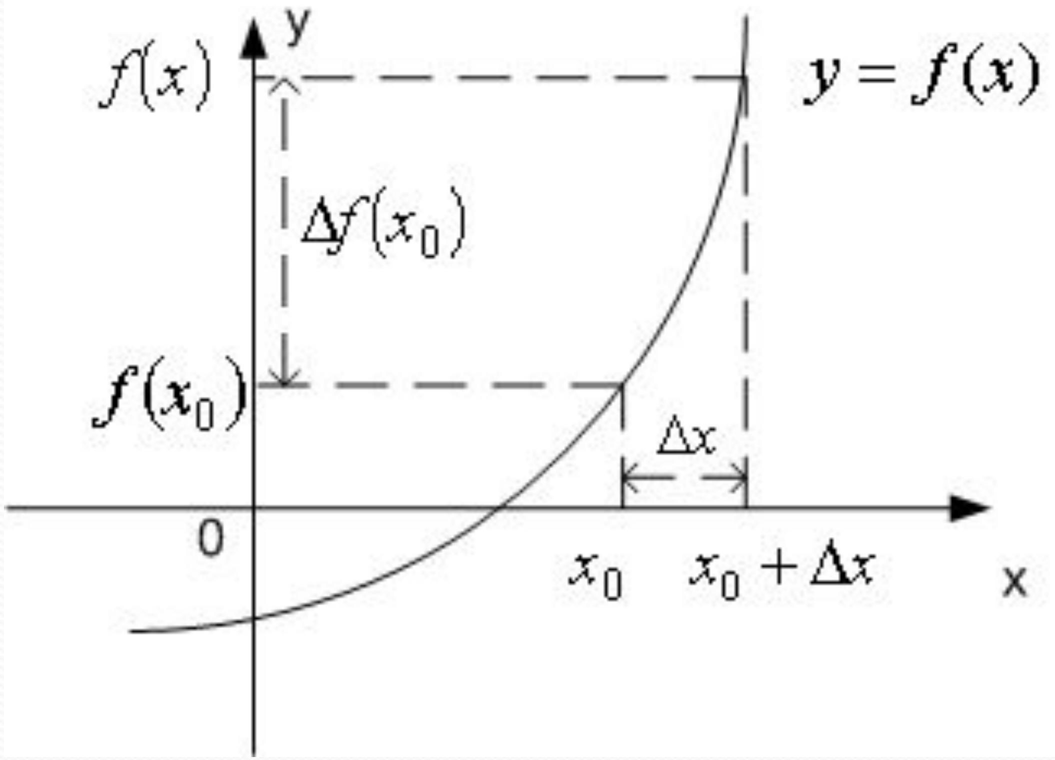
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОГО АРГУМЕНТА

§ 1 Производная и дифференциал функции

$y = f(x)$ $\qquad f : X \to R$ $\qquad x \in X$ и $x_0 \in X$

$\Delta x = x - x_0$ - приращение аргумента

$\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ - приращение функции в точке x_0.



Определение 1. Функция $y = f(x)$ называется **дифференцируемой** в точке x_0, если приращение этой функции можно представить в виде

$$\Delta f(x_0) = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x,$$

где $A = A(x_0)$, $\alpha \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} 0$.

Если функция дифференцируема в каждой точке промежутка, то она дифференцируема на этом промежутке.

Определение 2. Главная, или линейная, часть приращения функции называется дифференциалом этой функции:

$$df(x_0) = A(x_0) \cdot \Delta x.$$

Пример. $y = x$

$$\Delta y(x_0) = (x_0 + \Delta x) - x_0 = 1 \cdot \Delta x + 0 \cdot \Delta x$$

$$A = 1, \quad \alpha(\Delta x) = 0$$

$$df(x_0) = dy(x_0) = 1 \cdot \Delta x$$

$$dy = dx = \Delta x$$

Определение 3. Производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции к приращению независимой переменной при стремлении последнего к нулю (если этот предел существует и конечен)

