



**Российская академия народного хозяйства и
государственной службы при Президенте РФ**

Факультет национальной безопасности

Раздел 3 тема № 2

«СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ»

Лекция № 3

профессор Резниченко Александр Васильевич

Москва – 2015



УЧЕБНЫЕ ВОПРОСЫ:

- 1. Многомерная случайная величина и закон ее распределения**
- 2. Функция и плотность распределения двумерной случайной величины**
- 3. Числовые характеристики двумерной случайной величины**

Литература

1. Кремер Н.Ш. «Теория вероятностей и математическая статистика». Учебник для вузов. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2012.
2. «Математика для экономистов от арифметики до эконометрики: базовый курс / Под ред. профессора Н.Ш. Кремера. – М.: «ИД Юрайт», 2012.
3. «Математика: Математический анализ. Дифференциальные уравнения. Теория вероятностей. Математическая статистика». Учебно-методическое пособие / Под ред. А.Н. Данчула. М.: Изд-во РАГС, 2004.



ПЕРВЫЙ ВОПРОС

**Многомерная случайная величина
и закон ее распределения**

Определение.

Случайной называется величина, которая в результате испытания может принять то или иное значение из некоторой совокупности своих возможных значений, причем заранее неизвестно какое именно.

Определение.

Если результат испытания характеризуется не одной случайной величиной, а некоторой системой случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_n$, то ее называют **многомерной** (n - мерной) **случайной величиной** или случайным вектором $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$.

Пример.

Теоретико-множественная трактовка понятия **многомерной случайной величины**.
Подбрасывают одновременно две игральные кости: случайная величина X – сумма очков, полученных в результате испытания; случайная величина Y – их произведение.

Показать, что двумерная случайная величина (X, Y) есть функция элементарных исходов (событий) ω .
Поскольку любая случайная величина X_i ($i = 1, 2, \dots, n$) в теоретико-множественной трактовке есть функция элементарных

Решение.
событий ω , входящих в пространство элементарных событий Ω .
Множество элементарных исходов (пространство элементарных событий) состоит из 36 элементарных исходов, т.е. функция элементарных событий ω :

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{36}\} = \{1/1, 1/2, \dots, 1/6, 2/1, 2/2, \dots, 2/6, \dots, 6/1, 6/2, \dots, 6/6\},$$
$$(X_1, X_2, \dots, X_n) = f(\omega),$$

где элементарный исход, например $\omega_6 = 1/6$, означает выпадение 1 очка и 6 очков.
Т.е. каждому элементарному событию ω ставится в соответствие при подбрасывании **первой** **игральной кости** 1 очка и **второй** **кости** – 6 очков.

Если результатом испытания X_n является какой-либо элементарный исход (событие) ω , то случайные величины X и Y получают определенные значения; например, при $\omega_6 = 1/6$ $X=7$, $Y=6$.
Другими словами вектор $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ называется **реализацией** случайного вектора $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$.

Совокупность этих значений (X, Y) представляет, таким образом, **функцию элементарных исходов** (событий) ω_i .

Определение.

Если результат испытания характеризуется не одной случайной величиной, а некоторой системой случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_n$, то ее называют **многомерной** (n -мерной) **случайной величиной** или случайным вектором $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$.

Примеры многомерных случайных величин:

1. Успеваемость выпускника вуза характеризуется системой n случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_n$ — оценками по различным предметам, проставленными в приложении к диплому.

2. Погода в данном месте в определенное время суток может быть охарактеризована системой случайных величин: X_1 — температура; X_2 — влажность; X_3 — давление; X_4 — скорость ветра и т.п.

Случайные величины $X_1, X_2, \dots, X_n$, входящие в систему, могут быть как дискретными (**пример 1**), так и непрерывными (**пример 2**).

Геометрически двумерную (X, Y) и трехмерную (X, Y, Z) случайные величины можно изобразить **случайной точкой** или **случайным вектором** **плоскости** O_{xy} или **трехмерного пространства** O_{xyz} , при этом случайные величины X, Y или X, Y, Z являются составляющими этой случайной величины такой закон может быть задан в форме таблицы (матрицы), содержащей всевозможные сочетания значений каждой из одномерных случайных величин, входящих в систему, и соответствующие им вероятности.

