**Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ**

**Факультет национальной безопасности**

***Раздел 3 тема № 2***

# «СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ»

## Лекция № 3

**профессор Резниченко Александр Васильевич**

**Москва – 2015**

## УЧЕБНЫЕ ВОПРОСЫ:

1. **Многомерная случайная величина и закон ее распределения**
2. **Функция и плотность распределения двумерной случайной величины**
3. **Числовые характеристики двумерной случайной величины**

# Литература


1. Кремер Н.Ш. «Теория вероятностей и математическая статистика». Учебник для вузов. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2012.
2. «Математика для экономистов от арифметики до эконометрики: базовый курс / Под ред. профессора Н.Ш. Кремера. – М.: «ИД Юрайт», 2012.
3. «Математика: Математический анализ. Дифференциальные уравнения. Теория вероятностей. Математическая статистика». Учебно-методическое пособие / Под ред. А.Н. Данчула. М.: Изд-во РАГС, 2004.

## ПЕРВЫЙ ВОПРОС

# Многомерная случайная величина и закон ее распределения

**Определение.**

**Случайной** *называется величина, которая в результате испытания может принять то или иное значение из некоторой совокупности своих возможных значений, причем заранее неизвестно какое именно.*

**Определение.**

*Если результат испытания характеризуется не одной случайной величиной, а некоторой системой случайных величин* $X_1, X_2, ..., X_n$, *то ее называют* ***многомерной*** *(n - мерной)* ***случайной величиной*** *или случайным вектором* $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$.

**Пример.**

Подбрасывают одновременно две игральные кости; случайная величина $X$ – сумма очков, полученных в результате испытания; случайная величина $Y$ – их произведение.

Показать, что двумерная случайная величина $(X, Y)$ есть функция элементарных исходов (событий) $\omega$.

**Решение.**

Множество элементарных исходов (пространство элементарных событий) состоит из 36 элементарных исходов, т.е.

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_{36}\} = \{1/1, 1/2, ..., 1/6, 2/1, 2/2, ..., 2/6, ..., 6/1, 6/2, ..., 6/6\},$$

где элементарный исход, например $\omega_6 = 1/6$, означает выпадение при подбрасывании *первой игральной кости* 1 очка и *второй кости* — 6 очков.

Другими словами вектор $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ называется *реализацией* случайного вектора $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$.

Совокупность этих значений $(X, Y)$ представляет, таким образом, *функцию элементарных исходов* (событий) $\omega_i$.

Поскольку любая случайная величина $X_i$ ($i = 1,2,...,n$) в теоретико-множественной трактовке есть функция элементарных событий $\omega$, входящих в пространство элементарных событий $\Omega$ ($\omega \in \Omega$), то и *многомерная случайная величина* есть функция элементарных событий $\omega$:

$$(X_1, X_2, ..., X_n) = f(\omega),$$

т.е. каждому элементарному событию $\omega$ ставится в соответствие несколько действительных чисел $x_1, x_2, ..., x_n$, которые приняли случайные величины $X_1, X_2, ..., X_n$ в результате испытания.

Если результатом испытания является какой-нибудь элементарный исход (событие) $\omega_i$, то случайные величины $X$ и $Y$ получат определенные значения: например, при $\omega_6 = 1/6$ $X = 7$, $Y = 6$.

**Теоретико-множественная трактовка понятия многомерной случайной величины.**

**Определение.**

*Если результат испытания характеризуется не одной случайной величиной, а некоторой системой случайных величин* $X_1, X_2, ..., X_n$, *то ее называют* ***многомерной*** *(n - мерной)* ***случайной величиной*** *или случайным вектором* $X = (X_1, X_2,...,X_n)$.

**Примеры многомерных случайных величин:**

1. Успеваемость выпускника вуза характеризуется системой ***n*** случайных величин $X_1, X_2, ..., X_n$ — оценками по различным предметам, проставленными в приложении к диплому.

2. Погода в данном месте в определенное время суток может быть охарактеризована системой случайных величин: $X_1$ − температура; $X_2$ − влажность; $X_3$ − давление; $X_4$ − скорость ветра и т.п.