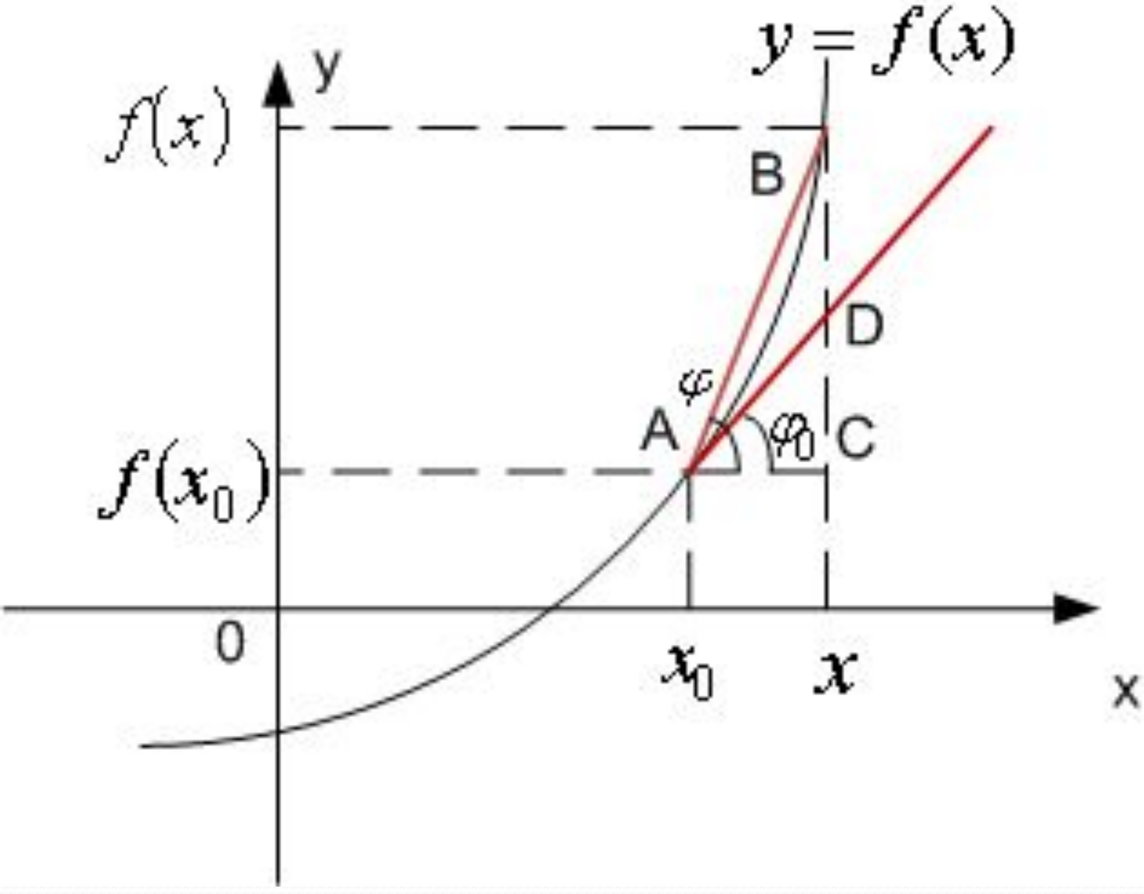
$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}}$$

$$f'(x), \quad y', \quad \frac{df}{dx}, \quad y'_x$$

Теорема 1. Для того, чтобы функция была дифференцируемой в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы в этой точке функция имела конечную производную.

Теорема 2. Дифференцируемая в некоторой точке функция непрерывна в этой точке.