В случае n -мерного пространства ($n > 3$) также говорят о случайной точке или случайном векторе этого пространства, хотя геометрическая интерпретация в этом случае теряет свою наглядность.

Матрица распределения двумерной дискретной случайной величины

$x_i \backslash y_j$	y_1	...	y_j	...	y_m	$\sum_{j=1}^m$
x_1	p_{11}	...	p_{1j}	...	p_{1m}	p_1
...	...	...	...	...	...	...
x_i	p_{i1}	...	p_{ij}	...	p_{im}	p_i
...	...	...	...	...	...	...
x_n	p_{n1}	...	p_{nj}	...	p_{nm}	p_n
$\sum_{i=1}^n$	p_1	...	p_j	...	p_m	$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p_{ij} = 1$

$$\begin{aligned}
 p_i &= P(X = x_i) = P[(X = x_i)(Y = y_1) + (X = x_i)(Y = y_2) + \dots + (X = x_i)(Y = y_m)] = \\
 &= p_{i1} + p_{i2} + \dots + p_{ij} + \dots + p_{im} = \sum_{j=1}^m p_{ij}.
 \end{aligned}$$



Таким образом, чтобы по таблице распределения найти вероятность того, что одномерная случайная величина примет определенное значение, надо просуммировать вероятности p_{ij} из соответствующей этому значению строки (столбца) данной таблицы.

Определение.

Если зафиксировать значение одного из аргументов, например, положить $Y = y_j$ то полученное распределение случайной величины X называется **условным распределением X при условии $Y = y_j$** .

Вероятности $p_j(x_i)$ или $P(x_i|y_j)$ этого распределения будут **условными вероятностями** события $X = x_i$, найденными в предположении, что событие $Y = y_j$ произошло.

Из определения условной вероятности:

$$p_j(x_i) = P(x_i | y_j) = \frac{P[(X = x_i)(Y = y_j)]}{P[(Y = y_j)]} = \frac{p_{ij}}{p_j}.$$

Аналогично условное распределение случайной величины Y при условии $X = x_i$ задается с помощью условных вероятностей:

$$p_i(y_j) = P(y_j | x_i) = \frac{P[(X = x_i)(Y = y_j)]}{P[(X = x_i)]} = \frac{p_{ij}}{p_i}.$$

Пример.

Закон распределения дискретной двумерной случайной величины (X, Y) задан в таблице:

$x_i \backslash y_j$	-1	0	1	2
1	0,10	0,25	0,30	0,15
2	0,10	0,05	0,00	0,05

Найти:

- а) законы распределения одномерных случайных величин X и Y ;
- б) условные законы распределения случайной величины X при условии $Y=2$ и случайной величины Y при условии $X=1$;
- в) вычислить $P(Y < X)$ и $P(Y \geq X)$.

Решение.

а) Случайная величина X может принимать значения:

$X = 1$ с вероятностью $p_1 = 0,10 + 0,25 + 0,30 + 0,15 = 0,8$;

$X = 2$ с вероятностью $p_2 = 0,10 + 0,05 + 0,00 + 0,05 = 0,2$.

Следовательно ее закон распределения

Y_j		-1	0	1	2
X_i	1	x_i 0,10	0,25	0,30	0,15
	2	p_i 0,10	0,05	0,00	0,05

Аналогично закон распределения

$Y:$	y_j	-1	0	1	2
	p_j	0,2	0,3	0,3	0,2

б) Условный закон распределения X при условии, что $Y = 2$, получим, если вероятности p_{ij} , стоящие в последнем столбце исходной таблицы, разделим на их сумму, т.е. $p(Y = 2) = 0,2$.

Получим

		y_j			
		-1	0	1	2
x_i	1	0,10	0,25	0,30	0,25
	2	0,10	0,05	0,00	0,05

Аналогично для получения условного закона распределения Y при условии $X = 1$ вероятности p_{ij} , стоящие в первой строке исходной таблицы, делим на их сумму, т.е. на $p(X = 1) = 0,8$.

