

# **ОПТИМИЗАЦИЯ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ПОЛУМАРКОВСКИХ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ В ТОРГОВОЙ ОРГАНИЗАЦИИ**

**Работу выполнил:**

**СКОРОДУМОВ Александр Александрович**

**Научный руководитель: к.ф.-м.н., доцент КОЗЛОВ  
Владимир Анатольевич**

## АКТУАЛЬНОСТЬ

- Исследование проблемы управления в экономической системе требует выделения и разделения внешних и внутренних факторов
- Входной поток требований является внешним фактором, требуется исследовать модель управления этим фактором
- В условиях торговой организации моделирование входного потока требований обычно используют математические модели массового обслуживания для анализа, оптимизации функционирования и самоорганизации



# ЦЕЛЬ

- использование математических моделей массового обслуживания для анализа, оптимизации систем в торговой организации



# Задачи

- построить математическую модель, позволяющую провести анализ и определить оптимальную стратегию управления
- исследовать эту управляемую систему массового обслуживания, определить оптимальную стратегию управления и оптимальное значение показателя эффективности
- исследовать удельный доход для системы массового обслуживания и определить оптимальную стратегию управления



## В ПЕРВОЙ ГЛАВЕ

- рассмотрены теоретические подходы к торговой организации как объекту экономико-математического моделирования, основные элементы теории массового обслуживания, описаны и определены математические объекты (управляемый полумарковский процесс), введены обозначения, определена модель массового обслуживания и дана постановка математической задачи управления



- ***Системой*** называется целостное множество взаимосвязанных элементов, которые нельзя разделить на независимые подмножества.
- Основой СМО является определенное число обслуживающих устройств – ***каналы обслуживания***.
- Роль каналов в магазине могут выполнять продавцы



- Основными элементами СМО являются:
  - входной поток заявок;
  - очередь;
  - каналы обслуживания;
  - выходной поток заявок (обслуженные заявки)
- *Показатели эффективности СМО* описывают ее возможность справляться с потоком заявок.
- К числу показателей эффективности *СМО с очередью* относятся:
  - среднее время ожидания обслуживания;
  - среднее число заявок в очереди;
  - среднее время пребывания заявки в очереди;
  - вероятность того, что канал занят.



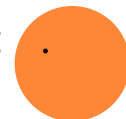
- В работе математическая модель СМО усложнена, т. к. рассмотрен входной поток *неоднородных* требований (требования нескольких типов), интервалы поступления требований имеют *произвольное* распределение





- Вероятность того, что в  $k$ -ой подсистеме за время  $t$  (между марковскими моментами) будет обслужено  $(m-s)$  заявок при условии, что в начальный момент в СМО было  $m$  требований для многоканальной системы с ожиданием задается соотношением

$$p_{ms}^{(k)}(t) = \begin{cases} C_m^s (1 - e^{-\mu_k t})^{(m-s)} e^{-s\mu_k t}, & n_k \geq m \geq s \geq 0, \\ \frac{(\mu_k t)^{m-s}}{(m-s)!} e^{-\mu_k t}, & m \geq s \geq n_k, \\ \int_0^t C_{n_k}^s (1 - e^{-\mu_k(t-x)})^{(n_k-s)} e^{-\mu_k x} dx, & m < n_k \end{cases}$$



- Для построения функционала доходов на траекториях управляемого полумарковского процесса вводим условное математическое ожидание накопленного дохода

$$R_{(i,m)(j,l)}^{(k)}(x,u) = c_1^{(k)} C_1(x, m_k, l_k, u) + \sum_{s=2}^4 C_2(x, n_k, m_k, l_k, u) + c_5^{(k)} C_5(x, m_k, l_k, u)$$

$$C_1(x, m_k, l_k, u) = M(\zeta_k / v^{(k)}(0) = m_k, \xi^{(k)}(x) = l_k, u(0) = u)$$



- Рассмотрим построение оптимальной стратегии управления
- Если дробно-линейный функционал имеет экстремум (максимум или минимум), то этот экстремум достигается в классе вырожденных детерминированных стратегий



- Поэтому алгоритм определения оптимальной стратегии имеет вид:
  - для фиксированной вырожденной стратегии вычисляется матрица переходных вероятностей
  - для этой матрицы решается система алгебраических уравнений и определяется нормированное решение – стационарное распределение вложенной цепи Маркова при выбранной фиксированной вырожденной стратегии
  - вычисляется удельный доход, соответствующий выбранной вырожденной стратегии
  - перебирая все вырожденные стратегии и соответствующие им величины дохода, определяем максимальный доход и оптимальную стратегию