Геометрический смысл производной



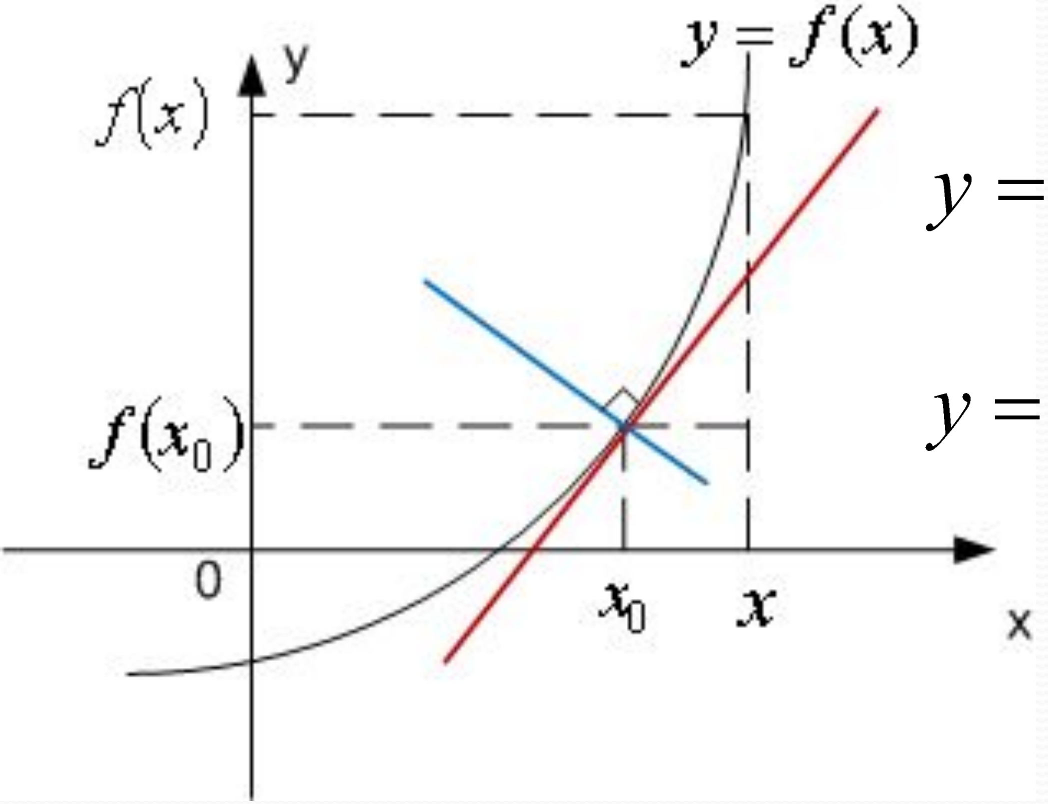
$$tg\varphi = \frac{BC}{AC} = \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$$

$$tg\varphi = \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$tg\varphi_0 \qquad f'(x_0)$$

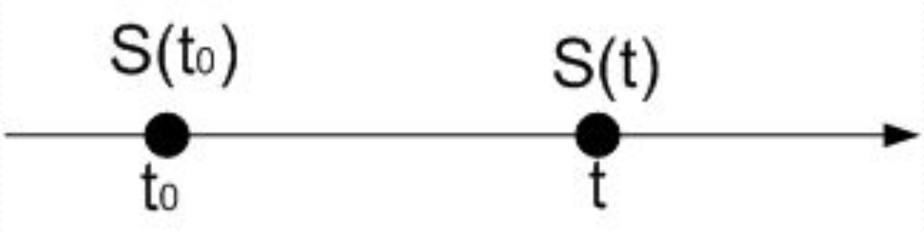
$$tg\varphi_0 = f'(x_0)$$



$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

Механический смысл производной



$$v_{cp} = \frac{S(t) - S(t_0)}{t - t_0}$$

$$t - t_0 \to 0 \qquad t \to t_0$$

$$v_{мгн} = \lim_{t \to t_0} \frac{S(t) - S(t_0)}{t - t_0} = S'(t_0)$$

$$S'(t) = v$$

§2 Основные правила дифференцирования

Теорема 1. Пусть $f : X \to R,\ g : X \to R$ и пусть эти функции дифференцируемы в точке $x \in X$.

Тогда функции $f \pm g,\ fg,\ \dfrac{f}{g}$ также дифференцируемы в этой точке, причем имеют место равенства:

1) $c' = 0,\ c = const$

2) $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$

3) $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

4) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

Теорема 2. Пусть $f : X \to Y \ (Y \subset R), \quad g : Y \to R$.

Пусть функция f дифференцируема в точке x_0,

а функция g - в точке $y_0 = f(x_0)$.

Тогда сложная функция $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

будет дифференцируемой в точке x_0, причем

$$(g \circ f)'(x_0) = \left[g(f(x_0)\right]' = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

Теорема 3. Пусть $f : X \to Y$, пусть существует обратная функция $f^{-1} : Y \to X$ и пусть функция f^{-1} непрерывна, а функция f дифференцируема в точке x_0.