Получим

y_j	-1	0	1	2
$p_i(y_j)$	0,125	0,3125	0,375	0,1875

В) Для нахождения вероятностей $P(Y < X)$ складываем вероятности событий p_{ij} , из таблицы, для которых $y_j < x_i$:

$x_i \backslash y_j$	-1	0	1	2
1	0,10	0,25	0,30	0,15
2	0,10	0,05	0,00	0,05

Получим $P(Y < X) = 0,10 + 0,25 + 0,10 + 0,05 + 0,00 = 0,5$.

Аналогично для нахождения вероятностей $P(Y \geq X)$ складываем вероятности событий p_{ij} , из таблицы, для которых $y_j \geq x_i$

Получим $P(Y \geq X) = 0,30 + 0,15 + 0,05 = 0,5$.



ВТОРОЙ ВОПРОС

**Функция и плотность распределения
двумерной случайной величины**

Определение.

Функцией распределения n -мерной случайной величины $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ называется функция $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$, выражающая вероятность совместного выполнения n неравенств*:

$$X_1 < x_1, X_2 < x_2, \dots, X_n < x_n,$$

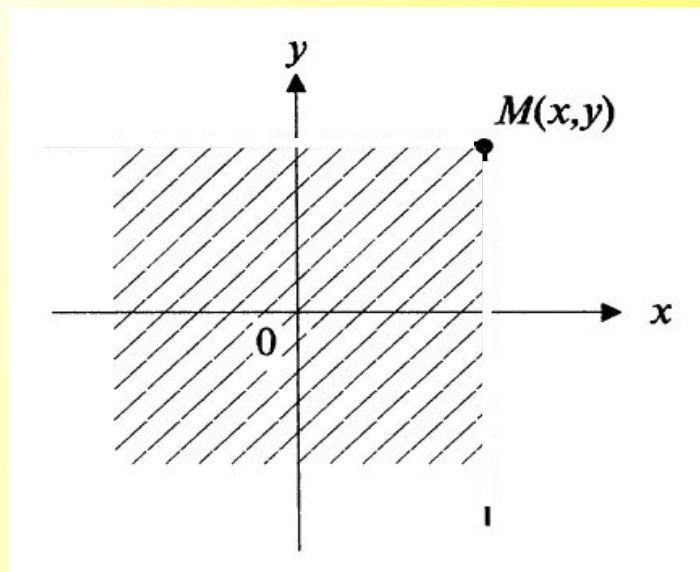
т.е.

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(X_1 < x_1, X_2 < x_2, \dots, X_n < x_n).$$

В двумерном случае для случайной величины (X, Y) функция распределения $F(x, y)$ определяется равенством:

$$F(x, y) = P(X < x, Y < y).$$

* Функцию $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называют также **совместной функцией распределения** случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_n$



Геометрически функция распределения $F(x, y)$ означает вероятность попадания случайной точки (X, Y) в заштрихованную область — бесконечный квадрант, лежащий левее и ниже точки $M(x, y)$.

Правая и верхняя границы области в квадрант не включаются — это означает, что функция распределения непрерывна слева по каждому из аргументов.

В случае **дискретной двумерной случайной величины** ее функция распределения определяется по формуле:

В нашей лекции мы в основном будем вести изложение для двумерной ($n=2$) случайной величины, при этом практически все понятия и утверждения, сформулированные для $n=2$, могут быть перенесены и на случай $n>2$.

$$F(x, y) = \sum_i \sum_j P_{ij},$$

где суммирование вероятностей распространяется на все i , для которых $x_i < x$, и все j , для которых $y_j < y$.

Однако рассмотрение именно двумерной случайной величины позволяет сделать изложение наглядным и менее громоздким.

Для **дискретной случайной двумерной величины** (X, Y) ее функция распределения представляет собой некоторую ступенчатую поверхность, ступени которой соответствуют скачкам функции $F(x, y)$.