□ Перечислены стратегии управления

Состояние		(1,1,0)	(1,1,1)	(2,0,1)	(2,1,1)
№ стратегии					
гение (тип заявки)	1	$P_{(1,1,0),1} = 1$ $P_{(1,1,0),2} = 0$	$P_{(1,1,1),1} = 1$ $P_{(1,1,1),2} = 0$	$P_{(2,0,1),1} = 1$ $P_{(2,0,1),2} = 0$	$P_{(2,1,1),1} = 1$ $P_{(2,1,1),2} = 0$
	2	$P_{(1,1,0),1} = 1$ $P_{(1,1,0),2} = 0$	$P_{(1,1,1),1} = 1$ $P_{(1,1,1),2} = 0$	$P_{(2,0,1),1} = 1$ $P_{(2,0,1),2} = 0$	$P_{(2,1,1),2} = 1$ $P_{(2,1,1),1} = 0$
	3	$P_{(1,1,0),1} = 1$ $P_{(1,1,0),2} = 0$	$P_{(1,1,1),1} = 1$ $P_{(1,1,1),2} = 0$	$P_{(2,0,1),2} = 1$ $P_{(2,0,1),1} = 0$	$P_{(2,1,1),1} = 1$ $P_{(2,1,1),2} = 0$
	4	$P_{(1,1,0),1} = 1$ $P_{(1,1,0),2} = 0$	$P_{(1,1,1),2} = 1$ $P_{(1,1,1),1} = 0$	$P_{(2,0,1),1} = 1$ $P_{(2,0,1),2} = 0$	$P_{(2,1,1),1} = 1$ $P_{(2,1,1),2} = 0$
	5	$P_{(1,1,0),2} = 1$ $P_{(1,1,0),1} = 0$	$P_{(1,1,1),1} = 1$ $P_{(1,1,1),2} = 0$	$P_{(2,0,1),1} = 1$ $P_{(2,0,1),2} = 0$	$P_{(2,1,1),1} = 1$ $P_{(2,1,1),2} = 0$
	6	$P_{(1,1,0),1} = 1$ $P_{(1,1,0),2} = 0$	$P_{(1,1,1),1} = 1$ $P_{(1,1,1),2} = 0$	$P_{(2,0,1),2} = 1$ $P_{(2,0,1),1} = 0$	$P_{(2,1,1),2} = 1$ $P_{(2,1,1),1} = 0$
	7	$P_{(1,1,0),1} = 1$ $P_{(1,1,0),2} = 0$	$P_{(1,1,1),2} = 1$ $P_{(1,1,1),1} = 0$	$P_{(2,0,1),2} = 1$ $P_{(2,0,1),1} = 0$	$P_{(2,1,1),1} = 1$ $P_{(2,1,1),2} = 0$
	8	$P_{(1,1,0),2} = 1$ $P_{(1,1,0),1} = 0$	$P_{(1,1,1),2} = 1$ $P_{(1,1,1),1} = 0$	$P_{(2,0,1),1} = 1$ $P_{(2,0,1),2} = 0$	$P_{(2,1,1),1} = 1$ $P_{(2,1,1),2} = 0$



- Для вычисления стационарных распределений вложенной цепи Маркова решены шестнадцать систем линейных уравнений

$$\begin{cases} \pi_{(1,1,0)} = \pi_{(1,1,0)}P_{(1,1,0)(1,1,0)} + \pi_{(1,1,1)}P_{(1,1,1)(1,1,0)} + \pi_{(2,0,1)}P_{(2,0,1)(1,1,0)} + \pi_{(2,1,1)}P_{(2,1,1)(1,1,0)} \\ \pi_{(1,1,1)} = \pi_{(1,1,0)}P_{(1,1,0)(1,1,1)} + \pi_{(1,1,1)}P_{(1,1,1)(1,1,1)} + \pi_{(2,0,1)}P_{(2,0,1)(1,1,1)} + \pi_{(2,1,1)}P_{(2,1,1)(1,1,1)} \\ \pi_{(2,0,1)} = \pi_{(1,1,0)}P_{(1,1,0)(2,0,1)} + \pi_{(1,1,1)}P_{(1,1,1)(2,0,1)} + \pi_{(2,0,1)}P_{(2,0,1)(2,0,1)} + \pi_{(2,1,1)}P_{(2,1,1)(2,0,1)} \\ \pi_{(2,1,1)} = \pi_{(1,1,0)}P_{(1,1,0)(2,1,1)} + \pi_{(1,1,1)}P_{(1,1,1)(2,1,1)} + \pi_{(2,0,1)}P_{(2,0,1)(2,1,1)} + \pi_{(2,1,1)}P_{(2,1,1)(2,1,1)} \\ \pi_{(1,1,0)} + \pi_{(1,1,1)} + \pi_{(2,0,1)} + \pi_{(2,1,1)} = 1 \end{cases}$$



- Для всех стратегий рассчитаны условные математические ожидания накопленного дохода и математическое ожидание времени непрерывного пребывания

$$R_{(2,1,1)(2,1,1)}(t, 2) = c_1^{(2)}(1 - e^{-\mu_2 t}) + c_2^{(1)}t + c_2^{(2)} \frac{1 - e^{-\mu_2 t} - \mu_2 t e^{-\mu_2 t}}{\mu_2} + c_2^{(2)} t e^{-\mu_2 t} +$$

$$+ c_3^{(2)} \left[ t - \frac{1 - e^{-\mu_2 t} - \mu_2 t e^{-\mu_2 t}}{\mu_2 (1 - e^{-\mu_2 t})} \right] (1 - e^{-\mu_2 t})$$

$$S_{(2,1,1)} = \left[ \sum_{(j, l'_1, l'_2)}^{\infty} \left[ \int_0^{\infty} R_{(2,1,1)(j, l'_1, l'_2)}(x, 2) d_x Q_{(2,1,1)(j, l'_1, l'_2)}(x, 2) \right] \right]$$



- Практическая значимость проведенного исследования состоит в том, что данная модель может быть использована для повышения эффективности функционирования предприятий сферы обслуживания, в том числе торговых организаций





СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ

