Рівняння прямої на площині

Загальний вигляд рівняння прямої

$$\boldsymbol{Ax + By + C = 0},$$

де $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{C}$– будь–які числа, причому $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$ одночасно не дорівнюють нулю

Розташування прямої

№ з/п	Значення коефіцієнтів	Рівняння прямої	Розташування прямої
1.	$\boldsymbol{C = 0}$	$Ax + By = 0$	**Проходе через початок координат**
2.	$\boldsymbol{A = 0}$	$By + C = 0$	**Паралельно осі ОХ**
3.	$\boldsymbol{B = 0}$	$Ax + C = 0$	**Паралельно осі ОУ**
4.	$\boldsymbol{A = C = 0}$	$By = 0 \Rightarrow y = 0$	**Співпадає з віссю ОХ**
5.	$\boldsymbol{B = C = 0}$	$Ax = 0 \Rightarrow x = 0$	**Співпадає з віссю ОУ**

- Якщо $\boldsymbol{A = B = C = 0}$, то графіком функції являється вся площина ХУ.
- Якщо $\boldsymbol{A = B = 0}$, $\boldsymbol{C \neq 0}$, то рівняння рішення не має.

Взаємне розташування прямих

- Якщо дві прямі задані своїми загальними рівняннями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ та $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, то їх взаємне розташування можна визначити:

Взаємне розташування прямих	Умова
Перетинаються	
Паралельні	
Співпадають	

Інший вид рівняння прямої

Рівняння прямої в загальному вигляді можна записати і по іншому, у разі, коли $\boldsymbol{B \neq 0}$:

$$\boldsymbol{y = -\frac{A}{B}x + \frac{C}{B}},$$

нехай

$$-\frac{A}{B} = \boldsymbol{k}, \text{ а } \frac{C}{B} = \boldsymbol{p},$$

тоді

$$\boldsymbol{y = kx + p}$$

Задача №1

Скласти рівняння прямої, що проходить через точки :

1) $A(-3;5)$ та $B(-3;-6)$

Розв'язок

Оскільки точки $A(-3;5)$ і $B(-3;-6)$ мають рівні абсциси, то пряма AB являється паралельною осі ОУ і її рівняння має вигляд $x=-3$.

Відповідь: $x=-3$.

2) $C(6;1)$ та $D(-18;-7)$

Розв'язок.

Підставимо координати точок $C(6;1)$ та $D(-18;-7)$ в рівняння $y = kx + p$, отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} 6k + p = 1, \\ -18k + p = -7; \end{cases} \Bigg| -$$