Случайные величины $X_1, X_2,...,X_n$, входящие в систему, могут быть как дискретными (**пример 1**), так и непрерывными (**пример 2**).

***Геометрически*** двумерную (***X***, ***Y***) и трехмерную (***X***, ***У***, ***Z***) случайные величины можно изобразить ***случайной точкой*** или ***случайным вектором плоскости*** $O_{xy}$ или трехмерного пространства $O_{xyz}$, при этом случайные величины ***X***, ***Y*** или ***X***, ***Y***, ***Z*** являются составляющими этих векторов.

В случае ***n***-мерного пространства (***n*** > 3) также говорят о случайной точке или случайном векторе этого пространства, хотя геометрическая интерпретация в этом случае теряет свою наглядность.

Наиболее полным, исчерпывающим описанием ***многомерной случайной величины*** является ***закон ее распределения***.

При конечном множестве возможных значений многомерной случайной величины такой закон может быть задан в форме таблицы (матрицы), содержащей всевозможные сочетания значений каждой из одномерных случайных величин, входящих в систему, и соответствующие им вероятности.

# Матрица распределения двумерной дискретной случайной величины

| $x_i$ \ $y_j$ | $y_1$ | … | $y_j$ | … | $y_m$ | $\sum_{j=1}^{m}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | $p_{11}$ | … | $p_{1j}$ | … | $p_{1m}$ | $p_1$ |
| … | … | … | … | … | … | … |
| $x_i$ | $p_{i1}$ | … | $p_{ij}$ | … | $p_{im}$ | $p_i$ |
| … | … | … | … | … | … | … |
| $x_n$ | $p_{n1}$ | … | $p_{nj}$ | … | $p_{nm}$ | $p_n$ |
| $\sum_{i=1}^{n}$ | $p_1$ | … | $p_j$ | … | $p_m$ | $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1$ |

$$p_i = P(X = x_i) = P[(X = x_i)(Y = y_1) + (X = x_i)(Y = y_2) + \ldots + (X = x_i)(Y = y_m) =$$

$$= p_{i1} + p_{i2} + \ldots + p_{ij} + \ldots + p_{im} = \sum_{i=1}^{m} p_{ij}.$$

Таким образом, чтобы по таблице распределения найти вероятность того, что одномерная случайная величина примет определенное значение, надо просуммировать вероятности $p_{ij}$ из соответствующей этому значению строки (столбца) данной таблицы.

**Определение.**

Если зафиксировать значение одного из аргументов, например, положить $Y = y_j$ то полученное распределение случайной величины $X$ называется ***условным распределением X при условии*** $Y = y_j$.

***Вероятности*** $p_j(x_i)$ или $P(x_i|y_j)$ этого распределения будут ***условными вероятностями*** события $X = x_i$, найденными в предположении, что событие $Y = y_j$ произошло.

Из определения условной вероятности:

$$p_j(x_i) = P(x_i \mid y_j) = \frac{P[(X = x_i)(Y = y_j)]}{P[(Y = y_j)]} = \frac{p_{ij}}{p_j}.$$

Аналогично условное распределение случайной величины $Y$ при условии $X = x_i$ задается с помощью условных вероятностей:

$$p_i(y_j) = P(y_j \mid x_i) = \frac{P[(X = x_i)(Y = y_j)]}{P[(X = x_i)]} = \frac{p_{ij}}{p_i}.$$

**Пример.**

Закон распределения дискретной двумерной случайной величины ($X$, $Y$) задан в таблице:

| $x_i$ \ $y_j$ | -1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,10 | 0,25 | 0,30 | 0,15 |
| 2 | 0,10 | 0,05 | 0,00 | 0,05 |

**Найти:**

**а)** законы распределения одномерных случайных величин $X$ и $Y$;

**б)** условные законы распределения случайной величины $X$ при условии $Y = 2$ и случайной величины $Y$ при условии $X = 1$;

**в)** вычислить $P(Y < X)$ и $P(Y \geq X)$ .

## Решение.

**а)** Случайная величина $X$ может принимать значения:

$X = 1$ с вероятностью $p_1 = 0{,}10 + 0{,}25 + 0{,}30 + 0{,}15 = 0{,}8$;

$X = 2$ с вероятностью $p_2 = 0{,}10 + 0{,}05 + 0{,}00 + 0{,}05 = 0{,}2$.