СВОЙСТВА ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДВУМЕРНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

1. Функция распределения $F(x,y)$ есть неотрицательная функция, заключенная между нулем и единицей, т.е. $0 < F(x,y) < 1$.

2. Функция распределения $F(x,y)$ есть неубывающая функция по каждому из аргументов, т.е.

при $x_2 > x_1$ $F(x_2, y) \geq F(x_1, y)$, при $y_2 > y_1$ $F(x, y_2) \geq F(x, y_1)$.

3. Если хотя бы один из аргументов обращается в $-\infty$, функция распределения $F(x,y)$ равна нулю, т.е. $F(x, -\infty) = F(-\infty, y) = F(-\infty, -\infty) = 0$.

СВОЙСТВА ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДВУМЕРНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

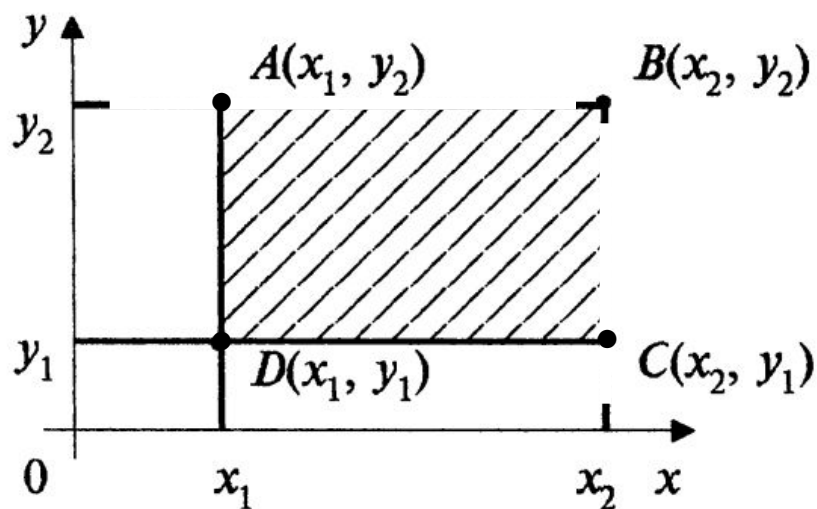
4. Если один из аргументов обращается в $+\infty$, функция распределения $F(x, y)$ становится равной функции распределения случайной величины, соответствующей другому аргументу:

$$F(x, +\infty) = F_1(x) \text{ и } F(+\infty, y) = F_2(y)$$

где $F_1(x)$ и $F_2(y)$ – функции распределения случайных величин X и Y , т.е. $F_1(x) = P(X < x)$, а $F_2(y) = P(Y < y)$.

5. Если оба аргумента равны $+\infty$, то функция распределения равна единице: $F(+\infty, +\infty) = 1$.

Геометрически функция распределения есть некоторая поверхность, обладающая указанными свойствами.



Зная функцию распределения $F(x, y)$, можно найти вероятность попадания случайной точки (X, Y) в пределы прямоугольника **ABCD**, т.е.

$$P[(x_1 \leq X < x_2)(y_1 \leq Y < y_2)]$$

Так как эта вероятность равна вероятности попадания в бесконечный квадрант с вершиной **B**(x_2, y_2) минус вероятности попадания в квадранты с вершинами соответственно в точках **A**(x_1, y_2) и **C**(x_2, y_1) плюс вероятность попадания в квадрант с вершиной в точке **D**(x_1, y_1) (ибо эта вероятность вычиталась дважды), то

$$P[(x_1 \leq X < x_2)(y_1 \leq Y < y_2)] = F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1).$$

Определение.

