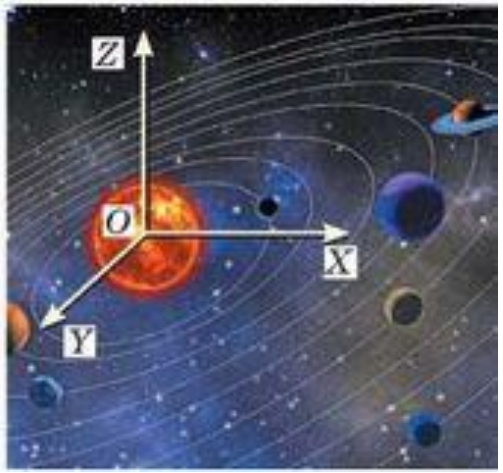
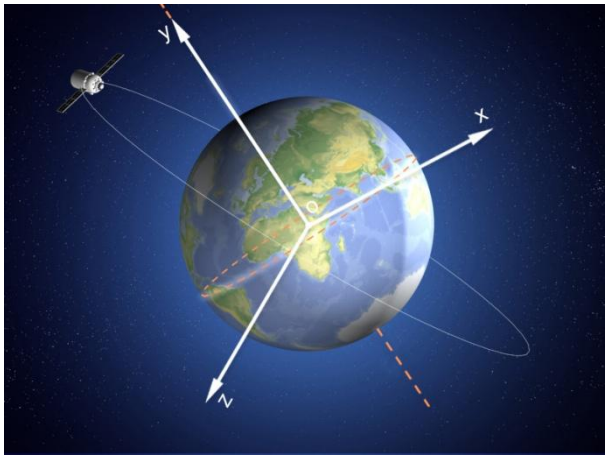
ДВИЖЕНИЕ В НЕИНЕРЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ ОТСЧЕТА.

ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ. ДИНАМИКА

ВВЕДЕНИЕ

Инерциальной называется такая система отсчета, в которой справедлив принцип инерции (первый закон Ньютона)





Является ли геоцентрическая система отсчета инерциальной?

Существуют ли аналоги законов Ньютона для инерциальных систем отсчета?

Цель лекции

изучение динамики относительного движения точки, то есть ее движения относительно неинерциальной системы отсчёта

План лекции

Кинематика сложного движения точки

Уравнение движения в неинерциальной системе отсчёта. Силы инерции

Невесомость и перегрузка

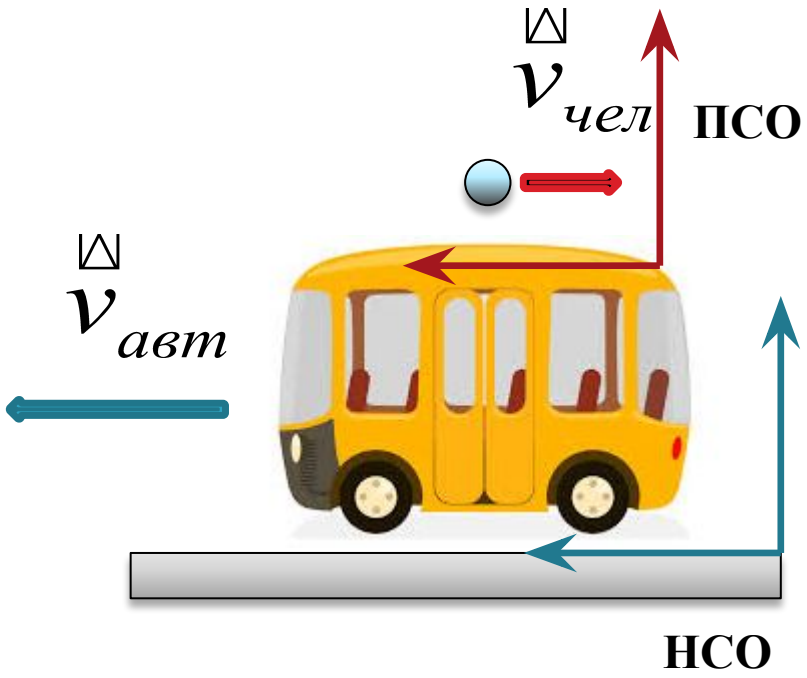
Влияние вращения Земли на равновесие и движение тел

СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

движение, которое допускает разделение на два простых с помощью дополнительной подвижной системы отсчета

АБСОЛЮТНОЕ, ОТНОСИТЕЛЬНОЕ И ПЕРЕНОСНОЕ ДВИЖЕНИЕ

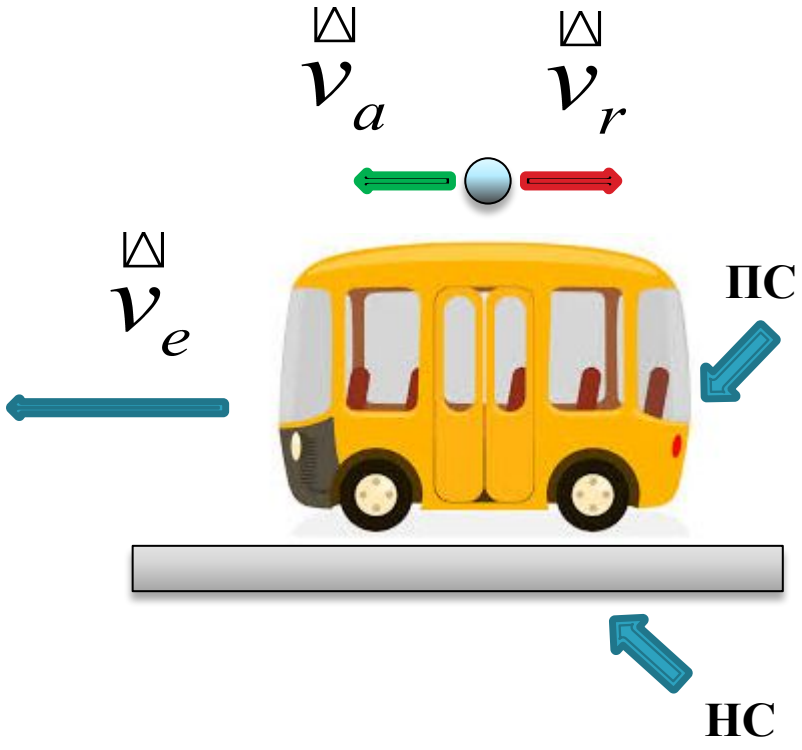


Движение материальной точки относительно подвижной системы – относительное (*r*)