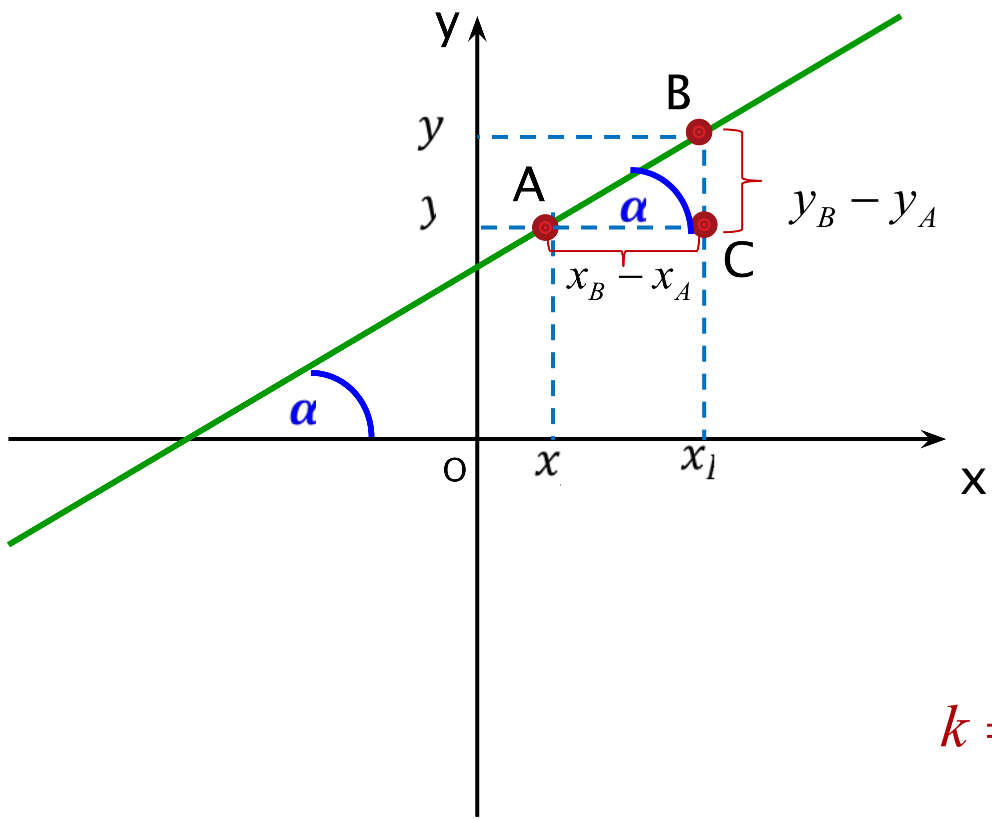
$-24k = -8,$

$k = \frac{8}{24} \Rightarrow k = \frac{1}{3},$

$p = 1 - 6 \cdot \frac{1}{3},\ p = -1 \Rightarrow y = \frac{1}{3}x - 1.$

Відповідь: $y = \frac{1}{3}x - 1.$

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом

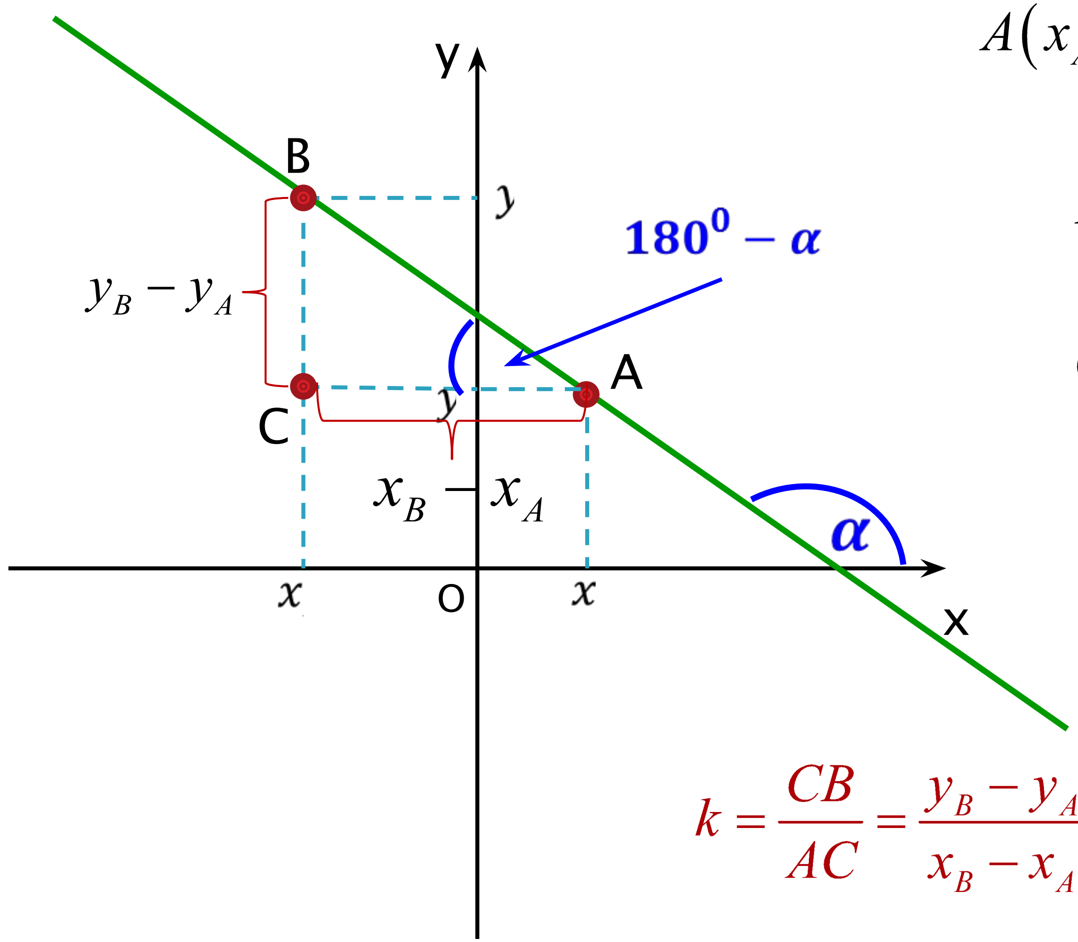


$$A(x_A; y_A); \quad B(x_B; y_B)$$

$$AC = x_B - x_A$$

$$CB = y_B - y_A$$

$$k = \frac{CB}{AC} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = tg\alpha$$



$$A(x_A;y_A);\; B(x_B;y_B)$$

$$AC=x_B-x_A$$

$$CB=y_B-y_A$$

$$k=\frac{CB}{AC}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=tg(180^0-\alpha)=-tg\alpha$$

