Использование метода координат в пространстве для решения заданий С2 на ЕГЭ

Исследование выполнил:
ученик 11а класса сш№177
САБИРОВ ИЛЬДАР

- Научный руководитель: учитель математики высшей категории Хабибуллина А.Я

Координатный метод решения заключается во введении (привязке к исследуемым фигурам) декартовой системы координат, а затем – исчислении образующихся векторов (их длин и углов между ними).

Мы уже хорошо знакомы с векторами, координатами и их свойствами. *Цель моей работы*: *научиться применять знания для решения задач стереометрии (С2).*

Алгоритм применения метода координат к решению геометрических задач сводится к следующему:

- Выбираем в пространстве систему координат из соображений удобства выражения координат и наглядности изображения.
- Находим координаты необходимых для нас точек.
- Решаем задачу, используя основные задачи метода координат.
- Переходим от аналитических соотношений к геометрическим.

В задании С2 чаще всего требуется найти:

- угол между двумя скрещивающимися прямыми,
- угол между прямой и плоскостью,
- угол между двумя плоскостями,
- расстояние между двумя скрещивающимися прямыми,
- расстояние от точки до прямой,
- расстояние от точки до плоскости.

Углом между скрещивающимися прямыми называется угол между двумя прямыми, параллельными им и проходящими через произвольную точку.

При нахождении угла между прямыми используют формулу

$$cos\phi = \frac{\left|\vec{q}\cdot\vec{p}\right|}{\left|\vec{q}\right|\cdot\left|\vec{p}\right|}$$

или в координатной форме

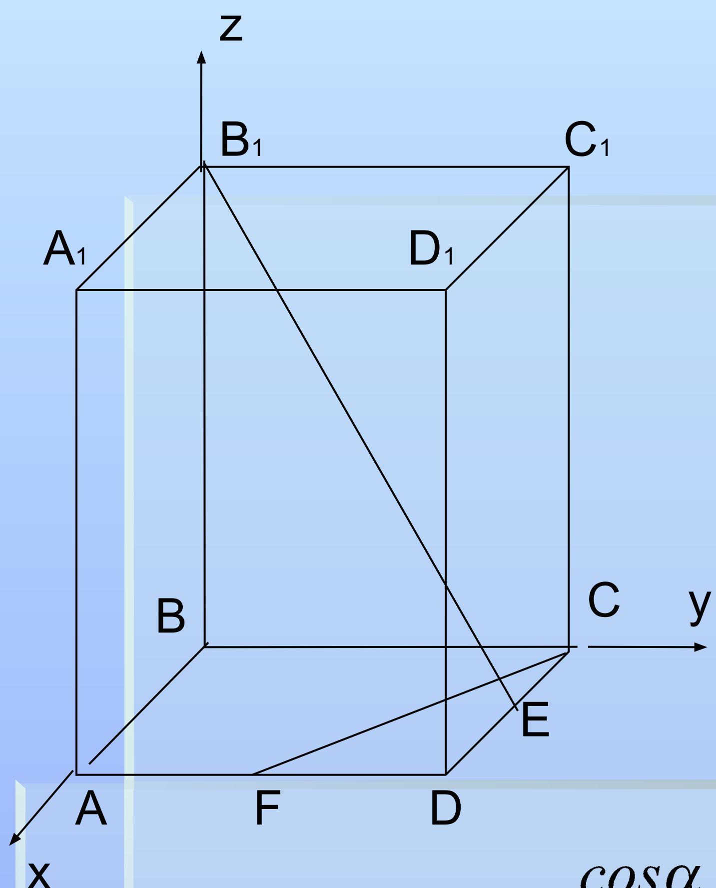
$$\cos\phi = \frac{\left|x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2\right|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

для нахождения угла *φ* между прямыми *m* и *l*, если векторы $\vec{q}\{x_1; y_1; z_1\}$ и $\vec{p}\{x_2; y_2; z_2\}$ параллельны соотвественно этим прямым; в частности, для того чтобы прямые *m* и *l* были перпендикулярны, необходимо и достаточно, чтобы $\vec{p}\cdot\vec{q} = 0$ или $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$.

Задача на нахождение угла между скрещивающимися прямыми.

Сторона основания правильной четырехугольной призмы *ABCDA1B1C1D1* равна 2, высота — 4. Точка *E* — середина отрезка CD, точка *F* — середина отрезка AD. Найдите угол между прямыми *CF* и *B1E*.