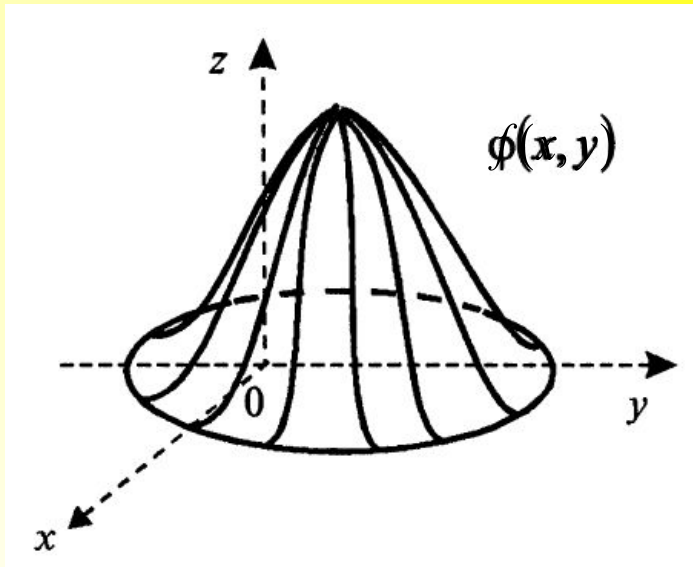
Двумерная случайная величина (X, Y) называется **непрерывной**, если ее функция распределения $F(x, y)$ – непрерывная функция, дифференцируемая по каждому из аргументов, и существует вторая смешанная производная $F''_{xy}(x, y)$.

Определение.

Плотностью вероятности (плотностью распределения или совместной плотностью) непрерывной двумерной случайной величины (X, Y) называется вторая смешанная частная производная ее функции распределения, т.е.

$$f(x, y) = \frac{d^2 F(x, y)}{dxdy} = F''_{xy}(x, y).$$

Геометрически плотность вероятности двумерной случайной величины (X, Y) представляет собой поверхность распределения в пространстве **Oxyz**.



СВОЙСТВА ПЛОТНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДВУМЕРНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

1. Плотность вероятности двумерной случайной величины есть неотрицательная функция, т.е. $f(x, y) \geq 0$.
2. Вероятность попадания непрерывной двумерной величины (X, Y) в область D равна:

$$P[(X, Y) \in D] = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

Если вероятность попадания на отрезок $[a, b]$ **одномерной случайной величины** геометрически выражается площадью фигуры, ограниченной сверху кривой распределения $f(x)$ и опирающейся на отрезок $[a, b]$, то вероятность попадания **дву-**

Функция распределения $F(x, y)$ есть вероятность попадания в бесконечный квадрант D , который можно рассматривать как прямоугольник, ограниченный **абсциссами** $-\infty$ и x , а также **ординатами** $-\infty$ и y .

Зная **плотность вероятности двумерной случайной величины** (X, Y) , можно найти **функции распределения ее одномерных составляющих** X и Y :

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{+\infty} f(t, y) dt dy, \quad F_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^y f(x, t) dx dt.$$

Дифференцируя функции распределения $F_1(x)$ и $F_2(y)$ соответственно по аргументам x и y , получим **плотности вероятности одномерных случайных величин** X и Y

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy, \quad f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx.$$

т.е. **несобственный интеграл в бесконечных пределах от совместной плотности $f(x, y)$ двумерной случайной величины по аргументу x дает плотность вероятности $f_2(y)$, а по аргументу y — плотность вероятности $f_1(x)$.**

Пример.

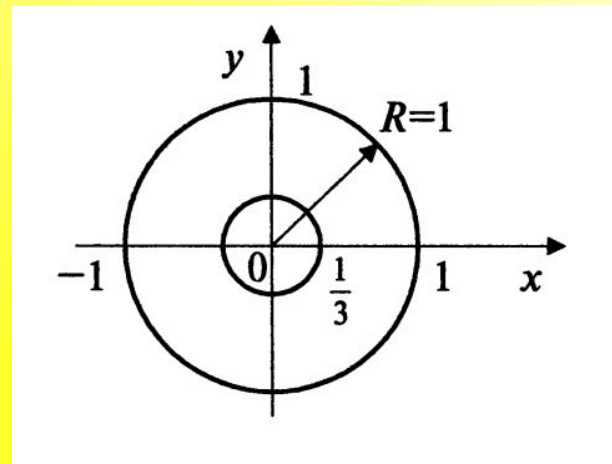
Двумерная случайная величина распределена равномерно в круге радиуса $R = 1$.