Тогда функция f^{-1} дифференцируема в точке $y_0 = f(x_0)$, причем $(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$.

§3 Производные основных элементарных функций

$$1)\ c' = 0$$

$$2)\ \left(x^n\right)' = nx^{n-1}$$

$$3)\ \left(a^x\right)' = a^x \ln a$$

$$\left(e^x\right)' = e^x$$

$$4)\ \left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$\left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}$$

$$5)\ (\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$6)\ (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$\left[(f(x))^{g(x)}\right]' = (f(x))^{g(x)}\left[g'(x)\ln(f(x)) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right]$$

§4 Дифференциал функции одного аргумента

$$dy = f'(x)dx$$

1. $dc = 0$
2. $d(cf) = cdf$
3. $d(f \pm g) = df \pm dg$
4. $d(fg) = fdg + gdf$
5. $d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gdf - fdg}{g^2}$

Инвариантность формы дифференциала.

$$y = f(u) \qquad u = u(x)$$

$$dy = d\left(f\left[u(x)\right]\right) = \left(f\left[u(x)\right]\right)' dx = f'(u)u'(x)dx = f'(u)du$$

$$dy = f'(u)du$$

Применение дифференциала в приближенных вычислениях

$$\Delta y = dy + \alpha(\Delta x)\Delta x \qquad dy = f'(x)\Delta x$$

$$\Delta y \approx dy$$

$$f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x$$

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$$

§5 Производные и дифференциалы высших порядков

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}\right)'(x)$$

Физический смысл производной второго порядка:

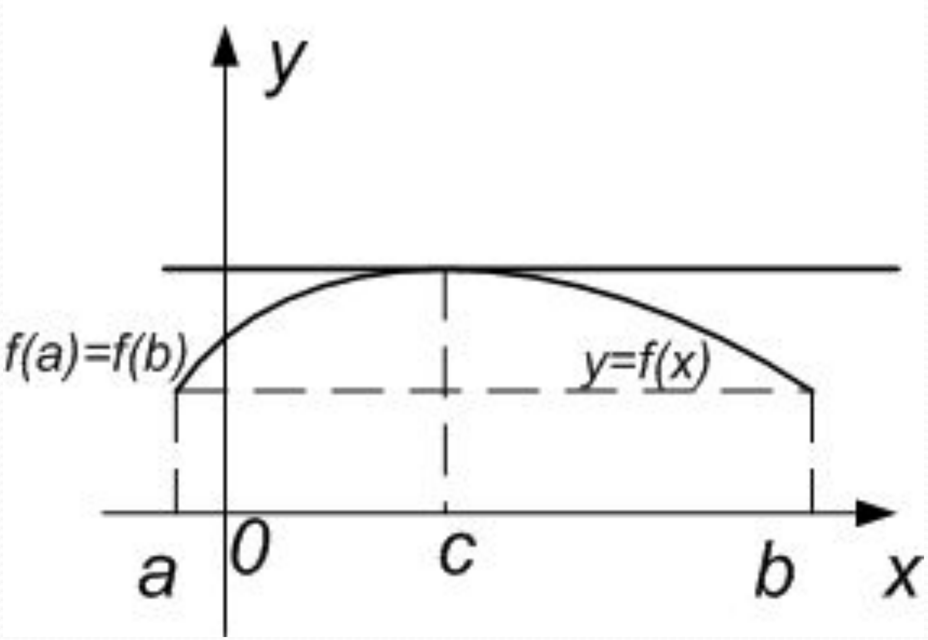
$$S''(t) = \left[S'(t)\right]' = v'(t) = a(t)$$

$$d^n y = d(d^{n-1} y)$$

$$d^n y = f^{(n)}(x) dx^n$$

Теорема 2. (теорема Ролля).