… относительно неподвижной системы – абсолютное (*a*)

Движение подвижной системы относительно неподвижной – переносное движение (*e*)

АБСОЛЮТНАЯ, ОТНОСИТЕЛЬНАЯ И ПЕРЕНОСНАЯ СКОРОСТЬ



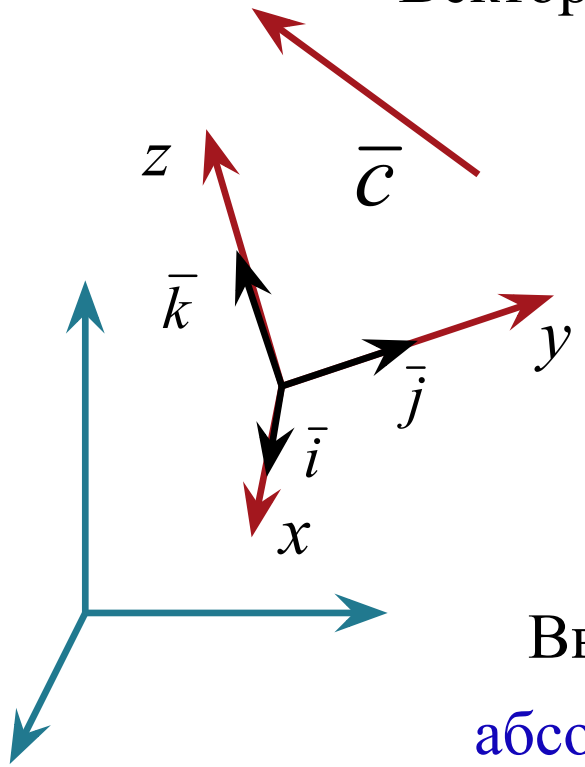
Скорость материальной точки относительно подвижной системы – относительная ($\vec{v}_r$)

… относительно неподвижной системы – абсолютная ($\vec{v}_a$)

Скорость материальной точки, мысленно закрепленной в данный момент времени на подвижной системе координат – переносная ($\vec{v}_e$)

$$\bar{v}^a = \bar{v}^r + \bar{v}^e$$

АБСОЛЮТНАЯ И ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ПРОИЗВОДНЫЕ



Вектор определен в подвижной системе отсчета

$$\bar{c} = c_x\bar{i} + c_y\bar{j} + c_z\bar{k} \qquad (1a)$$

В ПСО зависят от времени только проекции c_x, c_y, c_z

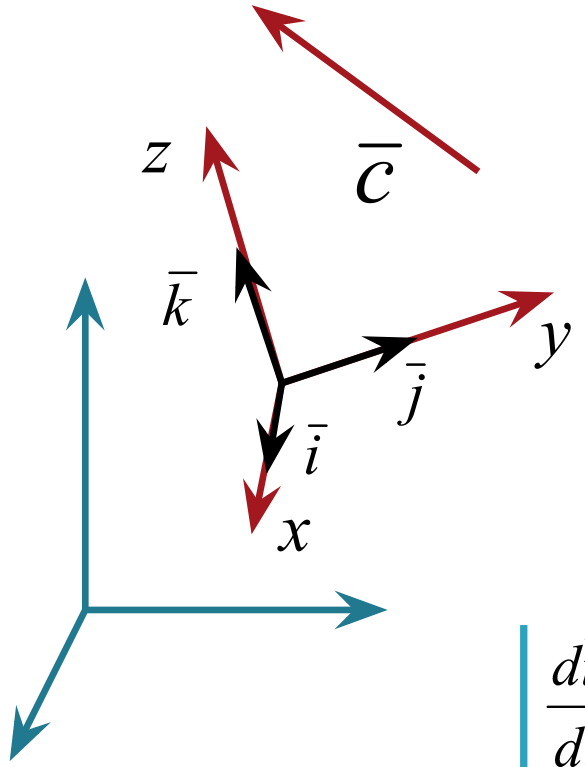
В НСО от времени зависят и орты i, j, k

Введем обозначения

абсолютная производная $\frac{d\bar{c}}{dt}$ – производная в НСО

относительная производная $\left(\frac{d\bar{c}}{dt}\right)_r$ – производная в ПСО