Следовательно ее закон распределения

| $X_i$ : / $y_j$ | -1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,10 | 0,25 | 0,30 | 0,15 |
| 2 | 0,10 | 0,05 | 0,00 | 0,05 |

Аналогично закон распределения

$Y$ :

| $y_j$ | -1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| $p_j$ | 0,2 | 0,3 | 0,3 | 0,2 |

**б)** Условный закон распределения $X$ при условии, что $Y = 2$, получим, если вероятности $p_{ij}$, стоящие в последнем столбце исходной таблицы, разделим на их сумму, т.е. $p(Y = 2) = 0{,}2$.

Получим

$X_{Y=2}$ :

| $x_i$ \ $y_j$ | -1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,10 | 0,25 | 0,30 | 0,15 |
| 2 | 0,10 | 0,05 | 0,00 | 0,05 |

Аналогично для получения условного закона распределения $Y$ при условии $X = 1$ вероятности $p_{ij}$, стоящие в первой строке исходной таблицы, делим на их сумму, т.е. на $p(X = 1) = 0{,}8$.

Получим

$Y_{X=1}$ :

| $y_j$ | -1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| $p_i(y_j)$ | 0,125 | 0,3125 | 0,375 | 0,1875 |

**в)** Для нахождения вероятностей $P(Y < X)$ складываем вероятности событий $p_{ij}$, из таблицы, для которых $y_j < x_i$ :

| $x_i$ \ $y_j$ | -1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,10 | 0,25 | 0,30 | 0,15 |
| 2 | 0,10 | 0,05 | 0,00 | 0,05 |

Получим $P(Y < X) = 0,10 + 0,25 + 0,10 + 0,05 + 0,00 = 0,5$.

Аналогично для нахождения вероятностей $P(Y \geq X)$ складываем вероятности событий $p_{ij}$, из таблицы, для которых $y_j \geq x_i$

Получим $P(Y \geq X) = 0,30 + 0,15 + 0,05 = 0,5$.

## ВТОРОЙ ВОПРОС

# Функция и плотность распределения двумерной случайной величины

## Определение.

**Функцией распределения *n*-мерной случайной величины** $(\boldsymbol{X_1}, \boldsymbol{X_2}, ..., \boldsymbol{X_n})$ называется функция $\boldsymbol{F}(x_1, x_2, ..., x_n)$, выражающая вероятность совместного выполнения ***n*** неравенств*:

$$\boldsymbol{X_1} < x_1, \boldsymbol{X_2} < x_2, ..., \boldsymbol{X_n} < x_n,$$

т.е.

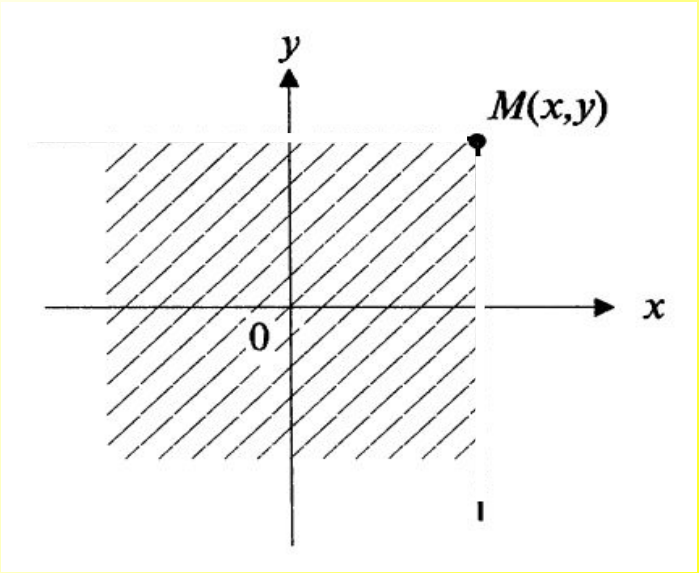
$$\boldsymbol{F}(x_1, x_2, ..., x_n) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{X_1} < x_1, \boldsymbol{X_2} < x_2, ..., \boldsymbol{X_n} < x_n).$$

