КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

ФАКУЛЬТЕТ ВІЙСЬКОВОЇ ПІДГОТОВКИ

КАФЕДРА ВІЙСЬКОВО-ТЕХНІЧНОЇ ПІДГОТОВКИ

Керівник заняття:
завідувач кафедри кандидат технічних наук, доцент
підполковник ГЛУХОВ Сергій Іванович

2016 р.

ПРЕДМЕТ: ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ МЕТРОЛОГІЇ

Тема № 2. Теоретичні основи метрологічного забезпечення

Заняття № 3. Закони розподілу випадкових величин

МЕТА ЗАНЯТТЯ:

НАВЧАЛЬНА МЕТА:

1. Вивчити основні числові характеристики випадкових величин.
2. Вивчити основні властивості числових характеристик випадкових величин.
3. Розглянути поняття системи двох випадкових величин.

ВИХОВНА МЕТА:

1. Виховувати у студентів культуру поведінки.
2. Виховувати студентів у дусі патріотизму.

ІНФОРМАЦІЙНО-МЕТОДИЧНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ:

1. Дерябин Ю.Д., Сацункевич Л.И., Ваховский А.М. Основы стандартизации, метрологии и управления качеством техники вооружения войск ПВО: Учебник для вузов. М: Воениздат,1988. - 360 с.
2. Державний стандарт України ДСТУ 2681-94. Метрологія. Терміни та визначення.
3. Управління якістю та елементи системи якості. Ч.2. Настанови щодо послуг: ДСТУ ISO 9004-2-96. - Введ. з 27.11.96. - К.: Держстандарт України, 1997. - 54 с.
4. Петренко В. А. Управління якістю на підприємстві: Навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів технічних і економічних спеціальностей / В. А. Петренко, О. М. Левченко, Є. С. Шубін. - Кіровоград: КДТУ, 2002. - 261 с.
5. Цюцюра С. Метрологія, основи вимірювань, стандартизація та сертифікація: Навчальний посібник / Світлана Цюцюра, Володимир Цюцюра. - 2-ге вид., перероб. і доп.. - К.: Знання , 2005. - 242 с.

6. Саранча Г.А. Метрологія, стандартизація, відповідність, акредитація та управління якістю: Підручник / Георгій Архипович Саранча. М-во освіти і науки України, Київський нац. ун-т будівництва і архітектури. - К.: Центр навчальної літератури, 2006. - 668 с.
7. Тарасова В. В. Метрологія, стандартизація і сертифікація: Підручник для вищих навчальних закладів / В. В. Тарасова, А. С. Малиновський, М. Ф. Рибак. Мін-во освіти і науки України, Державний агроекологічний ун-т. - К.: Центр навчальної літератури, 2006. – 262 с.
8. Основи метрології, стандартизації та вимірювальна техніки. Навч. Посібник для ВНЗ. Вишнівський В.В., Пампуха І.В., Гахович С.В., Жиров Г.Б., Буяло О.В. та інші. – К.: ВІКНУ, – 2009. – 107 с.
9. Теоретичні основи метрології. Конспект лекцій для ВНЗ.
Лях М.А., Марченко Ю.О., Добровольський В.Б., Глухов С.І., Бабій О.С. – К.: ВІКНУ, 2015. – 164 с.

НАВЧАЛЬНІ ПИТАННЯ І РОЗПОДІЛ ЧАСУ:

І. Вступна частина.....................................10 хв.

ІІ. Основна частина.....................................65 хв.

1. Математичне сподівання, дисперсія, середнє квадратичне відхилення випадкової величини і їх властивості.

2. Коефіцієнт кореляції і його властивості.

3.Числові характеристики функції випадкових величин.

ІІІ. Заключна частина...................................5 хв.

І. ВСТУПНА ЧАСТИНА

Перевірити наявність студентів і готовність їх до проведення заняття. Оголосити тему даного заняття, кількість годин, навчальну мету заняття. Оголосити питання, які будуть розглянуті на даному занятті.

ІІ. ОСНОВНА ЧАСТИНА

Питання 1.

МАТЕМАТИЧНЕ СПОДІВАННЯ, ДИСПЕРСІЯ, СЕРЕДНЄ КВАДРАТИЧНЕ ВІДХИЛЕННЯ ВИПАДКОВОЇ ВЕЛИЧИНИ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

Закон розподілу ВВ повністю описує її з імовірнісної точки зору. Знаючи закон розподілу ВВ, можна визначити ймовірність появи ВВ в тому або іншому інтервалі. Однак для достатньо точного встановлення закону розподілу ВВ необхідно володіти значним статистичним матеріалом, отримання якого, як правило, призводить до подолання деяких труднощів. Для вирішення багатьох практичних задач можна обійтись без визначення закону розподілу ВВ.