Решение



Поместим параллелепипед в прямоугольную систему координат, как показано на рисунке, и найдём искомый угол как угол между векторами. Выпишем координаты точек B1, E, C, F в этой системе координат: ***B1*** **(0; 0; 4),** ***E*****(1; 2; 0),** ***C*** **(0; 2; 0),** ***F*** **(2; 1; 0).**

Тогда $\overrightarrow{CF}$ {2; -1; 0}, $\overrightarrow{B_1E}$ {1; 2; -4}. Найдём угол между этими векторами по формуле:

$$\cos\alpha = \frac{\left|x_1x_2 + y_1y_1 + z_1z_2\right|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

$$cos\alpha = \frac{2 \cdot 1 - 1 \cdot 2 + 0 \cdot (-4)}{\sqrt{2^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2 + (-4)^2}} = 0$$

То есть искомый угол α=90°.

Ответ: 90°.

<u>Углом между плоскостью и не перпендикулярной ей прямой</u> называется угол между этой прямой и её проекцией на данную плоскость.

<u>Угол между прямой l и плоскостью α можно вычислить:</u>

1) по формуле $\sin\phi = \sin(l;\alpha) = \dfrac{\rho(M;\alpha)}{AM}$, $где M \in l, l \cap \alpha = A$;

2) по формуле $\sin\phi = \dfrac{\left|\vec{n}\cdot\vec{p}\right|}{\left|\vec{n}\right|\cdot\left|\vec{p}\right|}$ или в координатах

$$\sin\phi = \frac{\left|x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2\right|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$, где

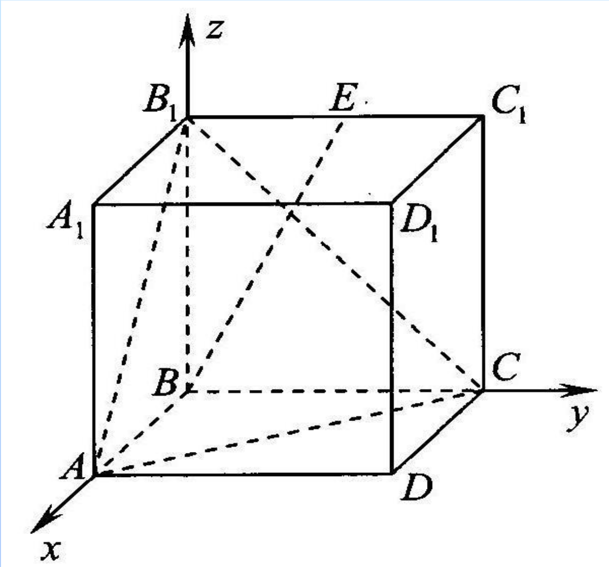
$\vec{n}\{x_1; y_1; z_1\}$ – вектор нормали к плоскости α,

$\vec{p}\{x_2; y_2; z_2\}$ – направляющий векор прямой l

Задача на нахождение угла между прямой и плоскостью.

В прямоугольном параллелепипеде ABCDA1B1C1D1 рёбра AB и AA1 равны 1, а ребро AD=2. Точка E – середина ребра B1C1. Найдите угол между прямой BE и плоскостью AB1C.

Решение

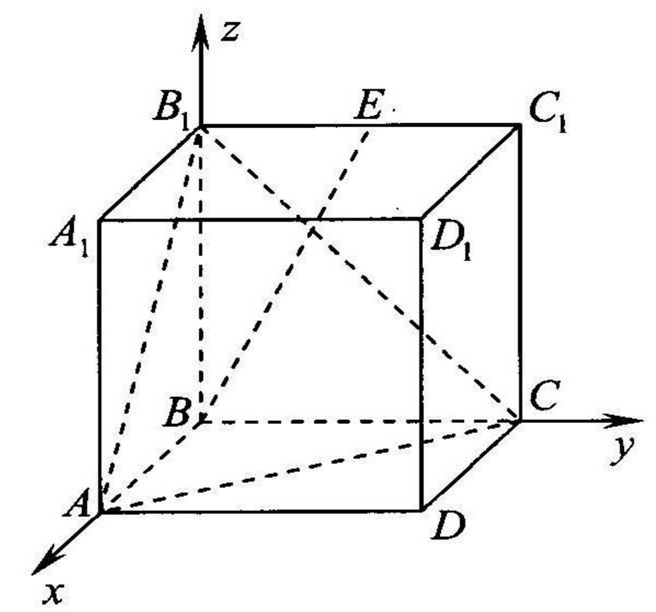


Для решения этой задачи необходимо воспользоваться уравнением плоскости, имеющим общий вид *ax+by+cz+d=0*, где *a*, *b* и *c* – координаты нормали к плоскости.

Чтобы составить это уравнение, необходимо определить координаты трёх точек, лежащих в данной плоскости: A(1; 0; 0), B1(0;0;1), C(0;2;0).

Решая систему $\begin{cases} a+d=0, \\ c+d=0, \\ 2b+d=0, \end{cases}$

находим коэффициенты a, b и c уравнения *ax+by+cz+d=0*: *a=-d*, *b=* $-\frac{d}{2}$, *c=-d*. Таким образом, уравнение примет вид $-dx-\frac{d}{2}y-dz+d=0$ или, после упрощения, *2x+y+2z-2=0*. Значит нормаль *n* к этой плоскости имеет координаты $\vec{n}\{2;1;2\}$.



Длину вектора легко найти геометрически: $\left|\overrightarrow{BE}\right| = \sqrt{BB_1^2 + B_1E^2} = \sqrt{2}$

Но его координаты нам всё равно необходимы. Из простых вычислений находим, что $\overrightarrow{BE}\{0;-1;-1\}$

Найдем угол между вектором и нормалью к плоскости по формуле скалярного произведения векторов:

$$\sin\phi = \frac{\left|x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2\right|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} = \frac{\left|-1\cdot 1 - 1\cdot 2\right|}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}\cdot 3} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ответ: 45°

Двугранный угол, образованный полуплоскостями измеряется величиной его линейного угла, получаемого при пересечении двугранного угла плоскостью, перпендикулярной его ребру.

Угол между двумя пересекающимися плоскостями можно вычислить:

1) по формуле $\sin\angle(\alpha,\beta)=\dfrac{\rho(M;\beta)}{\rho(M;l)}, где M\in\alpha, \alpha\cap\beta=l$

2) как угол между нормалями по формуле

$$\cos\angle(\alpha,\beta)=\frac{\left|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{n_2}\right|}$$

или в координатной форме

$$\cos\angle(\alpha,\beta)=\frac{\left|A_1A_2+B_1B_2+C_1C2\right|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

где $\overrightarrow{n_1}\{A_1;B_1;C_1\}$ - вектор нормали плоскости A1x+B1y+C1z+D1=0,

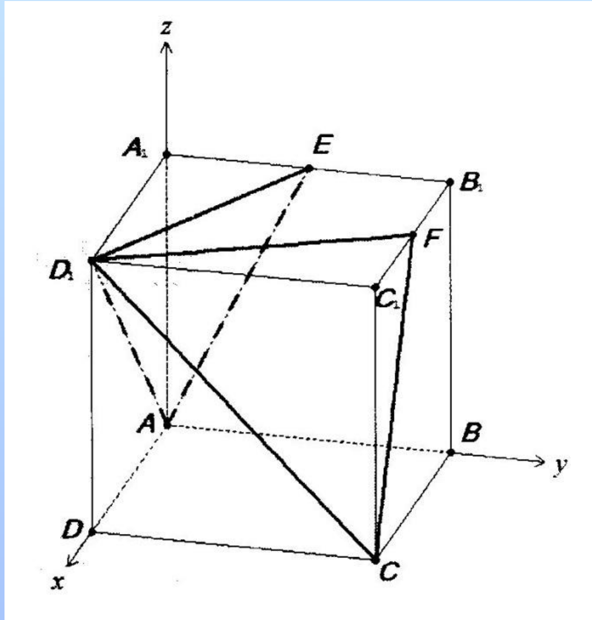
$\overrightarrow{n_1}\{A_1;B_1;C_1\}$ - вектор нормали плоскости A2x+B2y+C2z+D2=0.

Задача на нахождение угла между двумя плоскостями.

В единичном кубе ABCDA1B1C1D1 найдите угол между плоскостями AD1 E и D1FC, где точки E и F-середины ребер A1B1 и B1C1.

Решение.

Введём прямоугольную систему координат. Тогда A(0;0;0), C(1;1;0), D1(1;0;1), E(0;0,5;1), F(0,5;1;1). 1) Решая систему



$$\begin{cases} a\cdot 0 + b\cdot 0 + c\cdot 0 + d = 0, \\ a + c + d = 0, \\ 0{,}5b + c + d = 0 \end{cases}$$

составляем уравнение плоскости *AD1E*: *x+2y-z=0*.

