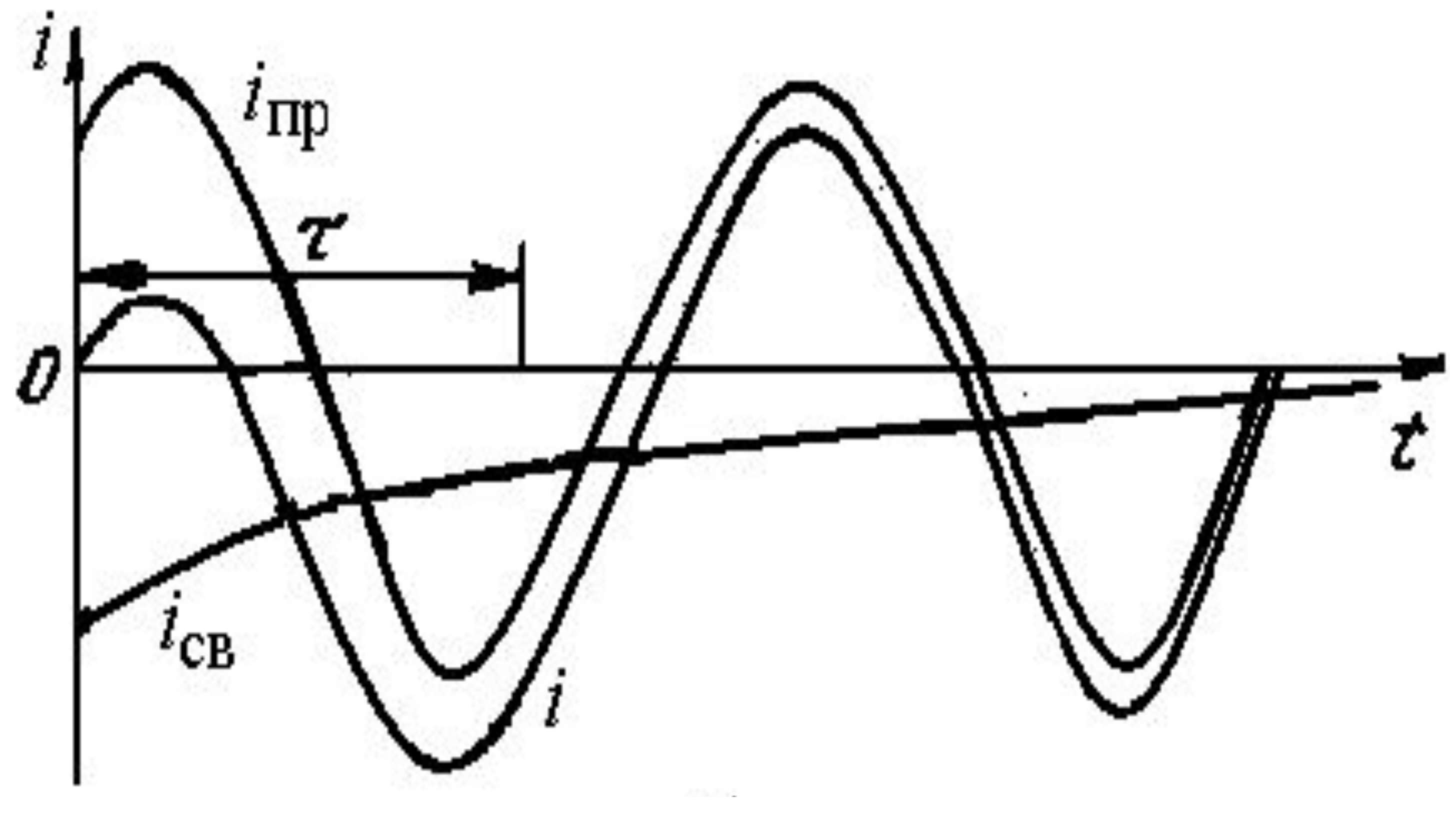
$$= L\frac{d\left(I_m \sin(\omega t + \varphi) - I_m \sin(\varphi) e^{-\frac{R_1}{L_1}t}\right)}{dt} =$$

$$= I_m L_1 \omega \cos(\omega t + \varphi) + I_m R_1 \sin(\varphi) e^{-\frac{R_1}{L_1}t} =$$