***В двумерном случае*** для случайной величины $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ функция распределения $\boldsymbol{F}(x, y)$ определяется равенством:

$$\boldsymbol{F}(x, y)=\boldsymbol{P}(\boldsymbol{X} < x, \boldsymbol{Y} < y).$$

---

* Функцию $\boldsymbol{F}(x_1, x_2, ..., x_n)$ называют также ***совместной функцией распределения*** случайных величин $\boldsymbol{X_1}, \boldsymbol{X_2}, ..., \boldsymbol{X_n}$




Геометрически функция распределения $F(x,y)$ означает вероятность попадания случайной точки $(X,Y)$ в заштрихованную область — бесконечный квадрант, лежащий левее и ниже точки $M(x,y)$.

Правая и верхняя границы области в квадрант не включаются — это означает, что функция распределения непрерывна слева по каждому из аргументов.

В случае ***дискретной двумерной случайной величины*** ее функция распределения определяется по формуле:

$$F(x,y) = \sum_i \sum_j p_{ij},$$

где суммирование вероятностей распространяется на все $i$, для которых $x_i < x$, и все $j$, для которых $y_j < y$.

***В нашей лекции мы в основном будем вести изложение для двумерной*** $(n=2)$ ***случайной величины; при этом практически все понятия и утверждения, сформулированные для*** $n=2$, ***могут быть перенесены и на случай*** $n>2$.

***Однако рассмотрение именно двумерной случайной величины позволяет сделать изложение наглядным и менее громоздким.***

Для ***дискретной случайной двумерной величины*** $(X,Y)$ ее функция распределения представляет собой некоторую ступенчатую поверхность, ступени которой соответствуют скачкам функции $F(x, y)$.

# СВОЙСТВА ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДВУМЕРНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

**1.** Функция распределения $F(x,y)$ есть неотрицательная функция, заключенная между нулем и единицей, т.е. $0 < F(x,y) < 1$.

**2.** Функция распределения $F(x,y)$ есть неубывающая функция по каждому из аргументов, т.е.

при $x_2 > x_1$ $F(x_2,y) \geq F(x_1, y)$, при $y_2 > y_1$ $F(x, y_2) \geq F(x, y_1)$.

**3.** Если хотя бы один из аргументов обращается в $-\infty$, функция распределения $F(x,y)$ равна нулю, т.е. $F(x,-\infty) = F(-\infty,y) = F(-\infty,-\infty) = 0$.

# СВОЙСТВА ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДВУМЕРНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

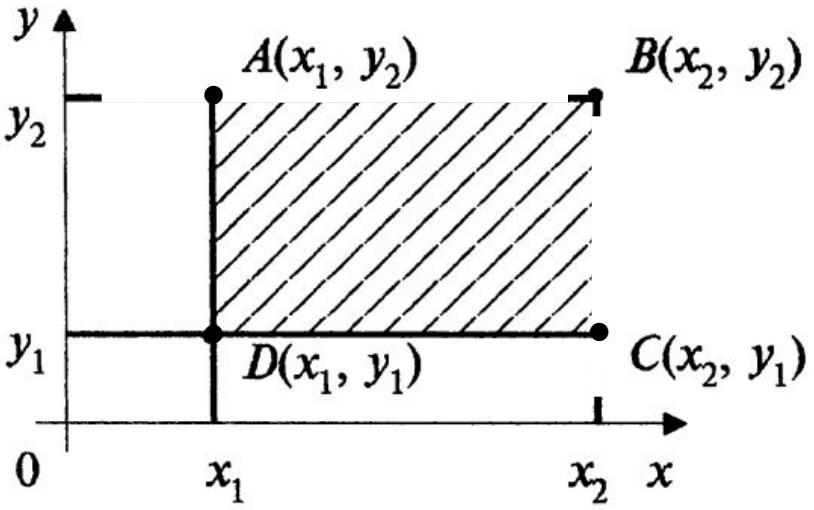
**4.** Если один из аргументов обращается в $+\infty$, функция распределения $F(x, y)$ становится равной функции распределения случайной величины, соответствующей другому аргументу:

$$F(x, +\infty) = F_1(x) \text{ и } F(+\infty, y) = F_2(y)$$

где $F_1(x)$ и $F_2(y)$ − функции распределения случайных величин $X$ и $Y$, т.е. $F_1(x) = P(X < x)$, а $F_2(y) = P(Y < y)$.