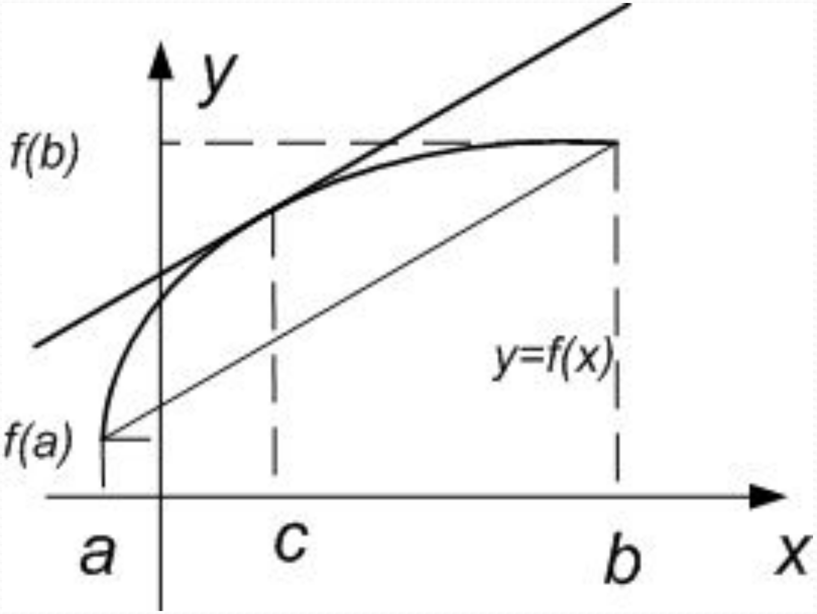
Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, дифференцируема на интервале (a,b) и $f(a) = f(b)$, тогда существует, по крайней мере, одна такая точка $c \in (a,b)$, что $f'(c) = 0$.



Теорема 3. (теорема Лагранжа)

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и дифференцируема на интервале (a,b).

Тогда существует по крайней мере одна такая точка $c \in (a,b)$, в которой $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.



Теорема 4. (теорема Коши)

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$ и дифференцируемы на интервале (a,b).

Пусть $f(x) \neq g(x)$.

Тогда существует точка $c \in (a,b)$ такая, что

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

§ 7 Правила Лопиталя

Теорема 1. (правила Лопиталя)

Предел отношения двух бесконечно малых или бесконечно больших функций равен пределу отношения их производных,
если последний существует.

$$\left[\frac{0}{0}\right] \quad \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \qquad \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

§ 8 Формула Тейлора

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n,$$

$$x_0 \in R, \quad n \in N, \quad a_i \in R$$

$$a_k = \frac{p_n^{(k)}(x_0)}{k!}$$

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{p_n^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f_n^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n(x)$$

формула Тейлора

$$p_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f_n^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

$$f(x)-p_n(x)=R_n(x)$$

$$f(x)\approx\sum_{k=0}^{n}\frac{f_n^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

Теорема 1. Если функция $f(x)$ на интервале $(a;b)$ имеет все производные до порядка $n+1$ включительно, и если $x, x_0 \in (a;b)$, то существует точка c, лежащая между x и x_0 такая, что остаточный член имеет вид $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}$.

