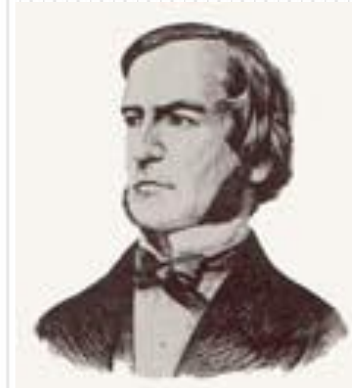
Основы алгебры логики

Шабалдина Н. В.

Отцом алгебры логики по праву считается английский математик XIX столетия **Джордж Буль (1815 – 1864)**. В его честь **алгебра логики** названа **булевой алгеброй высказываний**



Алгебра логики изучает строение (форму структуру) сложных логических высказываний и способы установления их истинности с помощью алгебраических методов.

Логическое высказывание – это повествовательное предложение, про которое однозначно можно сказать: истинно оно или ложно

Будут ли высказыванием следующие предложения?

Пятью пять – двадцать пять.

Пекин – столица Японии.

~~Информатика – любимый предмет.~~

~~X+3=5~~

~~Победа!~~

~~Который час?~~

~~Ты сегодня пойдёшь в школу?~~

Составное высказывание – логическая функция, которая содержит несколько простых мыслей, соединенных между собой с помощью логических операций. Символическое обозначение – F(A,B,…).

Логические операции – логическое действие

Если составное высказывание (логическую функцию) выразить в виде формулы, в которую войдут логические переменные и знаки логических операций, то получится **логическое выражение,** значение которого можно вычислить.

Значением логического выражения могут быть только **ИСТИНА** (1) или **ЛОЖЬ (0)**.

Простые высказывания

А={Луна – планета};
В={2*2=4};

Любое высказывание либо истинно (1), либо ложно (0)

Составные высказывания

A={Луна – планета};
B={2*2=4};

A или B - Луна – планета или 2*2=4;
A и B - Луна – планета и 2*2=4;
не A и не B - Луна не планета и 2*2не равно 4;

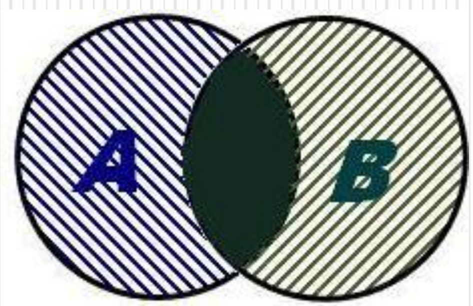
Таблицы истинности – таблицы, в которых по действиям показано, какие значения принимает логическое выражение при всех возможных наборах его переменных

Причем, количество строк в таблице истинности вычисляется как 2^n, где

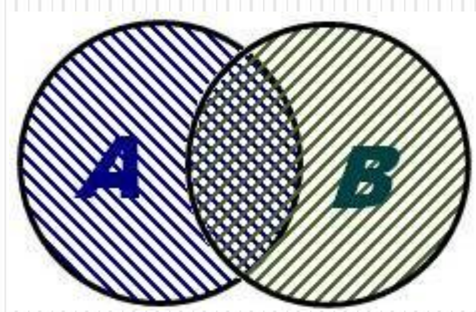
n – количество переменных, а

количество столбцов = количество переменных + количество логических операций.

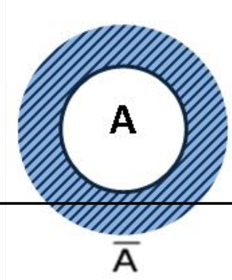
Конъюнкция (логическое умножение) – это логическая операция, ставящая в соответствие каждым двум простым высказываниям составное высказывание, являющееся истинным тогда и только тогда, когда оба исходных высказывания истинны.

<table>
<tr><th colspan="3">Таблица истинности</th><th>Диаграмма Эйлера – Венна</th></tr>
<tr><td>A</td><td>B</td><td>A&B</td><td rowspan="5">
</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
</table>

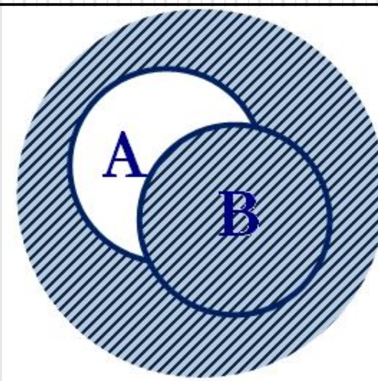
Дизъюнкция (логическое сложение) – это логическая операция, ставящая в соответствие каждым двум простым высказываниям составное высказывание, являющееся ложным тогда и только тогда, когда оба исходных высказывания ложны, и истинным, когда хотя бы одно из двух образующих его высказываний истинно

<table>
<tr><th colspan="3">Таблица истинности</th><th>Диаграмма Эйлера – Венна</th></tr>
<tr><td>A</td><td>B</td><td>A $\vee$ B</td><td rowspan="5">
</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
</table>

Инверсия (отрицание) – это логическая операция, которая каждому простому высказыванию ставит в соответствие составное высказывание, заключающееся в том, что исходное высказывание отрицается.

<table>
<tr><th colspan="2">Таблица истинности</th><th>Диаграмма Эйлера – Венна</th></tr>
<tr><td>A</td><td>$\overline{A}$</td><td rowspan="3">
</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td></tr>
</table>

Импликация (логическое следование) – это логическая операция, ставящая в соответствие каждым двум простым высказываниям составное высказывание, являющееся ложным тогда и только тогда, когда условие (первое высказывание) истинно, а следствие (второе высказывание) ложно.

<table>
<tr><th colspan="3">Таблица истинности</th><th>Диаграмма Эйлера – Венна</th></tr>
<tr><td>A</td><td>B</td><td>$A \Rightarrow B$</td><td rowspan="5">
</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
</table>

При составлении логического выражения необходимо учитывать порядок выполнения логических операций:

- Действия в скобках;
- Инверсия;
- Конъюнкция;
- Дизъюнкция (строгая и нестрогая);
- Импликация;
- Эквивалентность.

В алгебре логики логические связки и соответствующие им логические операции имеют специальные названия и обозначаются следующим образом:

логическая связка	название логической операции	обозначения
не	Отрицание, инверсия	$\bar{\ }$, ┐, ¬, not
и, а, но, хотя, однако	Конъюнкция, логическое умножение	&, ●, $\wedge$, and
или	Дизъюнкция, нестрогая дизъюнкция, логическое сложение	$\vee$, +, or
либо	Разделительная (строгая) дизъюнкция, исключающее ИЛИ, сложение по модулю 2	$\oplus$, Δ, xor, M2
если…, то; А влечет В; В, если только А; только тогда А, если В; достаточным условием В является А; необходимым условием В является А.	Импликация, следование	$\rightarrow$, $\Rightarrow$
Тогда и только тогда, когда…	Эквивалентность, эквиваленция, равносильность, равнозначность	$\leftrightarrow$, $\Leftrightarrow$, ~, $\equiv$

Запись **импликации** с помощью инверсии, конъюнкции и дизъюнкции

Операцию «импликация» можно выразить через «ИЛИ» и «НЕ»:

$$\mathbf{A \rightarrow B = \neg A \vee B}$$

или в других обозначениях

$$A \rightarrow B = \overline{A} + B$$

Иногда при решении задач полезны формулы де Моргана:

¬ (A ∧ B) = ¬ A ∨ ¬ B
¬ (A ∨ B) = ¬ A ∧ ¬ B

$$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$$
$$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$$

Огастес (Август) де Морган – шотландский математик и логик.

назад