**5.** Если оба аргумента равны $+\infty$, то функция распределения равна единице: $F(+\infty,+\infty) = 1$.

***Геометрически функция распределения есть некоторая поверхность, обладающая указанными свойствами.***




Зная функцию распределения $F(x,y)$, можно найти вероятность попадания случайной точки $(X,Y)$ в пределы прямоугольника **ABCD**, т.е.

$$P[(x_1 \le X < x_2)(y_1 \le Y < y_2)]$$

Так как эта вероятность равна вероятности попадания в бесконечный квадрант с вершиной **B**$(x_2,y_2)$ минус вероятности попадания в квадранты с вершинами соответственно в точках **A**$(x_1,y_2)$ и **C**$(x_2,y_1)$ плюс вероятность попадания в квадрант с вершиной в точке **D**$(x_1,y_1)$ (ибо эта вероятность вычиталась дважды), то

$$P[(x_1 \le X < x_2)(y_1 \le Y < y_2)] = F(x_2,y_2) - F(x_1,y_2) - F(x_2,y_1) + F(x_1,y_1).$$

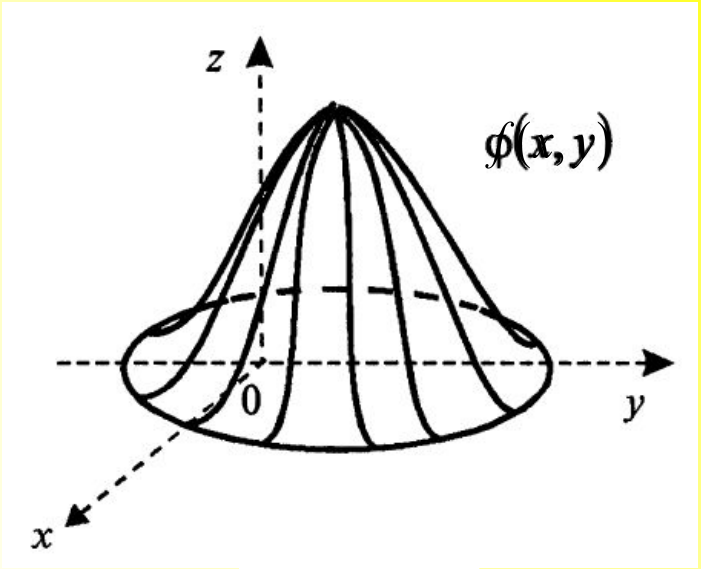
**Определение.**

Двумерная случайная величина (***X***,***Y***) называется ***непрерывной***, если ее функция распределения $F(x,y)$ − непрерывная функция, дифференцируемая по каждому из аргументов, и существует вторая смешанная производная $F''_{xy}(x,y)$.

**Определение.**

**Плотностью вероятности** (***плотностью распределения*** или ***совместной плотностью***) непрерывной двумерной случайной величины (***X***,***У***) называется вторая смешанная частная производная ее функции распределения, т.е.

$$f(x,y)=\frac{d^2F(x,y)}{dxdy}=F''_{xy}(x,y).$$




Геометрически плотность вероятности двумерной случайной величины (***X***,***У***) представляет собой поверхность распределения в пространстве ***Oxyz***.