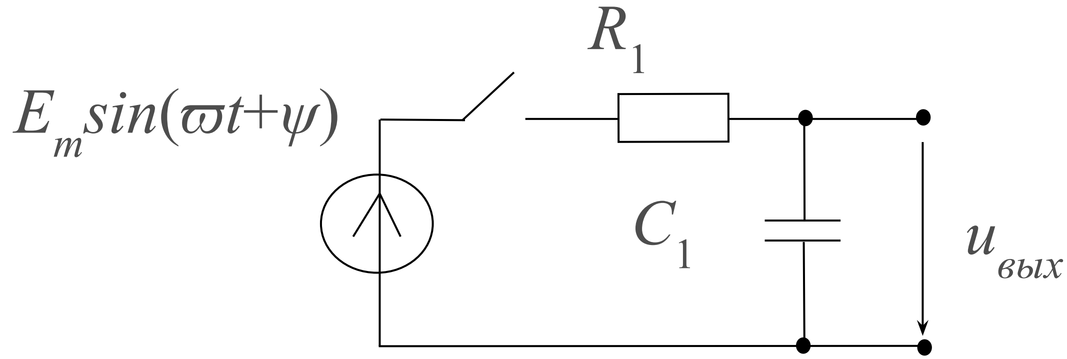
$$= U_m \sin\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) + I_m R_1 \sin(\varphi) e^{-\frac{R_1}{L_1}t}.$$

RL-цепь на переменном токе

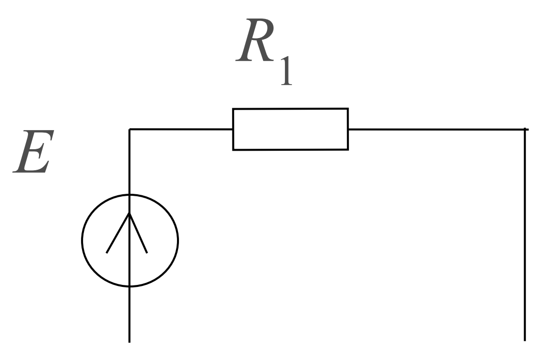
График изменения тока на катушке при включении RL-цепи на синусоидальное напряжение:



RC-цепь на переменном токе



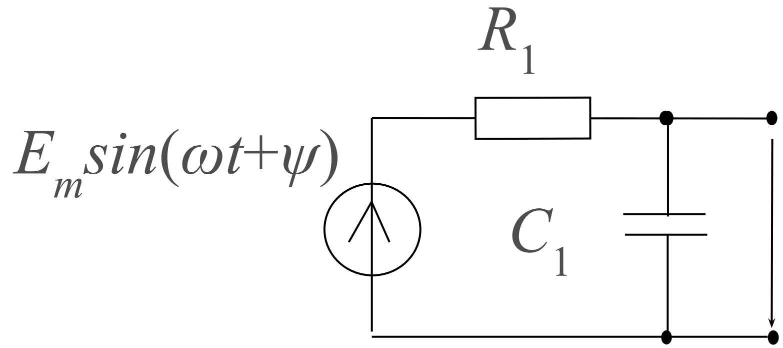
1.Определяем начальные условия:



$$\boldsymbol{u_C(0) = 0.}$$

RC-цепь на переменном токе

2. Составляем уравнение по второму закону Кирхгофа для цепи после коммутации:



$$u_C = u_{C\,пр} + u_{C\,св}$$

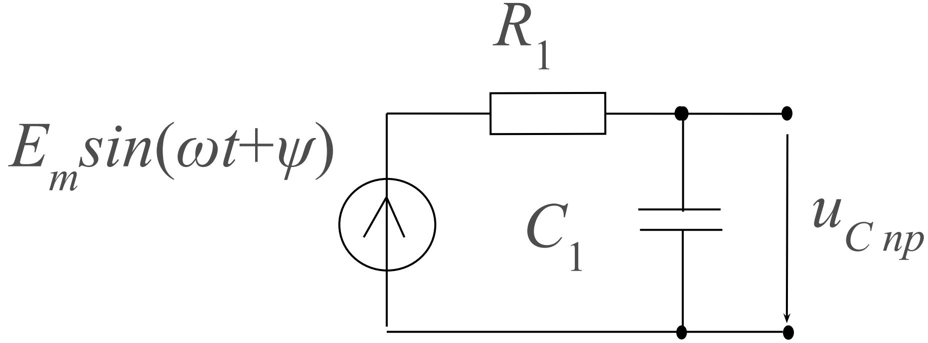
$$R_1 C_1 \frac{du_C}{dt} + u_C = E_m \sin(\omega t + \psi)$$

3. Характеристическое уравнение и корень не зависят от характера внешнего воздействия:

$$p = -\frac{1}{R_1 C_1}.$$

RC-цепь на переменном токе

4. Определяем принужденную составляющую:



После окончания переходного процесса, напряжение на емкости рассчитывается по методу комплексных амплитуд:

$$\overline{U}_{\text{пр}} = \overline{I}\cdot\frac{j}{\omega C_1} = \frac{E_m e^{j\psi}}{R_1 - \dfrac{j}{\omega C_1}}\cdot\frac{j}{\omega C_1}.$$

RC-цепь на переменном токе

$$Z_m = \sqrt{(R_1)^2 + \left(\frac{1}{\omega C_1}\right)^2}; \quad \psi_Z = arctg\left(\frac{-\frac{1}{\omega C_1}}{R_1}\right).$$

$$\overline{U}_{\text{пр}} = \frac{E_m e^{j\psi_E}}{Z_m e^{j\psi_Z}} \cdot \left(-\frac{j}{\omega C_1}\right) = \frac{E_m}{Z_m} e^{j(\psi_E - \psi_Z)} \frac{e^{-j\frac{\pi}{2}}}{\omega C_1}.$$

$$I_m = \frac{E_m}{Z_m}, \qquad \varphi = \psi_E - \psi_Z.$$

$$\overline{U}_{\text{пр}} = \frac{I_m}{\omega C_1} e^{j\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)}, \; u_{np}(t) = \frac{I_m}{\omega C_1} \sin\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right).$$

RC-цепь на переменном токе

5. Записываем решение в общем виде:

$$u_c(t) = \frac{I_m}{\omega C_1}\sin\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right) + Ae^{pt}.$$

Решаем уравнение при t = 0 (начальные условия):

$$A = -\frac{I_m}{\omega C_1}\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right).$$

Окончательное решение:

$$u_c(t) = \frac{I_m}{\omega C_1}\sin\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right) -$$

$$-\frac{I_m}{\omega C_1}\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)e^{-\frac{1}{R_1 C_1}t}.$$

RC-цепь на переменном токе

Находим функцию тока на емкости. Вынужденное значение силы тока:

$$\overline{I}_{\text{пр}} = I_m e^{j\varphi}, \qquad i_{np}(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi).$$

Свободная составляющая:

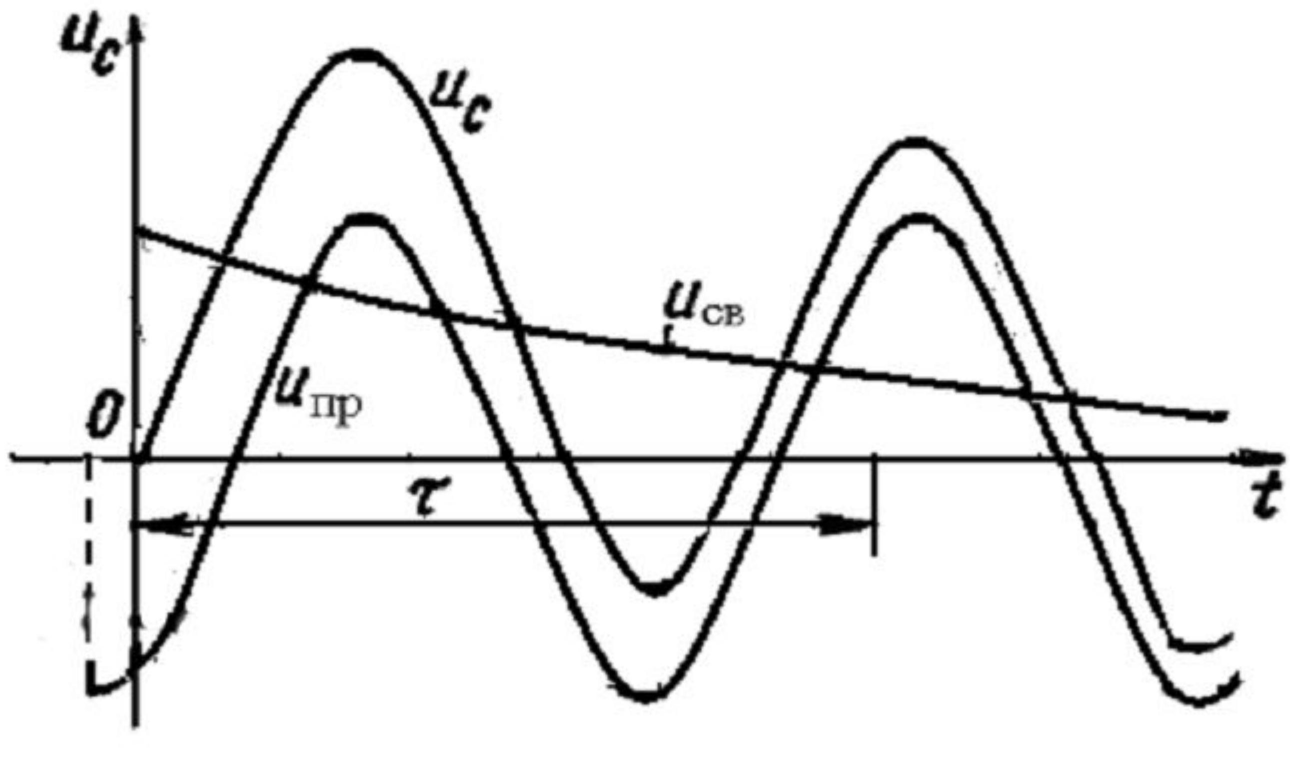
$$i_c(t) = C\frac{du_c}{dt} = -\frac{I_m}{\omega C_1 R_1}\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)e^{-\frac{1}{R_1C_1}t}.$$

$$i_c(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi) -$$

$$-\frac{I_m}{\omega C_1}\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)e^{-\frac{1}{R_1C_1}t}.$$