Числові параметри, які в стислій формі виражають найбільш суттєві сторони розподілу ВВ, називаються числовими параметрами випадкової величини.

До числових характеристик відносяться:

1. **Числові характеристики, які характеризують положення середнього значення випадкової величини на числовій вісі.**
2. **Числові характеристики групування, які описують характер групування випадкової величини навколо її середнього значення.**

В метрології найбільш широкого застосування набули числові характеристики групування: *дисперсія, середнє квадратичне відхилення, кореляційний момент і коефіцієнт кореляції* (тобто характеристики ступеню зв’язку випадкових величин між собою).

1. МАТЕМАТИЧНЕ СПОДІВАННЯ

Математичним сподіванням дискретної ВВ Х **називається сума добутків всіх можливих значень випадкової величини на ймовірності цих значень**

$$M[x]=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i \quad (1)$$

Математичним сподіванням неперервної ВВ Х **називається інтеграл від добутку її значень** ***x*** **на щільність розподілу ймовірностей**

$$M[x]=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)dx \quad (2)$$

ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ МАТЕМАТИЧНОГО СПОДІВАННЯ:

1. Якщо можливі значення ВВ числа іменовані, то її математичне сподівання — число іменоване тієї ж розмірності.
2. Математичне сподівання невипадкової (постійної) величини С дорівнює самій величині С:

$$M[C] = C \qquad (3)$$

3. Математичне сподівання добутку ВВ на невипадкову (постійну) величину С дорівнює добутку цієї невипадкової величини на математичне сподівання ВВ X :

$$M[CX] = CM[X] \qquad (4)$$

4. Математичне сподівання суми декількох випадкових величин дорівнює сумі їх математичних сподівань:

(5)

$$M\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} M\left[X_i\right]$$

5. Математичне сподівання добутку незалежних випадкових величин дорівнює добутку їх математичних сподівань:

$$M\left[\prod_{i=1}^{n} X_i\right] = \prod_{i=1}^{n} M\left[X_i\right]$$

(6)

6. Якщо в незалежних випробуваннях в результаті спостережень маємо можливі значення ВВ *X*, то їх середнє арифметичне обчислюється:

(7)

$$\overline{X} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$$

При необмеженому зростанні числа випробувань *n* середнє арифметичне сходиться по ймовірності до математичного сподівання. Тобто, середнє арифметичне — це статистичний аналог математичного сподівання.

2. ДИСПЕРСІЯ І СЕРЕДНЄ КВАДРАТИЧНЕ ВІДХИЛЕННЯ (СКВ)

Дисперсією ***ВВ X*** **називається математичне сподівання квадрата відхилення ВВ від її математичного сподівання:**

$$D[X] = M\left[(X - m_x)^2\right] \quad (8)$$

Для дискретної ВВ *X* дисперсія визначається за допомогою формули:

$$D[X] = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x)^2 p_i \quad (9)$$

а для неперервної — інтегралом:

$$D[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 f(x)dx = D_x \quad (10)$$

Середнім квадратичним відхиленням випадкової величини називається позитивний корінь з дисперсії:

$$\sigma[X] = \sqrt[+]{D[X]} = \sigma_x \quad (11)$$

ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ ДИСПЕРСІЇ

1. **Дисперсія є число позитивне.**
2. **Дисперсія постійної величини С дорівнює нулю:**

$$D[C] = 0 \quad (12)$$

3. **Дисперсія добутку постійної величини на випадкову величину дорівнює добутку квадрата постійної величини на дисперсію випадкової величини:**

$$D[cX] = c^2 \cdot D[X] \quad (13)$$

4. **Дисперсія суми незалежних випадкових величин дорівнює сумі їх дисперсій:**

$$D\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} D[X_i] \quad (14)$$

5. **Залежність між дисперсією та математичним сподіванням визначається виразом:**

$$D[X] = M[X^2] - (M[X])^2 \quad (15)$$

6. **Статистична аналогія дисперсії є середнє арифметичне із суми квадратів центрованої випадкової величини :**

$$D[X] = D_x = \sigma_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \overset{o}{X}{}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m_x)^2, \quad (16)$$

<u>Примітка:</u> Центрованою випадковою величиною X, яка відповідає випадковій величині X, **називається відхилення випадкової величини** X **від її математичного сподівання: X=** X**-m_x**

Для знаходження приблизного значення /оцінки/ середнього квадратичного відхилення застосовують формулу:

тоді: $$\widetilde{D}_x = \widetilde{\sigma}_x^2 \qquad \widetilde{\sigma}_x = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X})^2} \quad (17)$$

7. Дисперсія середнього арифметичного в n разів менше ніж дисперсія D_x самої випадкової величини X

$$D_{\bar{x}} = D\left[\overline{X}\right] = D\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right] = \frac{1}{n^2} D\left[\sum_{i=1}^{n} x_i\right] = \frac{D_x}{n} \qquad (18)$$

Тоді СКВ середнього арифметичного значення:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \qquad (19)$$

А оцінка СКВ середнього арифметичного значення:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\tilde{\sigma}_x}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \overline{X}\right)^2} \qquad (20)$$

3. СИСТЕМА ДВОХ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Сукупність випадкових величин **X:Y**, які розглядаються як сумісні, створюють систему двох випадкових величин. Систему ВВ **X:Y** позначають **(X,Y)**. Геометрична інтерпретація системи **(X,Y)** – це випадкова точка на площині **xOy** з координатами **x,y.**

Функцією розподілу системи двох випадкових величин називається ймовірність сумісного виконання трьох нерівностей:

(X<x) ,(Y<y), (21), (22) $F(x, y) = P[(X < x)(Y < y)]$

Її геометрична інтерпретація – ймовірність того , що точка **(x,y)** належить квадранту з вершиною **(x,y)**.

<u>Висновок:</u> В даному питанні розглянуті такі числові характеристики як математичне сподівання, дисперсія і середнє квадратичне відхилення. Також розглянуто взаємозв ‘язок між ними, і поняття системи двох випадкових величин.

Питання 2. КОЕФІЦІЄНТ КОРЕЛЯЦІЇ І ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ

Випадкові величини **X** і **Y** є залежними , якщо закон розподілу кожної з них залежить від того , яке значення прийняла інша величина.

Міра залежності випадкової величини **X** і **Y** визначається кореляційним моментом випадкових величин **X** і **Y** ,

$$K_{xy} = M\left[\left(X - m_x\right)\left(Y - m_y\right)\right] = M\left[\overset{o}{X}\overset{o}{Y}\right] \qquad (23)$$

Для дискретної випадкової величини кореляційний момент

$$K_{xy} = M\left[\overset{o}{X}\overset{o}{Y}\right] = \sum_i \sum_j \left(x_i - m_x\right)\left(y_j - m_y\right)P_{ij}, \qquad (24)$$

де - ймовірність того, що система **(X,Y)** приймає значення $\mathbf{x_i}$, $\mathbf{y_i}$,
а для неперервних величин

$$K_{xy} = M\left[\overset{o}{X}\overset{o}{Y}\right] = \iint_{-\infty} \left(x - m_x\right)\left(y - m_y\right) f\left(x, y\right) dxdy \qquad (25)$$

Кореляційний момент має розмірність добутку розмірностей випадкових величин **X** і **Y** . Тому на практиці в якості характеристики зв'язку між випадковими величинами **X** і **Y** зручно користуватись безрозмірним кореляційним моментом, який називається коефіцієнтом кореляції:

$$r_{xy} = \frac{K_{XY}}{\sigma'_X \sigma_Y} \qquad (26)$$

де σ_x, σ_y середнє квадратичне відхилення випадкових величин **X** і **Y** відповідно.

ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ КОЕФІЦІЄНТА КОРЕЛЯЦІЇ

1. Коефіцієнт кореляції незалежних випадкових величин **X** і **Y** дорівнює нулю. Рівність нулю коефіцієнта кореляції є необхідна, але недостатня умова незалежності випадкових величин. Вона означає що може існувати система залежних випадкових величин, коефіцієнт кореляції яких дорівнює нулю.

Виходячи із ступеню кореляційного зв'язку розрізнюють некорельовані випадкові величини, для яких $r_{xy} = 0$, і корельовані випадкові величини, для яких $r_{xy} \neq 0$.

Коефіцієнт кореляції може приймати значення в границях :

$$-1 \le r_{xy} \le 1 \qquad (28)$$

Якщо $r_{xy} \neq 0$, то його значення характеризує ступінь зв'язку між випадковими величинами **X** і **Y**. Чим більше абсолютне значення, тим сильніше кореляція між випадковими величинами **X** і **Y**.

Максимальна кореляція відповідає значенням $|r_{xy}| = 1$

В цьому випадку між випадковими величинами X і Y існує тісно функціональна залежність.