АБСОЛЮТНАЯ И ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ПРОИЗВОДНЫЕ

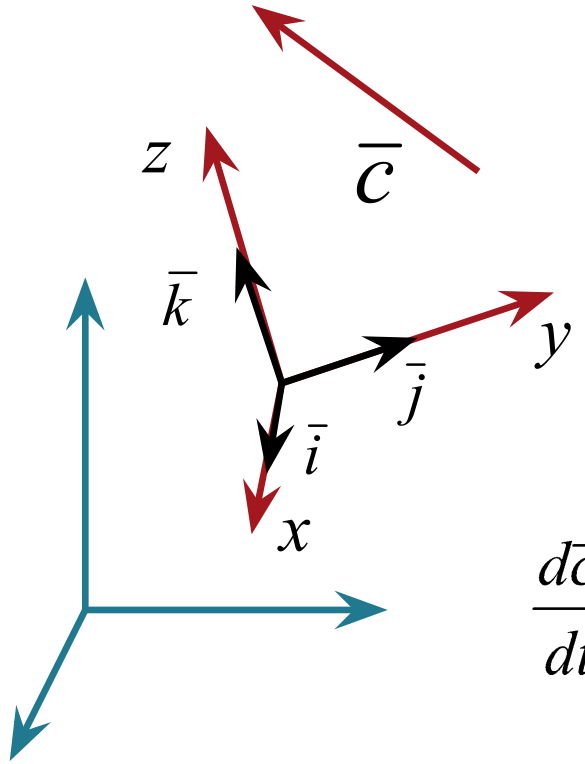


$$\frac{d\bar{c}}{dt} = \frac{dc_x}{dt}\bar{i} + \frac{dc_y}{dt}\bar{j} + \frac{dc_z}{dt}\bar{k} + c_x\frac{d\bar{i}}{dt} + c_y\frac{d\bar{j}}{dt} + c_z\frac{d\bar{k}}{dt} \qquad (1b)$$

$$\frac{d\bar{c}}{dt} = \left(\frac{d\bar{c}}{dt}\right)_r + c_x\frac{d\bar{i}}{dt} + c_y\frac{d\bar{j}}{dt} + c_z\frac{d\bar{k}}{dt} \qquad (2)$$

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{\omega}\times\bar{r} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d\bar{i}}{dt} = \bar{\omega}\times\bar{i} \\ \frac{d\bar{j}}{dt} = \bar{\omega}\times\bar{j} \\ \frac{d\bar{k}}{dt} = \bar{\omega}\times\bar{k} \end{cases}$$

АБСОЛЮТНАЯ И ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ПРОИЗВОДНЫЕ



$$\frac{d\bar{c}}{dt} = \left(\frac{d\bar{c}}{dt}\right)_r + c_x\frac{d\bar{i}}{dt} + c_y\frac{d\bar{j}}{dt} + c_z\frac{d\bar{k}}{dt} \qquad (2)$$

$$\frac{d\bar{c}}{dt} = \left(\frac{d\bar{c}}{dt}\right)_r + c_x\bar{\omega}\times\bar{i} + c_y\bar{\omega}\times\bar{j} + c_z\bar{\omega}\times\bar{k}$$

$$\frac{d\bar{c}}{dt} = \left(\frac{d\bar{c}}{dt}\right)_r + \bar{\omega}\times\left(c_x\bar{i} + c_y\bar{j} + c_z\bar{k}\right)$$

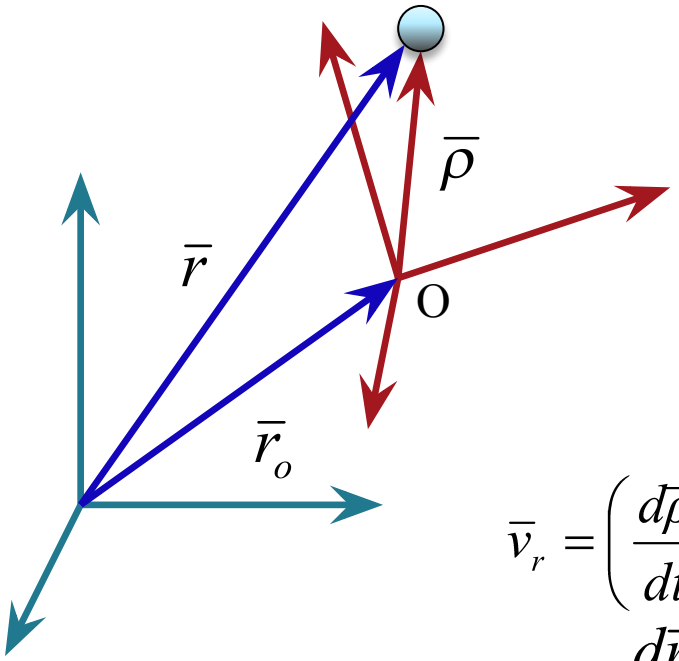
формула Бура

$$\frac{d\bar{c}}{dt} = \left(\frac{d\bar{c}}{dt}\right)_r + \bar{\omega}\times\bar{c} \qquad (3)$$

ТЕОРЕМА О СЛОЖЕНИИ СКОРОСТЕЙ

Абсолютная скорость материальной точки при сложном движении равна векторной сумме относительной и переносной скоростей

$$\bar{v}^a = \bar{v}^r + \bar{v}^e$$



В произвольный момент времени

$$\bar{r}(t) = \bar{r}_O(t) + \bar{\rho}(t)$$

$$\bar{v}_a = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{r}_O}{dt} + \frac{d\bar{\rho}}{dt}$$

Вектор $\bar{\rho}$ определен в ПСО

$$\bar{v}_a = \frac{d\bar{r}_O}{dt} + \left(\frac{d\bar{\rho}}{dt}\right)_r + \bar{\omega}_e \times \bar{\rho} \qquad (4)$$

$$\bar{v}_r = \left(\frac{d\bar{\rho}}{dt}\right)_r$$

Что такое переносная скорость?

$$\bar{v}_e = \frac{d\bar{r}_O}{dt} + \bar{\omega}_e \times \bar{\rho}$$

$$\bar{v}^a = \bar{v}^r + \bar{v}^e$$

ТЕОРЕМА О СЛОЖЕНИИ УСКОРЕНИЙ

Определим абсолютное ускорение точки

$$\bar{v}_a = \frac{d\bar{r}_O}{dt} + \left(\frac{d\bar{\rho}}{dt}\right)_r + \bar{\omega}_e \times \bar{\rho} \qquad (4)$$

$$\bar{a}_a = \frac{d\bar{v}_a}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\bar{v}_O + \bar{\omega}_e \times \bar{\rho} + \bar{v}_r\right) = \frac{d\bar{v}_O}{dt} + \frac{d\bar{\omega}_e}{dt} \times \bar{\rho} + \bar{\omega}_e \times \frac{d\bar{\rho}}{dt} + \frac{d\bar{v}_r}{dt}$$