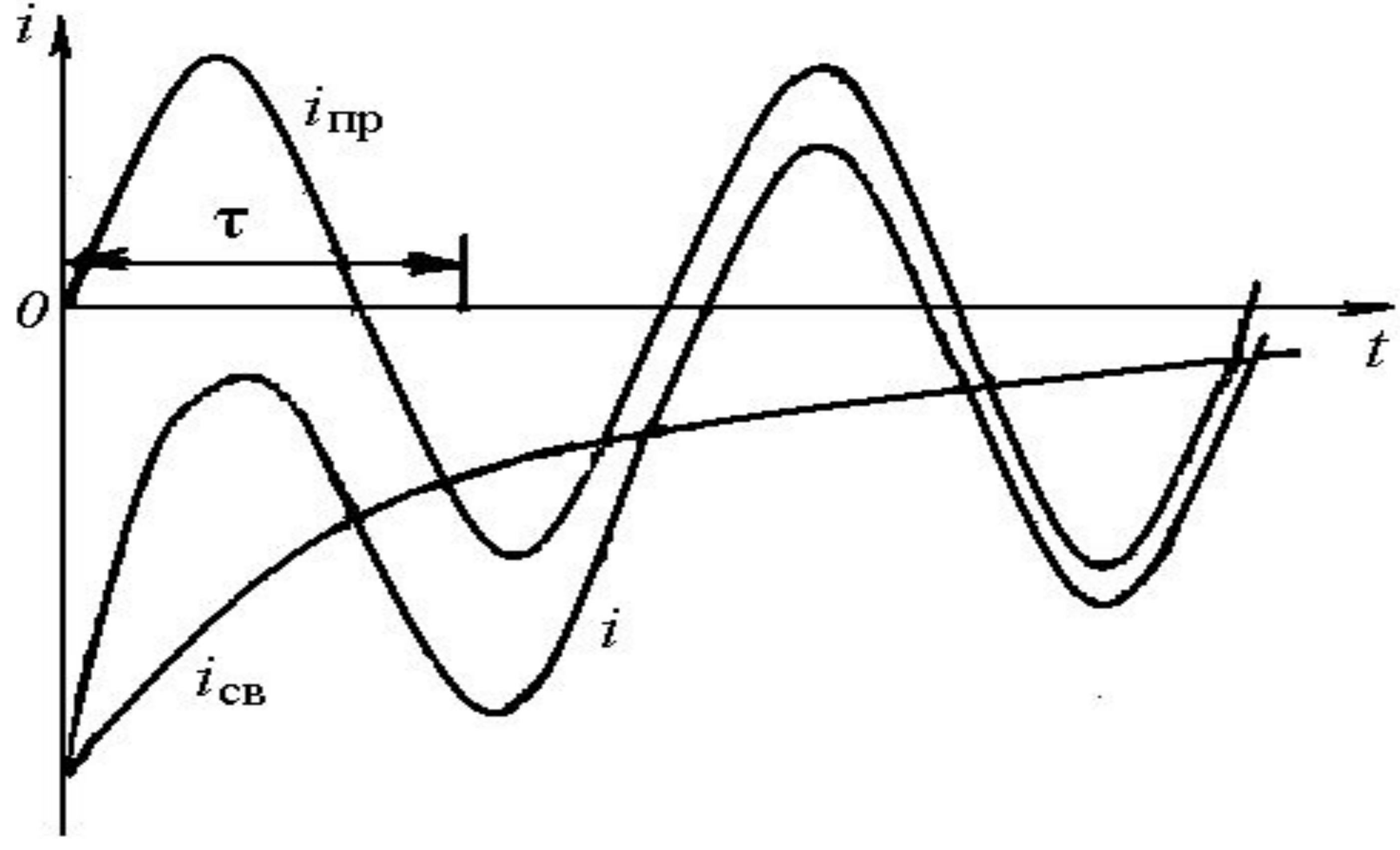
RC-цепь на переменном токе

График изменения напряжения на конденсаторе при включении RC-цепи на синусоидальное напряжение:

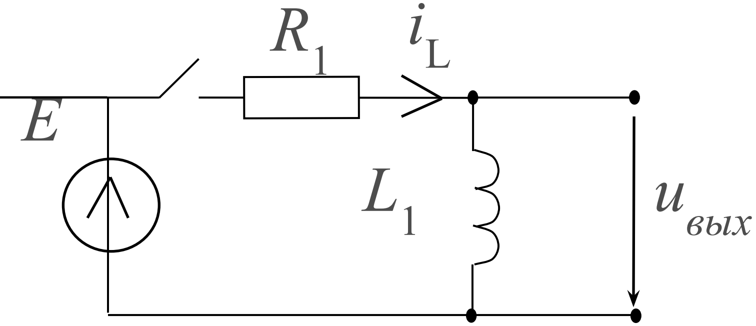


RC-цепь на переменном токе

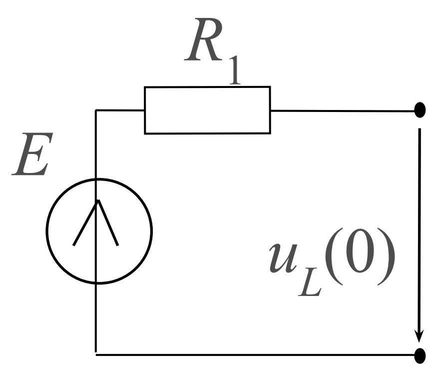
График изменения тока на конденсаторе при включении RC-цепи на синусоидальное напряжение:



Расчет схемы первого порядка



1.Определяем начальные условия:

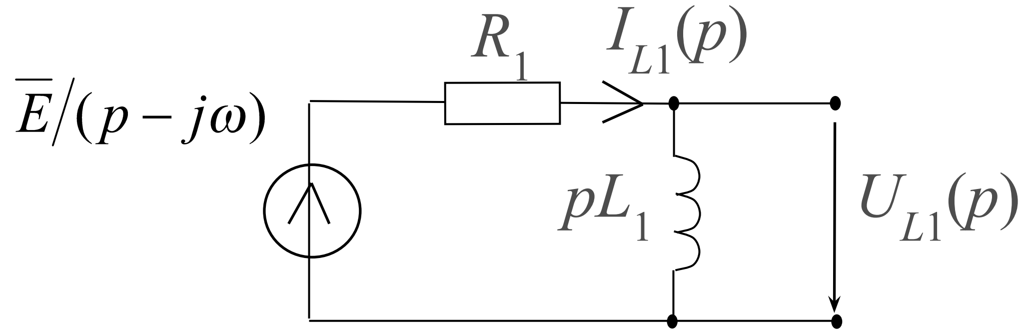


$\boldsymbol{u_L(0) = E,}$

$\boldsymbol{i_L(0) = 0.}$

Расчет схемы первого порядка

2. Составляем операторную схему замещения и уравнение по второму закону Кирхгофа:



$$U_{R1}(p) + U_{L1}(p) = \frac{\overline{E}}{p - j\omega}.$$

$$I_{L1}(p) \cdot (R_1 + pL) = \frac{\overline{E}}{p - j\omega}.$$

Расчет схемы первого порядка

3. Получение операторных функций тока и напряжений в дробно-рациональной форме:

$$I_{L1}(p) = \frac{\overline{E}}{(p - j\omega)(R_1 + pL_1)}.$$

$$U_{L1}(p) = \frac{E}{(p - j\omega)(R_1 + pL_1)} \cdot pL_1 =$$

$$= \frac{EpL_1}{(p - j\omega)(R_1 + pL_1)}.$$

Расчет схемы первого порядка

4. Применяем теорему разложения для расчета оригинала тока. Находим корни:

$$(p - j\omega)(R_1 + pL_1) = 0. \qquad p_1 = j\omega,\;\; p_2 = -\frac{R_1}{L_1}.$$

Вычисляем производную знаменателя:

$$F_2' = R_1 + L_1(2p - j\omega).$$

5. Находим оригинал тока по формуле разложения:

$$i_{L1}(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} e^{p_k t} = \frac{Ee^{j\varphi}}{R_1 + j\omega L_1} e^{j\omega t} +$$

$$+\frac{Ee^{j\varphi}}{-(R_1 + j\omega L_1)} e^{-\frac{R_1}{L_1}t} = I_m \sin(\omega t + \varphi) - I_m \sin(\varphi) e^{-\frac{R_1}{L_1}t}.$$