Определить:

а) выражение совместной плотности распределения двумерной случайной величины (X, Y) ;

б) плотности вероятности одномерных составляющих X и Y ;

в) вероятность того, что расстояние от точки $M(x, y)$ до начала координат будет меньше $1/3$.



Решение.

в) вероятность того, что случайная точка $M(x, y)$ будет находиться в круге радиуса $R_1 = 1/3$ можно найти по формуле

$$P\left(\sqrt{X^2 + Y^2} < \frac{1}{3}\right) = P\left(X^2 + Y^2 < \frac{1}{9}\right) = \int_{-1/3}^{1/3} \int_{-\sqrt{1/9-x^2}}^{\sqrt{1/9-x^2}} \frac{1}{\pi} dx dy,$$

или:

$$P\left(X^2 + Y^2 < \frac{1}{9}\right) = (\pi \cdot R_1^2) / (\pi \cdot R^2) = R_1^2 / R^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 / 1^2 = \frac{1}{9}.$$

Определение.

~~Для независимых случайных величин~~
Условным законом распределения одной из одномерных составляющих двумерной случайной величины (X, Y) называется ее закон распределения, вычисленный при условии, что другая составляющая приняла определенное значение (или попала в какой-то интервал). т.е. условная плотность вероятности одной из одномерных составляющих двумерной случайной величины равна отношению ее совместной плотности к плотности вероятности другой составляющей.

Данные соотношения записанные в виде $f(x, y) = f_1(x)f_x(y) = f_2(y)f_y(x)$ называются **теоремой умножения плотностей распределений**.

Кроме того

$$f_y(x) = \frac{f(x, y)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx}, \quad f_x(y) = \frac{f(x, y)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy}.$$

Определение.

Случайные величины X и Y называются **независимыми**, если их совместная функция распределения $F(x, y)$ представляется в виде произведения функций распределения одной из них и $F_2(y)$ (или $F_1(x)$), т.е. если для любых возможных значений приняла другая величина.

В противном случае случайные величины X и Y называются **зависимыми**. В противном случае, при невыполнении этого равенства, случайные величины X и Y называются **связанными**. Если случайных величин X и Y их совместная плотность $f(x, y)$ равна произведению плотностей вероятности $f_1(x)$ и $f_2(y)$ этих случайных величин.

Таким образом (**теорема умножения плотностей распределений**), независимость двух случайных величин X и Y означает, что условные плотности вероятности каждой из них совпадают с соответствующими «безусловными» плотностями, т.е.

$$f_y(x) = f_1(x) \text{ и } f_x(y) = f_2(y).$$



ТРЕТИЙ ВОПРОС

**Числовые характеристики
двумерной случайной величины**

При изучении двумерных случайных величин рассматриваются **числовые характеристики одномерных составляющих X и Y — математические ожидания и дисперсии.**

Так, для непрерывной случайной величины (X, Y) они определяются по формулам:

$$a_x = M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x, y) dx dy,$$

$$a_y = M(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y f(x, y) dx dy,$$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - a_x)^2 f(x, y) dx dy,$$

$$D(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (y - a_y)^2 f(x, y) dx dy.$$

Определение.

Ковариацией (или **корреляционным моментом**) K_{xy} случайных величин X и Y называется математическое ожидание произведения отклонений этих величин от своих математических ожиданий, т.е. $K_{xy} = M[(X - M(X))(Y - M(Y))]$, для которой известно **распределение** или **совместная плотность** вероятности $f(x, y)$, то мы можем найти математические ожидания $M(X) = a_x$ и $M(Y) = a_y$ и дисперсии $D(X) = \sigma_x^2$ и $D(Y) = \sigma_y^2$ одномерных составляющих X и Y .

Однако математические ожидания и дисперсии случайных величин X и Y недостаточно полно характеризуют двумерную случайную величину (X, Y) , так как не выражают степени зависимости ее составляющих X и Y .

Эту роль выполняют **ковариация** и **коэффициент корреляции**.

Для непрерывных случайных величин $K_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - a_x)(y - a_y) f(x, y) dx dy$.