Векторы $\bar{\rho}, \bar{v}_r$ определены в ПСО

$$\bar{a}_a = \frac{d\bar{v}_O}{dt} + \bar{\varepsilon}_e \times \bar{\rho} + \bar{\omega}_e \times \left(\left(\frac{d\bar{\rho}}{dt}\right)_r + \bar{\omega}_e \times \bar{\rho}\right) + \left(\frac{d\bar{v}_r}{dt}\right)_r + \bar{\omega}_e \times \bar{v}_r$$

$$\bar{a}_a = \bar{a}_O + \bar{\varepsilon}_e \times \bar{\rho} + \bar{\omega}_e \times \left(\bar{v}_r + \bar{\omega}_e \times \bar{\rho}\right) + \bar{a}_r + \bar{\omega}_e \times \bar{v}_r$$

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_O + \bar{\varepsilon}_e \times \bar{\rho} + \bar{\omega}_e \times \bar{\omega}_e \times \bar{\rho} + 2\bar{\omega}_e \times \bar{v}_r \qquad (5)$$

Определим переносное ускорение точки $\bar{a}_e = \bar{a}_O + \bar{\varepsilon}_e \times \bar{\rho} + \bar{\omega}_e \times \bar{\omega}_e \times \bar{\rho}$

Подставляя в (5), получаем $\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_e + \bar{a}_c$

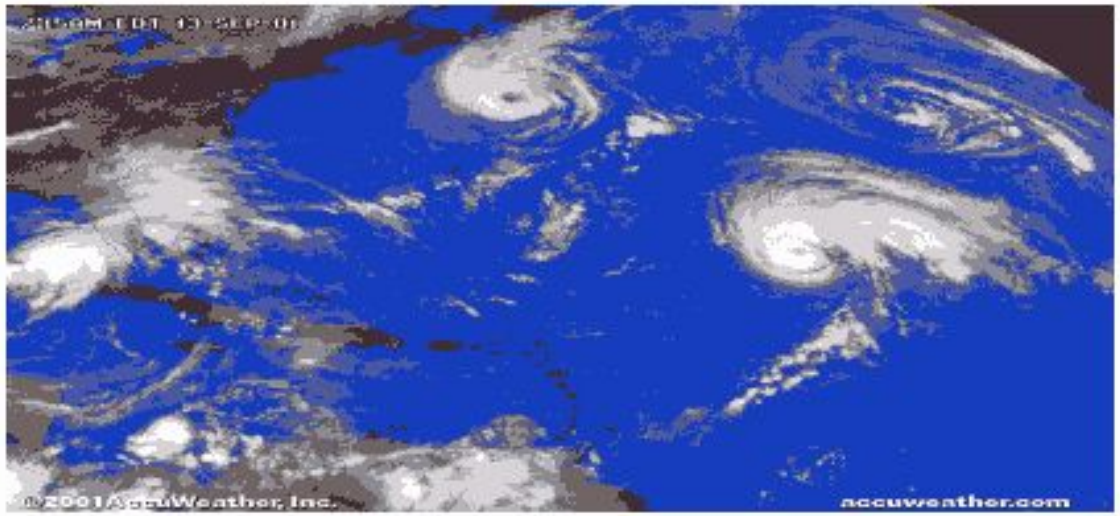
$$\bar{a}_c = 2\bar{\omega}_e \times \bar{v}_r$$

ТЕОРЕМА КОРИОЛИСА

Абсолютное ускорение материальной точки при сложном движении равно векторной сумме относительного, переносного и кориолисова ускорений

Гюстав Гаспар **Кориолис**
1792-1843

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_e + \bar{a}_c \qquad \bar{a}_c = 2\bar{\omega}_e \times \bar{v}_r$$



ДИНАМИКА ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ В НЕИНЕРЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ ОТСЧЕТА

Произведение массы материальной точки на ее ускорение равно векторной сумме действующих на точку сил

$$m\bar{a} = \sum \bar{F}$$

только в инерциальных СО

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_e + \bar{a}_c$$

$$m\bar{a}_r = \sum \bar{F}_i - m\bar{a}_e - m\bar{a}_c$$

Силы инерции

$$\bar{\Phi}_e = -m\bar{a}_e, \bar{\Phi}_c = -m\bar{a}_c.$$

Все законы динамики точки сохраняют свою форму при движении в неинерциальной системе отсчета, если к действующим на точку силам добавлены **переносная и кориолисова силы инерции**.

ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ОТНОСИТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

1. Вращение ПСО

$$\bar{a}_e = \bar{a}_e^n + \bar{a}_e^\tau \qquad \bar{a}_{\text{вр}}^e = \bar{\varepsilon}_e \times \bar{r}, \quad \bar{a}_e^n = \bar{\omega}_e \times (\bar{\omega}_e \times \bar{r})$$

$$\bar{\Phi}_e = \bar{\Phi}_e^n + \bar{\Phi}_e^\tau \qquad \bar{\Phi}_e^n = -m\bar{a}_e^n, \; \bar{\Phi}_e^\tau = -m\bar{a}_e^\tau$$

$$\bar{a}_c = 2\bar{\omega}_e \times \bar{v}_r \qquad \bar{\Phi}_c = -m\bar{a}_c$$

Если вращение равномерное, то $\varepsilon_e = 0$:

$$\bar{\Phi}_e^\tau = 0 \qquad \bar{\Phi}_e = \bar{\Phi}_e^n$$

ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ОТНОСИТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

2. Поступательное криволинейное движение ПСО

$$\bar{a}^e = \bar{a}^e_\tau + \bar{a}^e_n. \qquad a^e_\tau = \ddot{S}, \quad \bar{a}^e_n = \frac{\dot{S}^2}{\rho}. \qquad \bar{a}^c = 0. \quad \bar{\Phi}_c = 0.$$