2) плоскость CFD1:

$$\begin{cases} a + c + d = 0, \\ 0{,}5a + b + c + d = 0, \\ a + b + d = 0 \end{cases}$$

отсюда находим уравнение *2x+y+z-3=0*.

Найдём искомый угол как угол между нормалями плоскостей:

$\vec{n}\{1;2;-1\}, \vec{m}\{2;1;1\}$ $\cos\varphi = \dfrac{|\vec{n}\cdot\vec{m}|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{m}|} = \dfrac{2+2-1}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}} = \dfrac{1}{2}$, откуда φ=60°

Ответ: 60°

Расстояние между точками A и B можно вычислить:

1) по формуле

$$\rho(A;B)=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2+\left(z_2-z_1\right)^2}$$

где A(x1; y1; z1), B(x2; y2; z2);

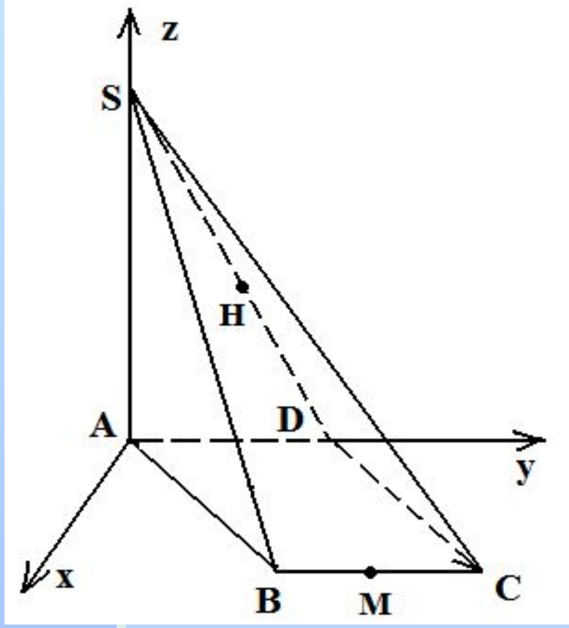
2) по формуле $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{\overrightarrow{AB}^2}$

Задача на нахождение расстояния между двумя точками.

В основании пирамиды SABCD лежит ромб со стороной 2 и острым углом в 60°. Боковое ребро SA перпендикулярно основанию пирамиды и равно 4. Найдите расстояние от середины H ребра SD и серединой M ребра BC.

Решение.

Поместим пирамиду в прямоугольную систему координат, как показано на рисунке. Найдём координаты точки H как координаты середины отрезка SD: S(0; 0; 4), D(0; 2; 0).



$$x = \frac{0+0}{2} = 0, y = \frac{0+2}{2} = 1, z = \frac{4+0}{2} = 2 \Rightarrow H(0;1;2)$$

Чтобы найти координаты точек B и C, найдём координаты их проекций на оси.

ABx=ACx=2·cos30°= $\sqrt{3}$,

ABy=ACy–2=2·cos60°=1.

Отсюда B($\sqrt{3}$;1;0), C($\sqrt{3}$;3;0). Тогда координаты точки M равняются:

$$x = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}, y = \frac{1+3}{2} = 2, z = \frac{0+0}{2} = 0 \Rightarrow M(\sqrt{3};2;0)$$

Теперь находим расстояние между точками, заданными своими координатами:

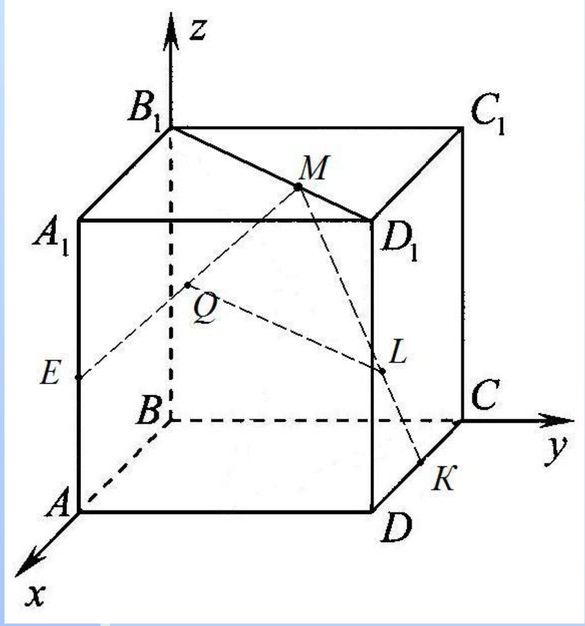
$$\rho(H;M) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Ответ: $2\sqrt{2}$

Задача.

В единичном кубе ABCDA1B1C1D1 точки E и K – середины ребер AA1 и CD соответственно, а точка M расположена на диагонали B1D1 так, что B1M = 2MD1. Найдите расстояние между точками Q и L, где Q – середина отрезка EM, а L – точка отрезка MK такая, что ML=2LK.

Решение.



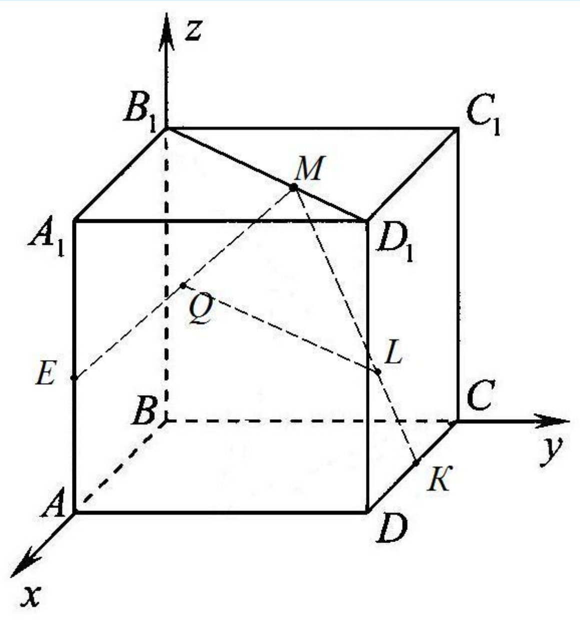
Введём декартову систему координат. $E(1;0;0,5)$, $K(0,5;1,0)$, B1(0;0;1), D1(1;1;1). Чтобы вычислить координаты т.М, воспользуемся формулой для нахождения координат точки, которая делит отрезок B1D1 в отношении λ=2:1:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}$$

$$x_M = \frac{0+2\cdot 1}{1+2} = \frac{2}{3}, y_M = \frac{2}{3}, z_M = \frac{1+2}{1+2} = 1 \Rightarrow M(\frac{2}{3};\frac{2}{3};1)$$

Аналогично находим координаты точки L:

$$x_L = \frac{\frac{2}{3} + 2\cdot 0,5}{2+1} = \frac{5}{9}, y_L = \frac{\frac{2}{3}+2}{3} = \frac{8}{9}, z_L = \frac{1}{3} \Rightarrow L(\frac{5}{9};\frac{8}{9};\frac{1}{3})$$



Координаты точки Q находим по формуле координат середины отрезка:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}\qquad y=\frac{y_1+y_2}{2}\qquad z=\frac{z_1+z_2}{2}$$

$$\Rightarrow Q\left(\frac{5}{6};\frac{1}{3};1\right)$$

$$\rho(Q;L)=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2+\left(z_2-z_1\right)^2}=\sqrt{\left(-\frac{5}{18}\right)^2+\left(\frac{5}{9}\right)^2+\left(-\frac{2}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{169}{324}}=\frac{13}{18}$$

Ответ: $\dfrac{13}{18}$.

Расстояние от точки до плоскости, не содержащей эту точку, есть длина отрезка перпендикуляра, опущенного из этой точки на плоскость.

Расстояние от точки М до плоскости α

1) вычисляется по формуле $\rho = \rho_1 \frac{r}{r_1}$, где ρ=ρ(M;α), ρ1=ρ(M1;α), OM=r, OM1=r1, MM1∩α=0; в частности, ρ=ρ1, если r=r1: прямая m, проходящая через точку M, пересекает плоскость α в точке O, а точка M1 лежит на прямой m;

2) вычисляется по формуле

$$\rho(M;\alpha) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$

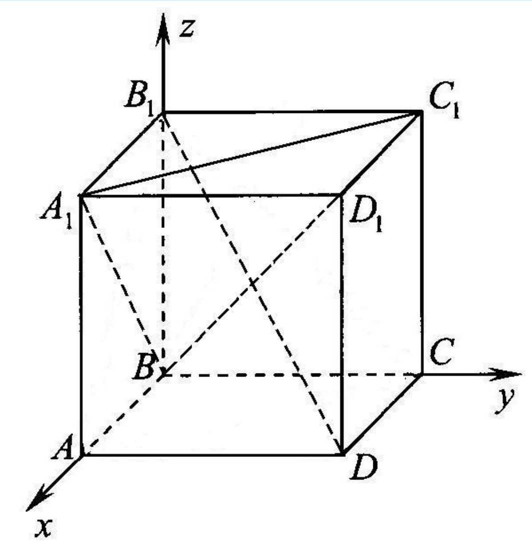
где M(x0;y0;z0), плоскость α задана уравнением ax+by+cz+d=0;

Задача на нахождение расстояния от точки до плоскости.

В кубе ABCDA1B1C1D1 проведена диагональ B1D. В каком отношении, считая от вершины B1, плоскость A1BC1 делит диагональ B1D?

Решение.

Составим уравнение плоскости *A1BC1* и найдём расстояние от этой плоскости до каждой из точек *B1* и *D*. Пусть *l* – ребро куба. *B(0;0;0), A1(l;0;l), C1(0;l;l).*



Решив систему $\begin{cases} d = 0, \\ la + lz + d = 0, \\ lb + lc + d \end{cases}$

определяем, что уравнение плоскости имеет вид: *x+y–z=0* → a=1, b=1, c= –1. B1(0;0;1), D(1;1;0).

Теперь найдём расстояние от каждой точки до плоскости по формуле

$$\rho(M;\alpha) = \frac{\left|ax_0 + by_0 + cz_0 + d\right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$\rho_1(D; A_1C_1B) = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\rho_2(B_1; A_1C_1B) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

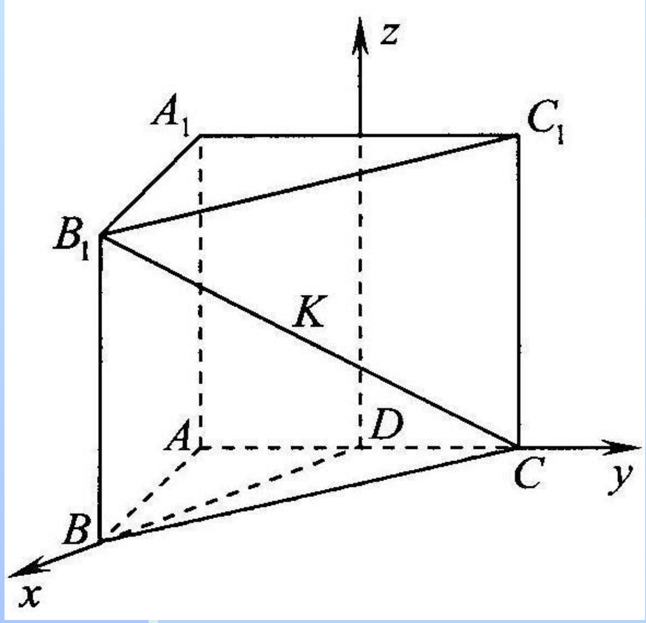
$$\rho_1 : \rho_2 = \frac{2}{\sqrt{3}} : \frac{1}{\sqrt{3}} = 2:1$$

Ответ: 2:1.

Задача.

Основание прямой призмы ABCA1B1C1 – равнобедренный треугольник ABC, основание AC и высота BD которого равны 4. Боковое ребро равно 2. Через середину K отрезка B1C проведена плоскость, перпендикулярная к этому отрезку. Найдите расстояние от вершины A до этой плоскости.

Решение.



Выберем систему координат как показано на рисунке и выпишем координаты вершин данной призмы и точки К в этой системе координат: A(0;–2;0), B(0;0;0), C(0;2;0), B1(4;0;2), K(2;1;1). Тогда $\overrightarrow{B_1C}\{-4;2;-2\}$.

Этот вектор перпендикулярен плоскости, значит, он является его нормалью. К тому же плоскость проходит через точку K. То есть уравнение плоскости имеет вид *–2(x–2)+2(y–1)–2(z–1)=0* или, после упрощения, *2x–y+z-4=0.*

Теперь находим расстояние от т.А(0;-2;0) до плоскости:

$$\rho(A;\alpha)=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|-2\cdot(-1)-4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+1}}=\frac{2}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Как вы видите, все те соотношения, которые при решении традиционным методом даются с большим трудом (через привлечение большого количества вспомогательных теорем), координатным методом получаются в ходе несложных алгебраических вычислений. Нам не нужно задумываться, к примеру, как проходит та или иная плоскость, как упадет перпендикуляр, опущенный из данной точки на плоскость, каким образом скрещивающие прямые перенести, чтобы они были пересекающимися и т.д. Нам просто надо поместить тело в прямоугольную систему координат, определить координаты точек, векторов или плоскостей и воспользоваться формулой.

Благодари
м за
внимание!