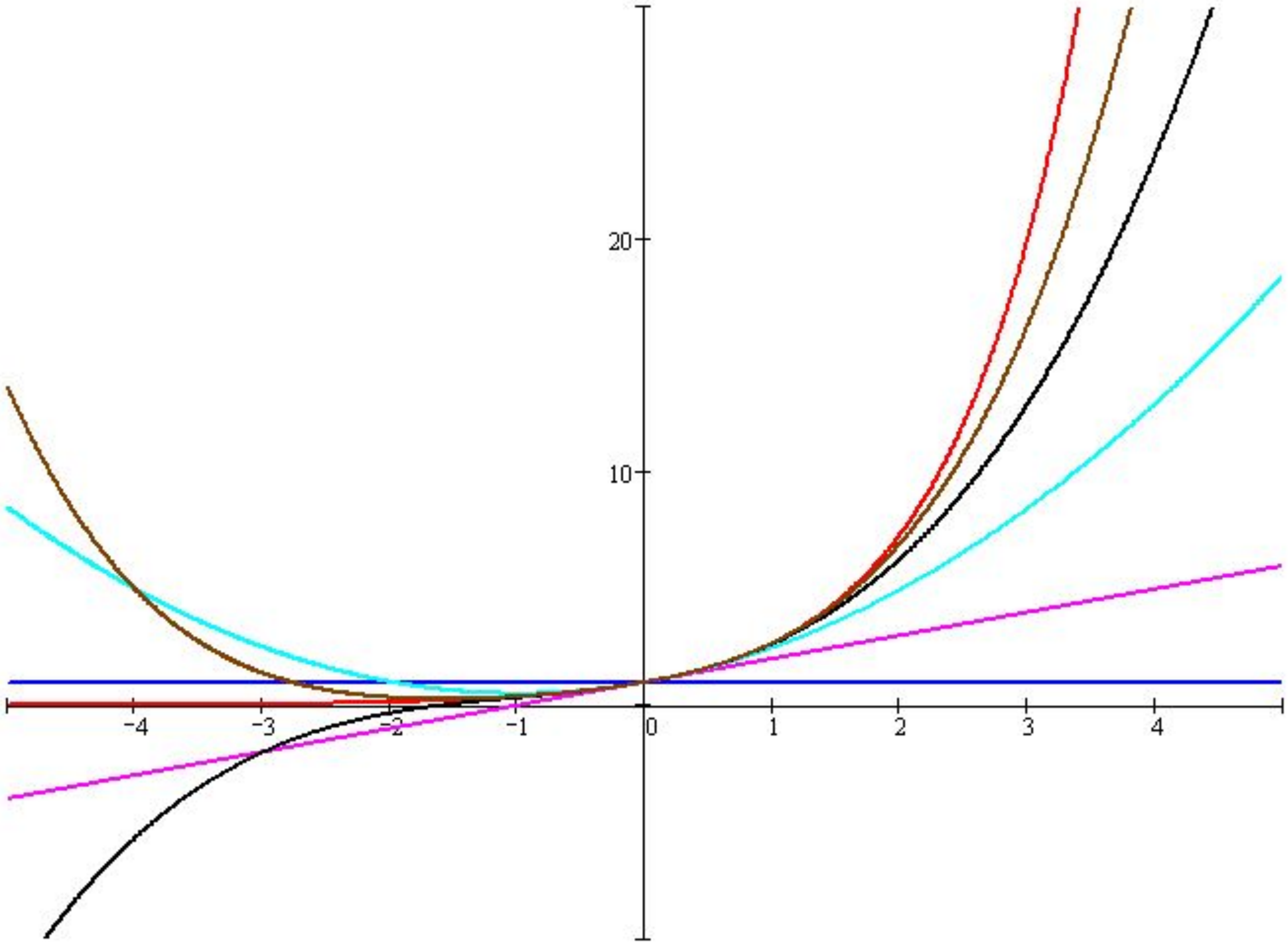
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f_n^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}$$