Якщо $r_{xy} > 0$, то говорять про додатну кореляцію випадкових величин X і Y , маючи на увазі, що при зростанні однієї з них інша має тенденцію в середньому зростати згідно з лінійним законом.

Якщо $r_{xy} < 0$, тоді говорять про від'ємну кореляцію, яка означає, що при зростанні однієї з них інша має тенденцію в середньому убувати за лінійним законом.

3. Коефіцієнти кореляції симетричні відносно своїх аргументів:

$$r_{xy} = r_{yx} \qquad (29)$$

Якщо n - випадкових величин X_1 ,X_2 , … , X_n створюють систему, то залежність між ними можуть бути охарактеризовані n(n-1)- змішаними центральними моментами другого порядку , тобто зв'язок

$$K_{ij} = M\left[\overset{\circ}{X}_i \overset{\circ}{X}_J\right] \qquad (30)$$

між K_{ij} і математичним сподіванням.

4. Сукупність кореляційних моментів створює кореляційну матрицю системи випадкових величин. Так як $K_{ij} = K_{ji}$ то кореляційна матриця симетрична :

$$K_{ij} = \left\| \begin{array}{cccccc} D_1 & K_{12} & K_{13} & K_{14} & \dots & K_{1n} \\ & D_2 & K_{23} & K_{24} & \dots & K_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & D_n \end{array} \right\| \qquad (31)$$

Нормована кореляційна матриця (матриця коефіцієнтів кореляції) має вигляд:

$$r_{ij} = \begin{Vmatrix} 1_1 & r_{12} & r_{13} & r_{14} & \ldots & r_{1n} \\ & 1 & r_{23} & r_{24} & \ldots & r_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 1 \end{Vmatrix} \qquad \textbf{(32)}$$

<u>Висновок:</u> **Таким чином, в матеріалі даного питання було розглянуто поняття коефіцієнта кореляції і його властивості.**

Питання 3. ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ФУНКЦІЇ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Використовуючи теорію ймовірності можна знаходити числові характеристики функцій, аргументи яких є випадкові величини за допомогою числових характеристик цих випадкових величин.

Для випадку, коли мають місце малі відхилення аргументів від "своїх" математичних сподівань, функція випадкових величин може бути з достатньою для практики точністю лінеаризована. Такий випадок є характерним для практики вимірювань, коли похибки вимірювань в порівнянні з результатами вимірювань є малими величинами.

Нехай маємо систему випадкових величин і задані числові характеристики системи математичні сподівання і кореляційна матриця. Випадкова величина Y є функцією випадкових елементів. Потрібно знати числові характеристики випадкової величини Y: математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення

Розклавши функцію $Y = \varphi\left(X_1, X_2, ... X_m\right)$ в ряд Тейлора в точках і утримавши тільки члени першого порядку одержимо:

$$m_{x_1}, m_{x_2}, ...m_{x_i}, ...m_{x_m}$$

$$Y \approx \varphi\left(m_{x_1}, m_{x_2}, ...m_{x_i}, ...m_{x_m}\right) + \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)\left(x_i - m_{xi}\right) \qquad \textbf{(34)}$$

Математичні сподівання, дисперсія і середнє квадратичне відхилення цього виразу відповідно дорівнюють:

$$m_y = \varphi\left(m_{x_1}, m_{x_2}, \ldots, m_{x_i}, \ldots, m_{x_m}\right) \quad (35)$$

$$D_Y = \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)^2 D_{x_i} + \sum_{\substack{i,j,=1 \\ i \neq j}}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial}\right) \quad (36)$$

де $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \frac{\partial \varphi\left(x_1, x_2, \ldots, x_m\right)}{\partial x_i}$ - часткова похідна в точці вимірювання

$$\sigma_y = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)^2 \sigma_{x_i}{}^2 + \sum_{i,j=1}^{m}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right)\sigma_{x_i}\sigma_{x_j} r_{ij}} \quad (37)$$

де r_{ij} коефіцієнт кореляції випадкових величин Xi та Yi.

У випадку, якщо випадкові величини некорельовані, то остання формула буде мати вид:

$$\sigma_y = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)^2 \sigma_{x_i}^2} \quad (38)$$

***<u>Висновок</u>*: в даному питанні розглянуті формули для визначення числових характеристик випадкових величин: математичного сподівання, дисперсії і середнього квадратичного відхилення.**

3. Заключна частина.......................10 хв.

Коротко підвести підсумки заняття.

1. Стисло нагадати назви та зміст питань заняття.

Сказати про те, що розглянутий сьогодні матеріал, буде використаний на наступному занятті.

2. Оголосити оцінки.

3. Поставити завдання на самостійну роботу.