* Ковариацию называют еще **вторым смешанным центральным моментом** случайных величин X и Y и обозначают $\text{cov}(X, Y)$.

СВОЙСТВА КОВАРИАЦИИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

1. Ковариация двух независимых случайных величин равна нулю.
2. Ковариация двух случайных величин равна математическому ожиданию их произведения минус произведение математических ожиданий, т. е.

$$K_{xy} = M(XY) - M(X) \cdot M(Y) \quad \text{или} \quad K_{xy} = M(XY) - a_x \cdot a_y.$$

3. Ковариация двух случайных величин по абсолютной величине не превосходит произведения их средних квадратических отклонений, т.е.

$$|K_{xy}| \leq \sigma_x \sigma_y.$$

Взяв очевидное неравенство и преобразовав его, получаем:

$$\frac{D(X)}{\sigma_x^2} \pm \frac{2K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} + \frac{D(Y)}{\sigma_y^2} = 2 \pm \frac{2K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \geq 0, \quad \text{откуда следует доказываемое.}$$

$$M\left(\frac{X - M(X)}{\sigma_x} \pm \frac{Y - M(Y)}{\sigma_y}\right)^2 \geq 0$$

Определение.

Коэффициентом корреляции двух случайных величин называется отношение их ковариации к произведению средних квадратических отклонений этих величин:

$$\rho_{xy} = \text{corr}(X, Y) = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}.$$

Из определения следует, что $\rho_{xy} = \rho_{yx} = \rho$. Очевидно также, что коэффициент корреляции есть безразмерная величина.

СВОЙСТВА КОЭФФИЦИЕНТА КОРРЕЛЯЦИИ

1. Коэффициент корреляции принимает значения на отрезке $[-1; 1]$.
2. Если случайные величины независимы, то их коэффициент корреляции равен нулю, т.е. $\rho = 0$.

Из независимости случайных величин следует их некоррелированность ($\rho = 0$). Обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

3. Если коэффициент корреляции двух случайных величин равен (по абсолютной величине) единице, то между этими случайными величинами существует линейная функциональная зависимость.

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ И ДИСПЕРСИИ

1. Математическое ожидание произведения двух случайных величин равно сумме произведения их математических ожиданий и ковариации этих случайных величин:

$$M(XY) = M(X) \cdot M(Y) + K_{xy},$$

Если $K_{xy} = 0$, то

$$M(XY) = M(X) \cdot M(Y),$$

т.е. математическое ожидание произведения двух некоррелированных случайных величин равно произведению их математических ожиданий*.

2. Дисперсия суммы двух случайных величин равна сумме их дисперсий плюс удвоенная ковариация этих случайных величин:

$$D(X+Y) = D(X) + D(Y) + 2K_{xy}.$$

Для некоррелированных (и, разумеется, для независимых) случайных величин

$$D\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n D(X_i).$$

Наряду с вышеуказанными рассматриваются такие числовые характеристики условных распределений, как: **условные математические ожидания** $M_x(Y)$ и $M_y(X)$ и **условные дисперсии** $D_x(Y)$ и $D_y(X)$.

Эти характеристики находятся по обычным формулам **математического ожидания** и **дисперсии**, в которых вместо вероятностей событий p_i и p_j или плотностей вероятности $f_1(x)$ и $f_2(y)$ используются условные вероятности $p_j(x_i)$ и $p_i(y_j)$ или условные плотности вероятности $f_y(x)$ и $f_x(y)$.

Например, для непрерывной случайной величины (X, Y)

$$M_x(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot f_x(y) dy,$$

$$D_x(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} [y - M_x(Y)]^2 f_x(y) dy.$$

Условное математическое ожидание случайной величины Y при $X = x$, т.е. $M_x(Y)$, есть функция от x , называемая **функцией регрессии** или просто **регрессией** Y по X ; аналогично $M_y(X)$ называется **функцией регрессии** или просто **регрессией** X по Y .

Графики этих функций называются соответственно **линиями регрессии** (или **кривыми регрессии**) Y по X и X по Y .

***Благодарю за внимание,
лекция окончена!***