Если движение прямолинейное, то $\rho = \infty$:

$$\bar{a}^e_n = 0. \qquad \bar{\Phi}_e = \bar{\Phi}^\tau_e.$$

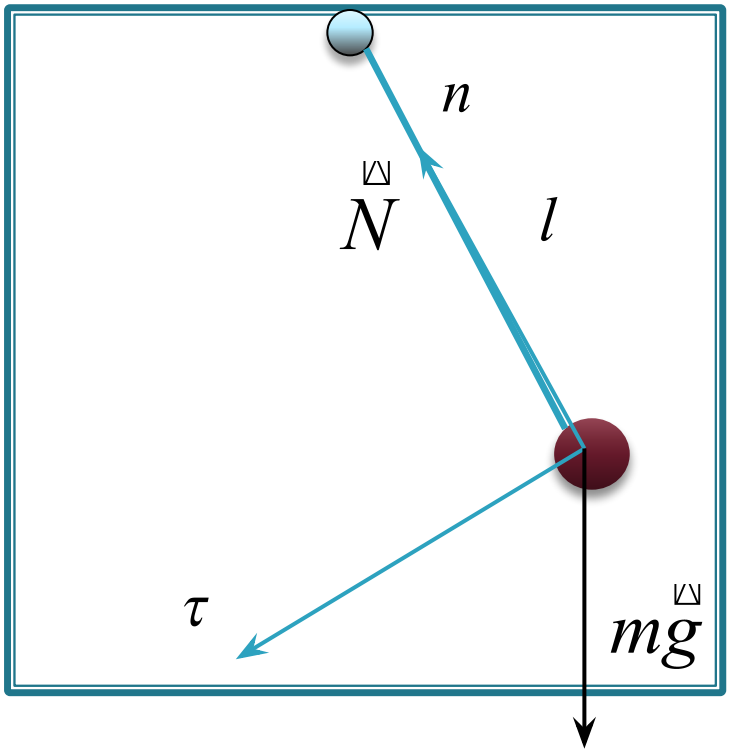
Если **движение ПСО прямолинейное и равномерное, то она является инерциальной**:

$$\bar{a}^e = 0. \qquad \bar{\Phi}_e = 0. \quad \Rightarrow \quad m\bar{a}^r = \sum \bar{F}_i.$$

никакими механическими явлениями нельзя обнаружить прямолинейного равномерного движения **(принцип относительности классической механики)**

ДИНАМИКА ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ В НЕИНЕРЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ ОТСЧЕТА

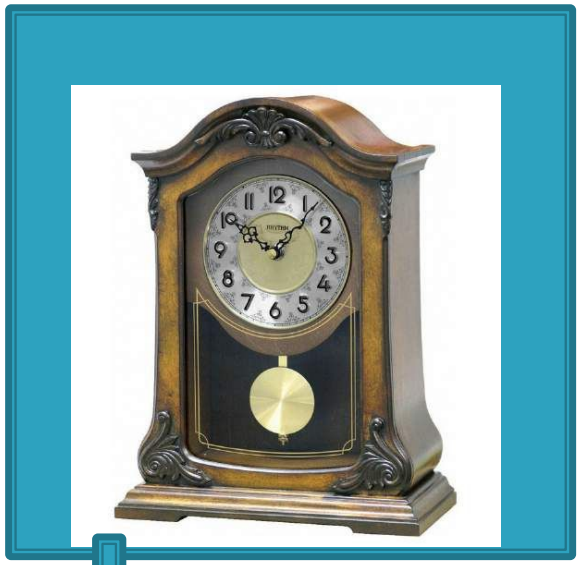
$$m\bar{a}_r = \sum \bar{F}_i - m\bar{a}_e - m\bar{a}_c \qquad \bar{\Phi}_e = -m\bar{a}_e,\ \bar{\Phi}_c = -m\bar{a}_c.$$



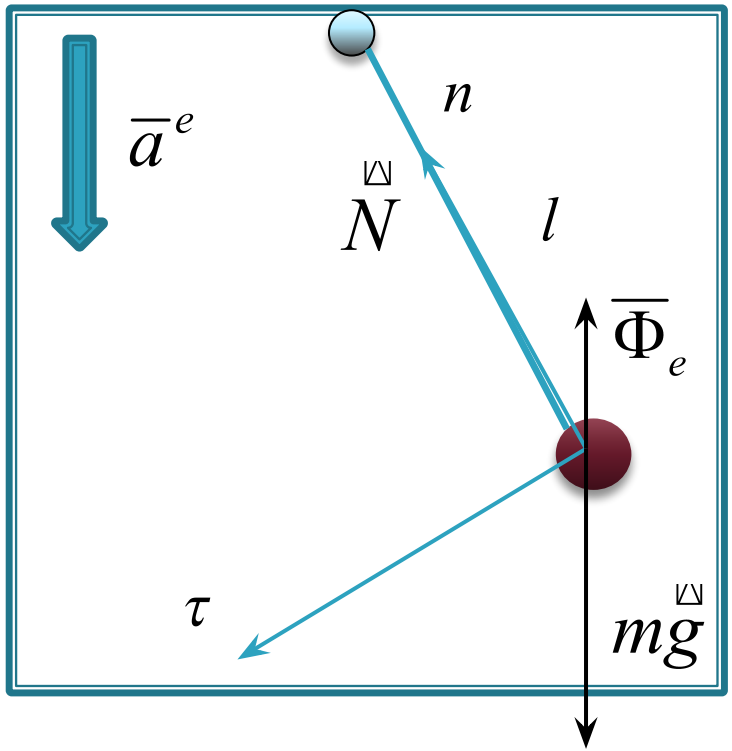
$\bar{a}_e$ $\quad ma^{\tau} = mg\sin\alpha \quad -l\ddot{\alpha} = g\sin\alpha$

$$\sin\alpha \approx \alpha \qquad \ddot{\alpha} + \frac{g}{l}\alpha = 0$$

ДИНАМИКА ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ В НЕИНЕРЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ ОТСЧЕТА