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+R_n(x)$$

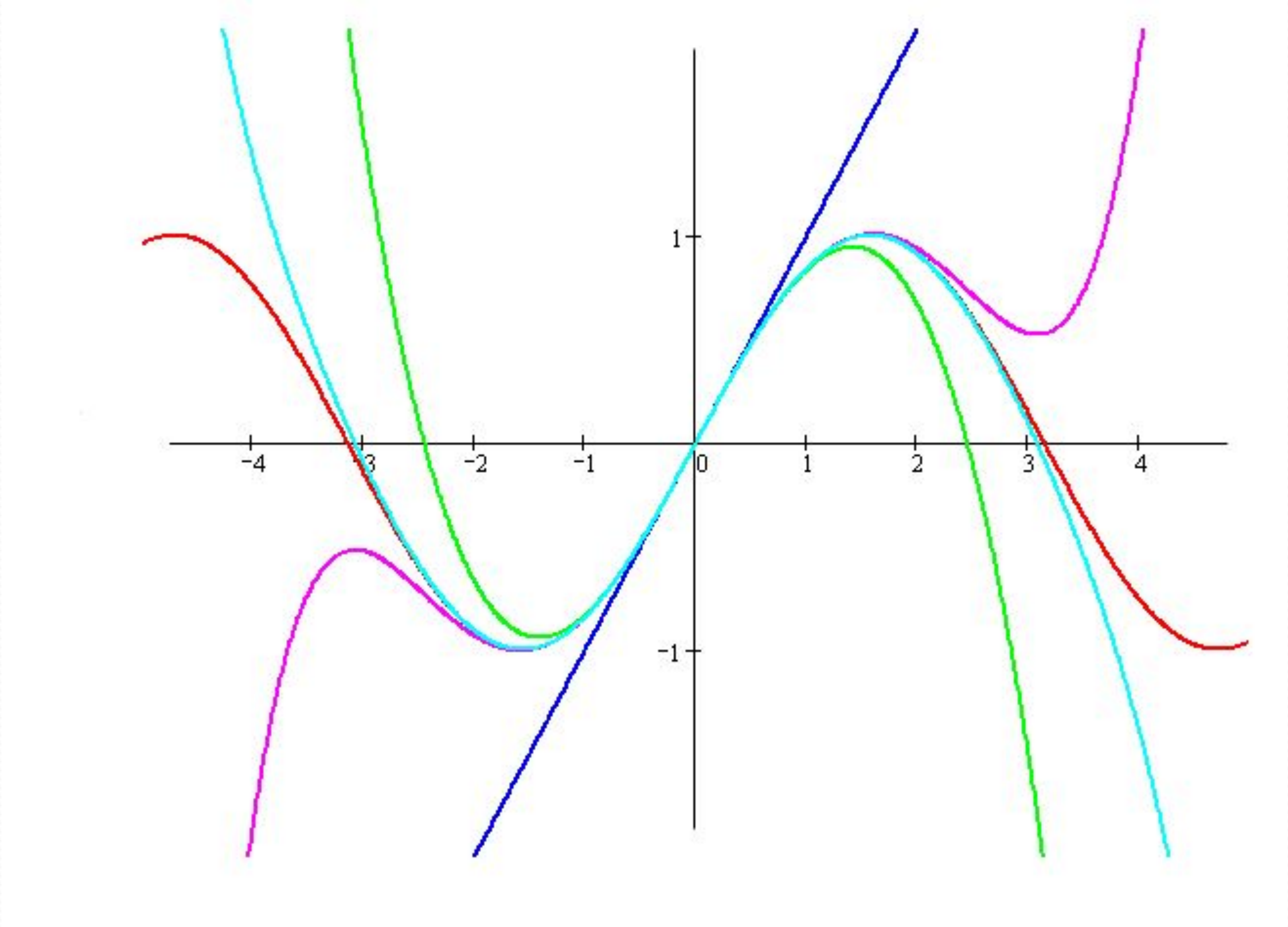
Формула Маклорена

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\cdot x^{n+1}$$

Пример. $y = e^x$



Пример. $y = \sin x$



§ 10 Экстремум функции

Определение 1. Пусть на промежутке (a,b) функция $y = f(x)$ определена, непрерывна и в некоторой ε-окрестности точки $x_0 \in (a,b)$ выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$ $\left(f(x) > f(x_0)\right)$. Тогда точка x_0 называется точкой локального максимума (точкой локального минимума) функции.

Теорема 1. (необходимое условие экстремума). Пусть функция f дифференцируема на (a,b), $x_0 \in (a,b)$. Для того, чтобы точка x_0 была точкой экстремума функции необходимо, чтобы её производная в этой точке равнялась нулю или не существовала.

Определение 2. Точки, в которых выполнено необходимое условие экстремума, называются критическими, или стационарными, точками.

Теорема 2. (первое достаточное условие экстремума).

Пусть $x_0 \in (a,b)$ и пусть в окрестности этой точки за исключением, может быть, самой этой точки, функция $y = f(x)$ дифференцируема. Тогда

1) если при переходе аргумента через точку x_0 производная функции меняет свой знак с плюса на минус, то x_0 есть точка максимума функции;
2) если при переходе аргумента через точку x_0 производная функции меняет свой знак с минуса на плюс, то x_0 есть точка минимума функции;
3) если при переходе аргумента через точку x_0 производная не меняет свой знак, то x_0 не является точкой экстремума.

Теорема 3 (второе достаточное условие экстремума).
Если первая производная $f'(x)$ дважды дифференцируемой функции равна нулю в некоторой точке x_0 и

1) $f''(x_0) > 0$, то x_0 - точка локального минимума функции
2) $f''(x_0) < 0$, то x_0 - точка локального максимума функции