або

$$k=\frac{y_A-y_B}{x_B-x_A}=\frac{y_B-y_A}{x_A-x_B}=tg\alpha$$

Задача №2 (розв'язати усно)

- Чому дорівнює кутовий коефіцієнт прямої:

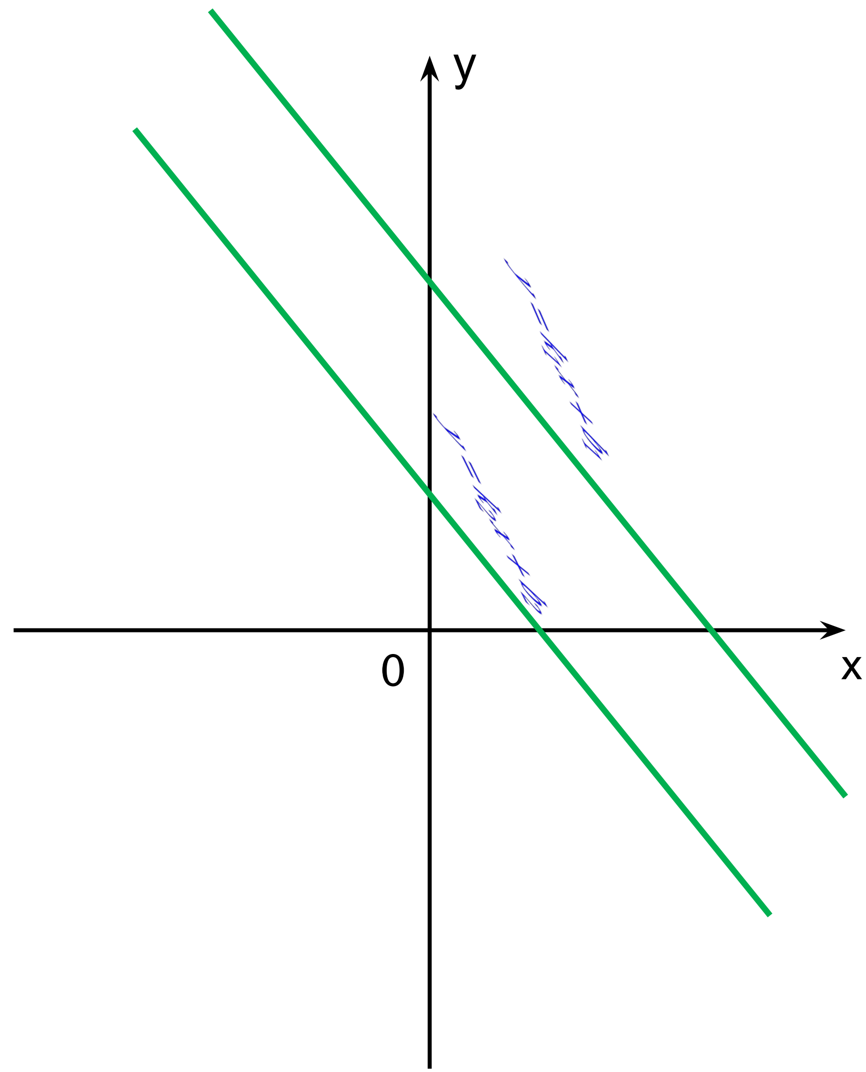
1. $y = 2x - 7$
2. $y = -3x$
3. $y = x + 10$
4. $y = 5 - x$
5. $y = 4$
6. $3x - 2y = 4$

Якщо дві прямі задані рівняннями

$$y = k_1x + b_1 \text{ та}$$
$$y = k_2x + b_2 \text{ ,}$$

причому $k_1 = k_2$ та $b_1 \neq b_2$,

то вони **паралельні**.