$\bar{a}_e$



$$ma_r^\tau = (mg - \Phi_e)\sin\alpha$$

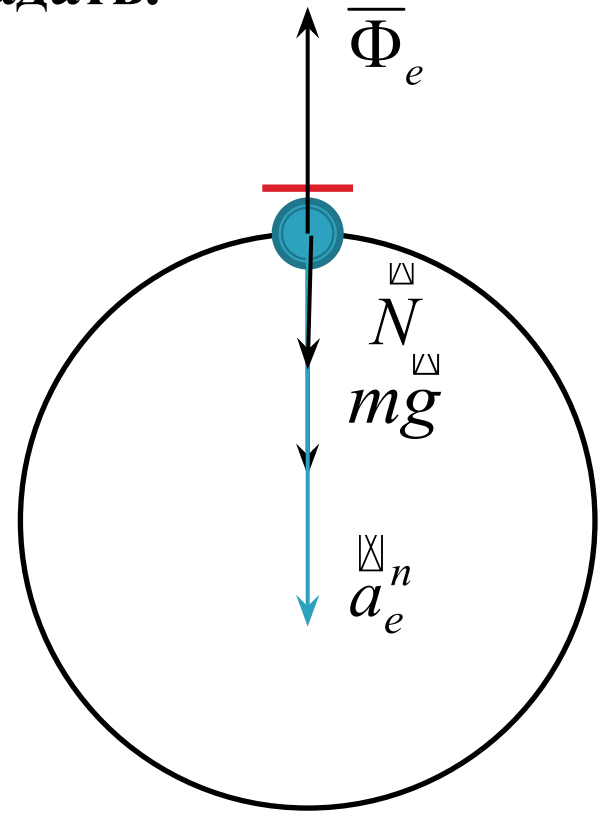
$$-l\ddot{\alpha} = (g - a_e)\sin\alpha$$

$$\ddot{\alpha} + \frac{(g - a_e)}{l}\alpha = 0$$

$g = a_e$ - невесомость

ЦЕНТРОБЕЖНАЯ СИЛА

Определить угловую скорость вращения карусели, при которой человек не будет падать.



$$\overline{\Phi}_e = -m\overline{a}_e,\ \overline{\Phi}_c = 0.$$

$$\Phi_e = ma_e^n \qquad \Phi_e = m\omega^2 R$$

$$m\overline{a}_r = m\overline{g} + \overline{\Phi}_e + \overline{N} \qquad \overline{a}_r = 0$$

$$0 = -mg + m\omega^2 R - N$$

$$\omega^2 = g / R$$

ЦЕНТРОБЕЖНАЯ СИЛА

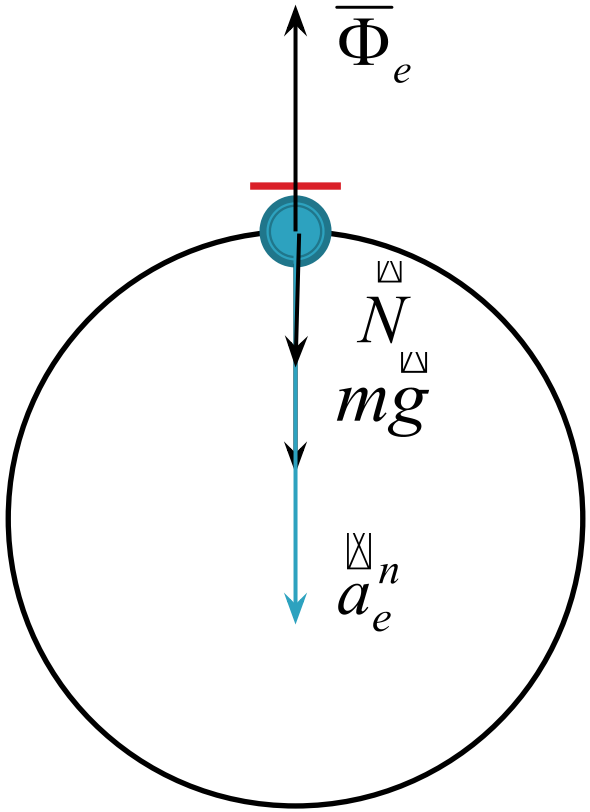
Определить угол наклона веревок при заданной угловой скорости, радиусе верхнего колеса и длине веревок.

ЦЕНТРОБЕЖНАЯ СИЛА. ПАРАДОКС ЧАИНОК

Почему при размешивании сахара чаинки собираются на дне чашки в центре?

ПЕРВАЯ КОСМИЧЕСКАЯ СКОРОСТЬ

минимальная скорость, которую необходимо придать объекту, чтобы вывести его на геоцентрическую орбиту