# СВОЙСТВА ПЛОТНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДВУМЕРНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

**1.** Плотность вероятности двумерной случайной величины есть неотрицательная функция, т.е. $f(x,y) \geq 0$.

**2.** Вероятность попадания непрерывной двумерной величины (***X***, ***Y***) в область ***D*** равна:

$$P[(X,Y) \in D] = \iint_D f(x,y)dxdy.$$

*Если вероятность попадания на отрезок* [a,b] ***одномерной случайной величины*** *геометрически выражается площадью фигуры, ограниченной сверху кривой распределения* $f(x)$ *и опирающейся на отрезок* [a,b], *то вероятность попадания* ***дву-***

*Функция распределения* $F(x,y)$ *есть вероятность попадания в бесконечный квадрант* ***D***, *который можно рассматривать как прямоугольник, ограниченный* ***абсциссами*** $-\infty$ *и* $x$ , *а также* ***ординатами*** $-\infty$ *и* $y$.

Зная ***плотность вероятности двумерной случайной величины*** (***X***,***Y***), можно найти ***функции распределения ее одномерных составляющих*** ***X*** и ***Y***:

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t,y)\,dt\,dy, \qquad F_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{y} f(x,t)\,dx\,dt.$$

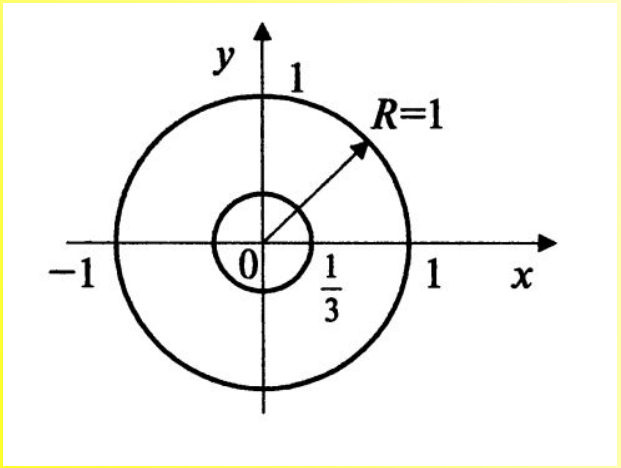
Дифференцируя функции распределения $F_1(x)$ и $F_2(y)$ соответственно по аргументам ***x*** и ***y***, получим ***плотности вероятности одномерных случайных величин*** ***X*** и ***Y***

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy, \qquad f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx.$$

т.е. *несобственный интеграл в бесконечных пределах от совместной плотности* $f(x,y)$ *двумерной случайной величины по аргументу* ***x*** *дает плотность вероятности* $f_2(y)$, *а по аргументу* ***y*** — *плотность вероятности* $f_1(x)$.

**Пример.**

**Двумерная случайная величина распределена равномерно в круге радиуса $R = 1$.**




**Определить:**

**а**) выражение совместной плотности распределения двумерной случайной величины ($X$, $Y$);

**б**) плотности вероятности одномерных составляющих $X$ и $Y$;

**в**) вероятность того, что расстояние от точки **M**($x$, $y$) до начала координат будет меньше **1/3**.

**Решение.**

**в**) вероятность того, что случайная точка **M**($x$,$y$) будет находиться в круге радиуса $R_1 = 1/3$ можно найти по формуле

$$P\left(\sqrt{X^2+Y^2} < \frac{1}{3}\right) = P\left(X^2+Y^2 < \frac{1}{9}\right) = \int_{-1/3}^{1/3}\int_{-\sqrt{1/9-x^2}}^{\sqrt{1/9-x^2}} \frac{1}{\pi} dxdy,$$

или:

$$P\left(X^2+Y^2 < \frac{1}{9}\right) = \left(\pi \cdot R_1^2\right)/\left(\pi \cdot R^2\right) = R_1^2 / R^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 / 1^2 = \frac{1}{9}.$$

**Определение.**

***Условным законом распределения одной из одномерных составляющих двумерной случайной величины*** называется ее закон распределения, вычисленный при условии, что другая составляющая приняла определенное значение (или попала в какой-то интервал).

т.е. *условная плотность вероятности одной из одномерных составляющих двумерной случайной величины равна отношению ее совместной плотности к плотности вероятности другой составляющей.*

Данные соотношения записанные в виде $f(x,y) = f_1(x) f_x(y) = f_2(y) f_y(x)$ называются ***теоремой умножения плотностей распределений***.