Задача №3

Складіть рівняння прямої, яка проходе через точку $\boldsymbol{A(-4;3)}$ та паралельна прямій $\boldsymbol{y=0,5x-4}$.

Розв’язок.

Складемо рівняння у вигляді $y=kx+b$.

Оскільки ця пряма паралельна прямій $y=0{,}5x-4$, то їх кутові коефіцієнти рівні $k=0{,}5 \Rightarrow y=0{,}5x+b$.

Враховуючи, що пряма проходить через точку $A(-4;3)$,отримаємо: $0{,}5\cdot(-4)+b=3 \Rightarrow b=5$.

Тоді рівняння прямої $y=0{,}5x+5$.

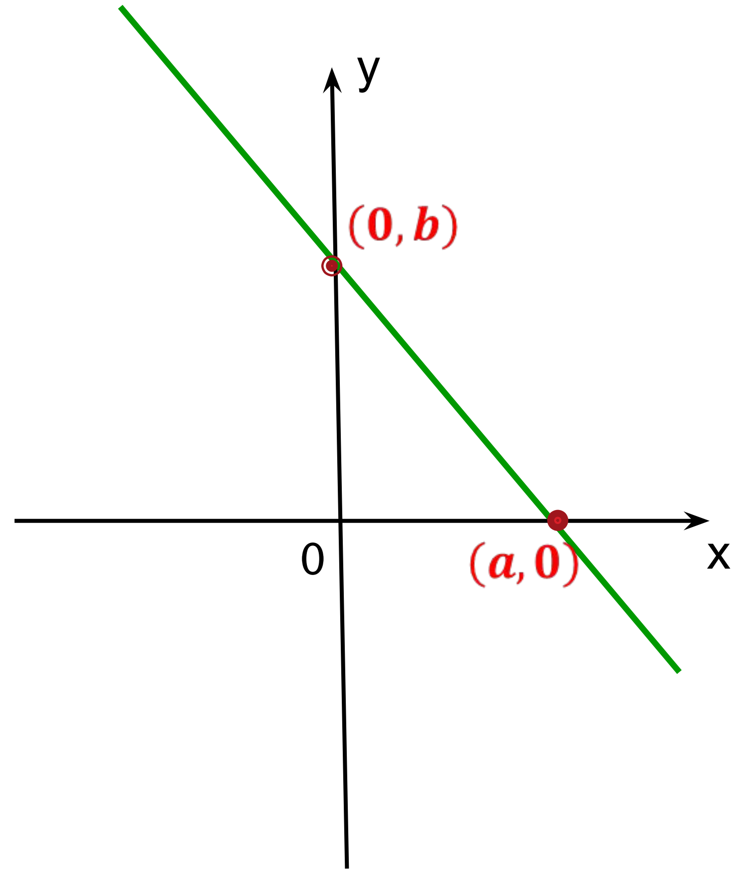
Відповідь: $y=0{,}5x+5$.

Рівняння прямої у відрізках

- Якщо пряма перетинає осі **OX** і **OY** у точках з координатами $(a, 0)$ та $(0, b)$,

то її рівняння можна записати у вигляді

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$



Задача №4

Загальне рівняння $3x - 4y + 12 = 0$ прямої привести до виду рівняння у відрізках.

Розв'язок.

Запишемо рівняння у вигляді:

$$3x - 4y = -12$$

та поділимо обидві його частина на вільний член:

$$\frac{3x}{-12} - \frac{4y}{-12} = \frac{-12}{-12};$$

$$\frac{x}{-4} - \frac{y}{-3} = 1;$$

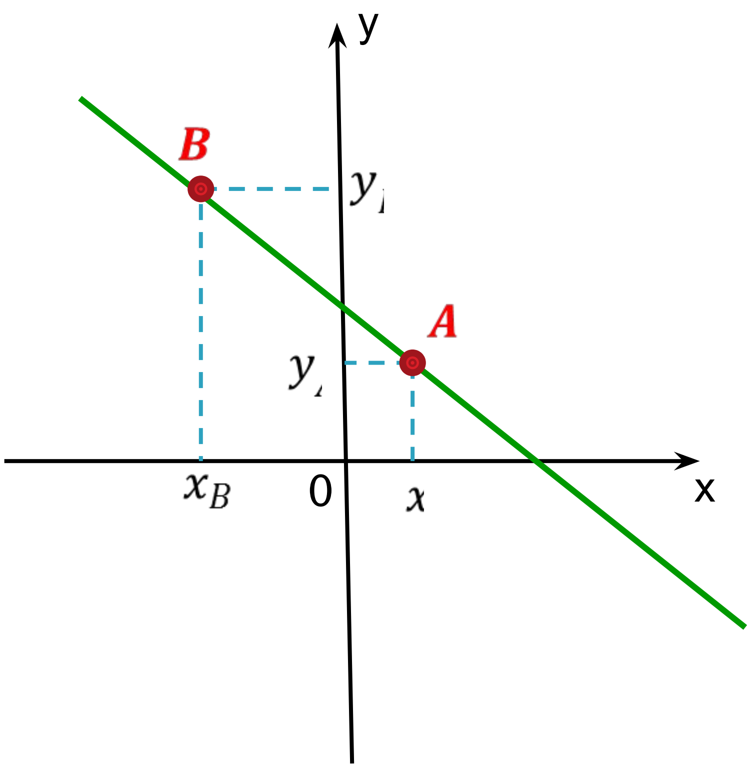
$$-\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$$

Відповідь: $-\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1.$

Рівняння прямої, яка проходе через дві різні точки

Якщо пряма проходе через дві точки $A(x_A; y_A)$ та $B(x_B; y_B)$, такі, що $x_A \neq x_B$ та $y_A \neq y_B$, то її рівняння можна записати у вигляді

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A}$$



Задача №5

Скласти рівняння прямої яка проходить через точки $\boldsymbol{A(-3;5)}$ та $\boldsymbol{B(7;-2)}$.

Розв'язок.

Підставимо координати точок $A(-3;5)$ та $B(7;-2)$ до рівняння $\frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A}$.

$$\frac{x-(-3)}{7-(-3)}=\frac{y-5}{-2-5}\Rightarrow\frac{x+3}{10}=\frac{y-5}{-7}\Rightarrow-7(x+3)=10(y-5)$$

$-7x-21=10y-50;$
$-7x-10y=-29;$
$7x+10y-29=0.$

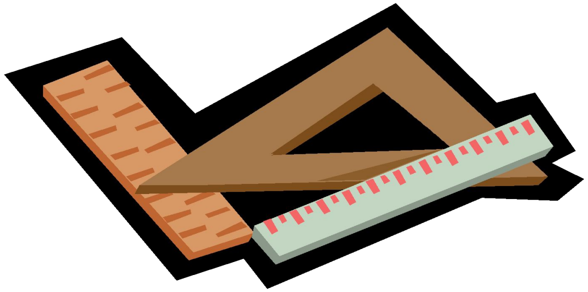
Відповідь: $7x+10y-29=0.$

Перетин двох прямих.

Якщо дано дві прямі

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 i A_2x + B_2y + C = 0,$$

які перетинаються, то щоб визначити координати точки перетину цих прямих, треба розв’язати систему рівнянь даних прямих.



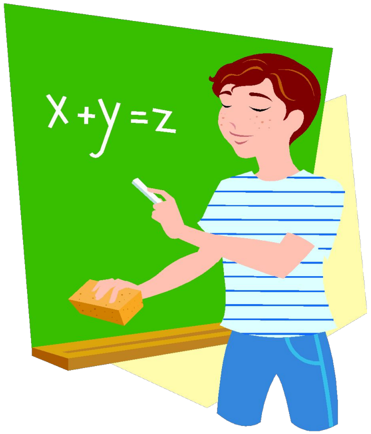
Приклад 6:

Знайдіть вершини трикутника, якщо його сторони задано рівняннями $x+3y-3=0$, $3x-11y-29=0$, $3x-y+11=0$

Розв'язання:

Щоб знайти координати вершин трикутника, треба розв'язати три системи рівнянь:

$$\begin{cases} x+3y-3=0, \\ 3x-11y-29=0, \end{cases} \quad \begin{cases} 3x-11y-29=0. \\ 3x-y+11=0, \end{cases} \quad \begin{cases} 3x-y+11=0, \\ x+3y-3=0. \end{cases}$$



Розв'язок першої системи: $x=6, y=-1.$

Розв'язок другої системи: $x=-5, y=-4$

Розв'язок третьої системи: $x=-3, y=2.$

Отже, вершинами трикутника є точки: $(6;-1)$ $(-5;-4)$ $(-3;2)$

Домашнє завдання

- Зробити конспект