$$\omega^2 = g / R$$

$$v^2 = gR_з$$

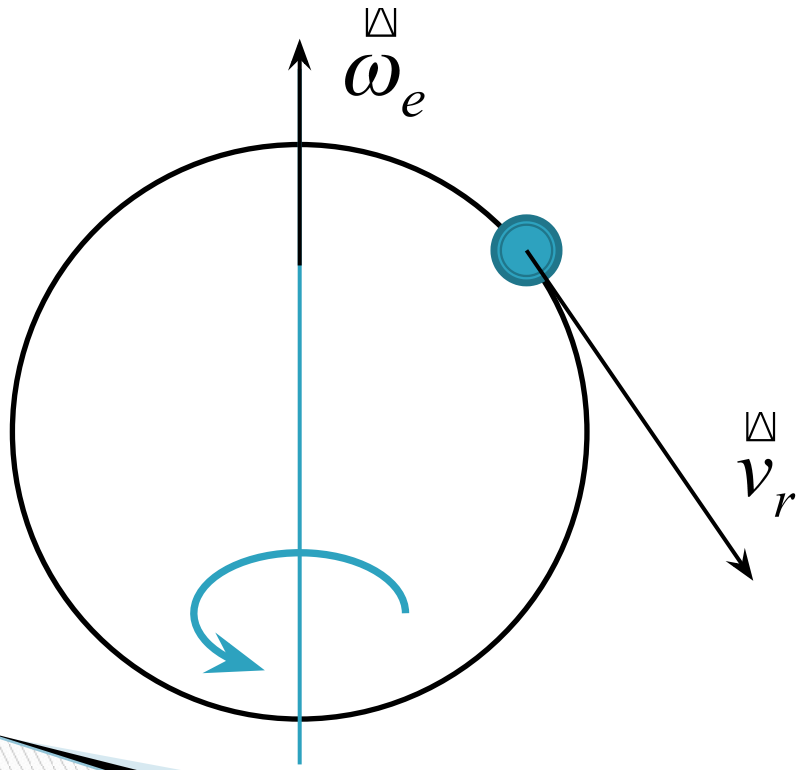
ВЛИЯНИЕ ВРАЩЕНИЯ ЗЕМЛИ НА ДВИЖЕНИЕ ТЕЛ

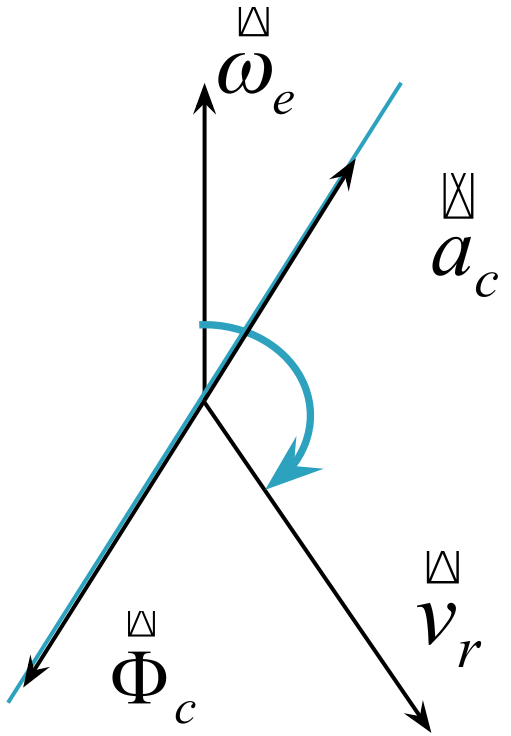
$$\overline{\Phi}_c = -m\overline{a}^c$$

$$\overline{a}^c = 2\overline{\omega}^e \times \overline{v}^r$$

... по Волге плавая, прохожу пороги я.
И гляжу на правые берега пологие.

В.С. Высоцкий

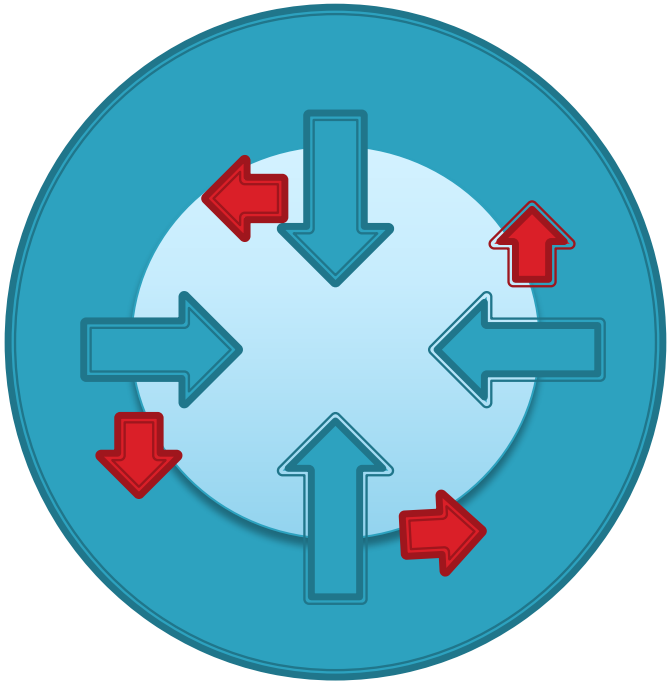




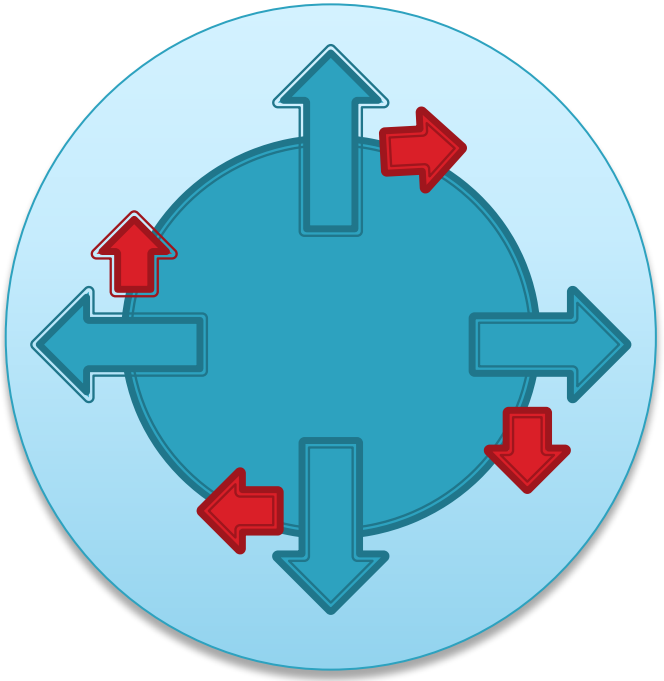
$$a_c = 2\omega_з v_r \sin\varphi$$

ВЛИЯНИЕ ВРАЩЕНИЯ ЗЕМЛИ НА ДВИЖЕНИЕ ТЕЛ

В Северном полушарии сила Кориолиса направлена вправо по ходу движения тел



Циклон



Антициклон

ЭФФЕКТЫ ОТНОСИТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ НА ЗЕМЛЕ

Можно ли определить, циклон или антициклон зафиксирован на фотографии из космоса?