*Кроме того*

$$f_y(x) = \frac{f(x,y)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx}, \qquad f_x(y) = \frac{f(x,y)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy}.$$

**Определение.**

Случайные величины $X$ и $Y$ называются ***независимыми***, если их совместная функция распределения $F(x,y)$ представляется в виде произведения функций распределения $F_1(x)$ и $F_2(y)$ этих случайных величин, т.е.

$$F(x,y) = F_1(x) \cdot F_2(y).$$

В противном случае случайные величины $X$ и $Y$ называются ***зависимыми***.

В противном случае, при невыполнении этого равенства, случайные величины $X$ и $Y$ называются ***зависимыми***.

Для ***непрерывных случайных величин*** $X$ и $Y$ их совместная плотность $f(x,y)$ равна произведению плотностей вероятности $f_1(x)$ и $f_2(y)$ этих случайных величин.

Таким образом (*теорема умножения плотностей распределений*), независимость двух случайных величин $X$ и $Y$ означает, что условные плотности вероятности каждой из них совпадают с соответствующими «безусловными» плотностями, т.е.

$$f_y(x) = f_1(x) \text{ и } f_x(y) = f_2(y).$$

## ТРЕТИЙ ВОПРОС

# Числовые характеристики двумерной случайной величины

При изучении двумерных случайных величин рассматриваются ***числовые характеристики одномерных составляющих*** ***X*** и ***Y*** — ***математические ожидания*** и ***дисперсии***.

Так, для непрерывной случайной величины (***X***,***Y***) они определяются по формулам:

$$a_x = M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,y)dxdy,$$

$$a_y = M(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} yf(x,y)dxdy,$$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x-a_x)^2 f(x,y)dxdy,$$

$$D(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (y-a_y)^2 f(x,y)dxdy.$$

**Определение.**

***Ковариацией*** (или ***корреляционным моментом***) $K_{xy}$ случайных величин $X$ и $Y$ называется математическое ожидание произведения отклонений этих величин от своих математических ожиданий, т.е.

$$K_{xy} = M[(X - M(X))(Y - M(Y))],$$

или

$$K_{xy} = M[(X - a_x)(Y - a_y)],$$

где $a_x = M(X)$, $a_y = M(Y)$.

Итак, если имеется двумерная случайная величина $(X,Y)$, для которой известно ***распределение*** или ***совместная плотность*** вероятности $f(x,y)$, то мы можем найти математические ожидания $M(X) = a_x$, $M(Y) = a_y$ и дисперсии $D(X) = \sigma_x^2$ и $D(Y) = \sigma_y^2$ одномерных составляющих $X$ и $Y$.

*Однако математические ожидания и дисперсии случайных величин $X$ и $Y$ недостаточно полно характеризуют двумерную случайную величину $(X,Y)$, так как не выражают степени зависимости ее составляющих $X$ и $Y$.*

Эту роль выполняют ***ковариация*** и ***коэффициент корреляции***.

Для непрерывных случайных величин $K_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x - a_x)(y - a_y) f(x,y)\,dx\,dy.$

---

* Ковариацию называют еще ***вторым смешанным центральным моментом*** случайных величин $X$ и $Y$ и обозначают $cov(X,Y)$.

# СВОЙСТВА КОВАРИАЦИИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

**1.** Ковариация двух независимых случайных величин равна нулю.

**2.** Ковариация двух случайных величин равна математическому ожиданию их произведения минус произведение математических ожиданий, т. е.

$$K_{xy} = M(XY) - M(X)\cdot M(Y) \quad \text{или} \quad K_{xy} = M(XY) - a_x \cdot a_y.$$

**3.** Ковариация двух случайных величин по абсолютной величине не превосходит произведения их средних квадратических отклонений, т.е.

$$\left|K_{xy}\right| \le \sigma_x \sigma_y .$$

*Взяв очевидное неравенство и преобразовав его, получаем:*

$$M\left(\frac{X - M(X)}{\sigma_x} \pm \frac{Y - M(Y)}{\sigma_y}\right)^2 \ge 0$$

$$\frac{D(X)}{\sigma_x^2} \pm \frac{2K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} + \frac{D(Y)}{\sigma_y^2} = 2 \pm \frac{2K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \ge 0,$$ *откуда следует доказываемое.*

**Определение.**

***Коэффициентом корреляции*** двух случайных величин называется отношение их ковариации к произведению средних квадратических отклонений этих величин:

$$\rho_{xy} = corr(X,Y) = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}.$$

Из определения следует, что $\rho_{xy} = \rho_{yx} = \rho$. Очевидно также, что коэффициент корреляции есть безразмерная величина.

## СВОЙСТВА КОЭФФИЦИЕНТА КОРРЕЛЯЦИИ

**1.** Коэффициент корреляции принимает значения на отрезке [-1;1].

**2.** Если случайные величины независимы, то их коэффициент корреляции равен нулю, т.е. $\rho = 0$.

*Из независимости случайных величин следует их некоррелированность ($\rho = 0$). Обратное утверждение, вообще говоря, неверно.*

**3.** Если коэффициент корреляции двух случайных величин равен (по абсолютной величине) единице, то между этими случайными величинами существует линейная функциональная зависимость.

## НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ И ДИСПЕРСИИ

**1.** Математическое ожидание произведения двух случайных величин равно сумме произведения их математических ожиданий и ковариации этих случайных величин:

$$M(\boldsymbol{XY}) = M(\boldsymbol{X})\cdot M(\boldsymbol{Y}) + \boldsymbol{K}_{\boldsymbol{xy}},$$

Если $\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{xy}} = 0$, то

$$M(\boldsymbol{XY}) = M(\boldsymbol{X})\cdot M(\boldsymbol{Y}),$$

т.е. математическое ожидание произведения двух некоррелированных случайных величин равно произведению их математических ожиданий*.

***2.*** Дисперсия суммы двух случайных величин равна сумме их дисперсий плюс удвоенная ковариация этих случайных величин:

$$D(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}) = D(\boldsymbol{X})+D(\boldsymbol{Y})+2\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{xy}}.$$

Для некоррелированных (и, разумеется, для независимых) случайных величин

$$D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} D(X_i).$$

Наряду с вышеуказанными рассматриваются такие числовые характеристики условных распределений, как: ***условные математические ожидания*** $M_x(\boldsymbol{Y})$ и $M_y(\boldsymbol{X})$ и ***условные дисперсии*** $D_x(\boldsymbol{Y})$ и $D_y(\boldsymbol{X})$.

Эти характеристики находятся по обычным формулам *математического ожидания* и *дисперсии*, в которых вместо вероятностей событий $\boldsymbol{p_i}$ и $\boldsymbol{p_j}$ или плотностей вероятности $\boldsymbol{f_1}(x)$ и $\boldsymbol{f_2}(y)$ используются условные вероятности $\boldsymbol{p_j}(x_i)$ и $\boldsymbol{p_i}(y_j)$ или условные плотности вероятности $\boldsymbol{f_y}(x)$ и $\boldsymbol{f_x}(y)$.

Например, для непрерывной случайной величины $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$

$$M_x(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot f_x(y)dy,$$

$$D_x(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} [y - M_x(Y)]^2 f_x(y)dy.$$

Условное математическое ожидание случайной величины $\boldsymbol{Y}$ при $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}$, т.е. $M_x(\boldsymbol{Y})$, есть функция от $\boldsymbol{x}$, называемая ***функцией регрессии*** или просто ***регрессией*** $\boldsymbol{Y}$ по $\boldsymbol{X}$; аналогично $M_y(\boldsymbol{X})$ называется ***функцией регрессии*** или просто ***регрессией*** $\boldsymbol{X}$ по $\boldsymbol{Y}$.

Графики этих функций называются соответственно ***линиями регрессии*** (или ***кривыми регрессии***) $\boldsymbol{Y}$ по $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{X}$ по $\boldsymbol{Y}$.

# *Благодарю за внимание, лекция окончена!*