Можно ли определить, в каком полушарии это происходит?

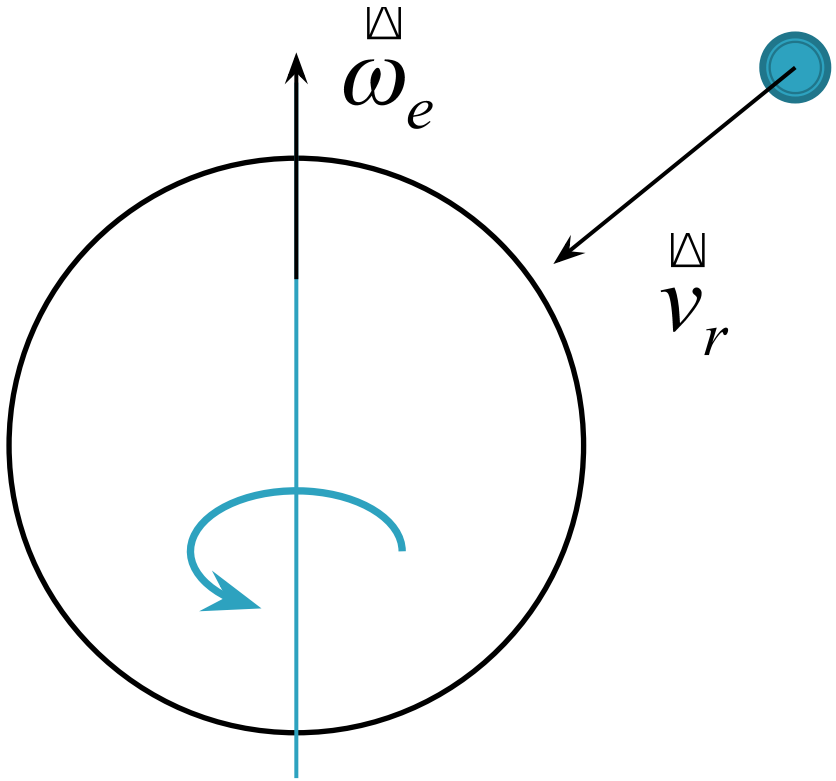
ЭФФЕКТЫ ОТНОСИТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ НА ЗЕМЛЕ. ЗАКОН БЭРА

В северном полушарии река всегда стремится подмыть правый берег.

Карл Бэр
(1792-1876)

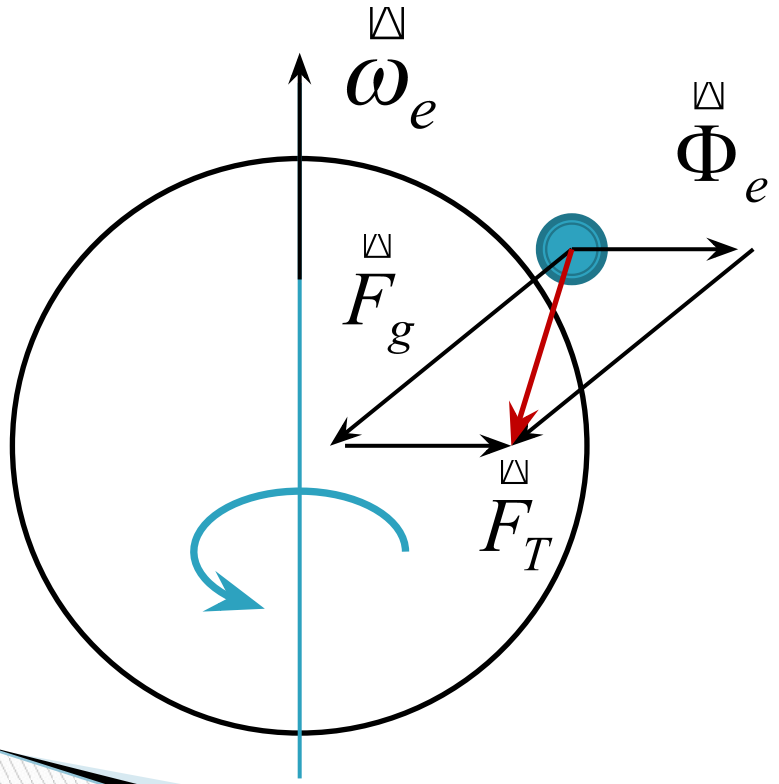
ЭФФЕКТЫ ОТНОСИТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ НА ЗЕМЛЕ

Куда будет смещаться тело, падающее на Землю?



ВЛИЯНИЕ ВРАЩЕНИЯ ЗЕМЛИ НА ПОКОЯЩЕЕСЯ ТЕЛО

Сила тяжести – сила, действующая на тело, находящееся на поверхности Земли.



В каких широтах угол между силами тяготения и тяжести максимален ?

Где на Земле легче всего прыгать вверх ?

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Дайте определения относительного, абсолютного, переносного движений (и скоростей).
2. В чём заключается теорема Кориолиса? Как определить кориолисово ускорние, в каких случаях оно равно нулю?
3. Какой модуль и какое направление имеют переносная и кориолисова силы инерции?
4. В чём заключается различие между дифференциальными уравнениями относительного и абсолютного движений материальной точки?
5. Как определяются переносная и кориолисова силы инерции в различных случаях переносного движения?
6. В чём состоит сущность принципа относительности классической механики?
7. Какие системы отсчёта называются инерциальными?
8. Каково условие относительного покоя материальной точки?

На следующей лекции –
ДИНАМИКА МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