Курс высшей математики

Часть 1

УГТУ-УПИ
2004г.

Лекция 8.

Кривые второго порядка на плоскости

I. Основные понятия.

2. Исследование формы кривых второго порядка по их каноническим уравнениям.

3. Приведение уравнений кривых второго порядка к каноническому виду.

1. <u>Основные понятия.</u>

Алгебраической кривой второго порядка называется кривая , уравнение которой в декартовой системе координат имеет вид:

$$(1) \quad \mathbf{A}x^2 + 2\mathbf{B}xy + \mathbf{C}y^2 + \mathbf{D}x + \mathbf{E}y + \mathbf{F} = 0,$$

где не все коэффициенты **A, B, C** равны нулю.

Вырожденные кривые второго порядка :

1. *пустое множество*

$$x^2 + y^2 + 1 = 0 \Rightarrow \quad \varnothing$$

2. *точка*

$$x^2 + y^2 = 0 \Rightarrow \quad O(0,0)$$

3. *прямая*

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow \quad x = 1$$

4. *пара прямых*

$$x^2 - y^2 = 0 \Rightarrow x = \pm y$$

Т

Всякое уравнение **(1),** задающее невырожденную кривую, путём преобразования координат можно привести к ***каноническому виду*** (одному из трех):

I. $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \; - \; \textit{эллипс}$$

II. $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \; - \; \textit{гипербола}$$

III. $$y^2=2px \; - \; \textit{парабола}$$

2. Исследование формы кривых второго порядка по их каноническим уравнениям.

2.1. Эллипс.

Эллипсом называется кривая второго порядка с каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Если $(x_0, y_0) \in \Gamma \Rightarrow (-x_0, y_0),\ (x_0, -y_0),\ (-x_0, -y_0) \in \Gamma.$

$\Rightarrow$

$x = 0,\quad y = 0$ – ***оси симметрии*** эллипса (буквой Г обозначена кривая – эллипс)

$\Longrightarrow$ Достаточно исследовать кривую и построить её в области $x \geq 0,\ y \geq 0$,

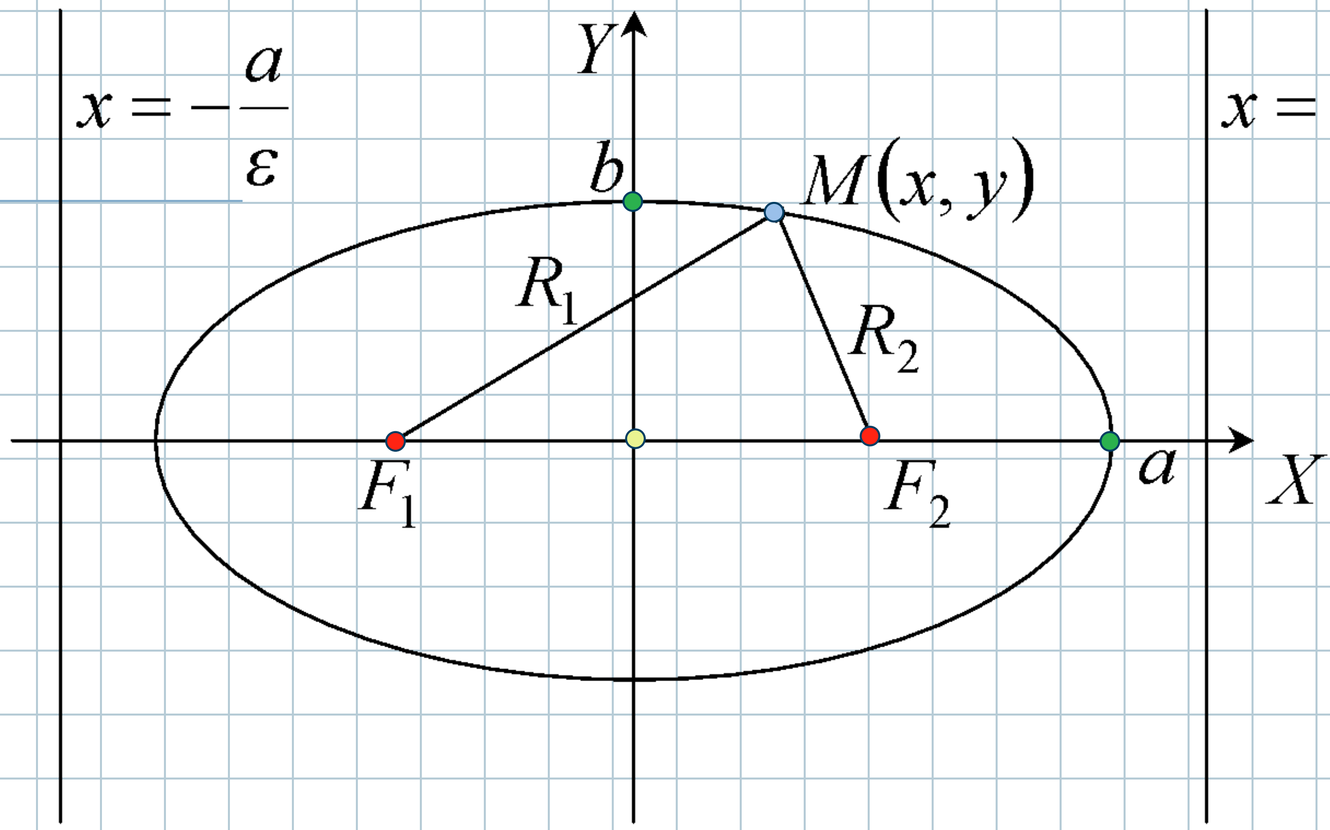
достроив затем остальные части путём ***зеркального отражения*** найденных фрагментов кривой относительно координатных осей.

Так как если $\forall (x_0, y_0) \in \Gamma$, то $\exists (-x_0, -y_0) \in \Gamma$,

эллипс ,задаваемый каноническим уравнением (I), имеет ***центр симметрии,*** совпадающий с началом координат O(0,0).

Рассмотрим уравнение эллипса в первой четверти.

$$\mathrm{I.} \Rightarrow \qquad y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

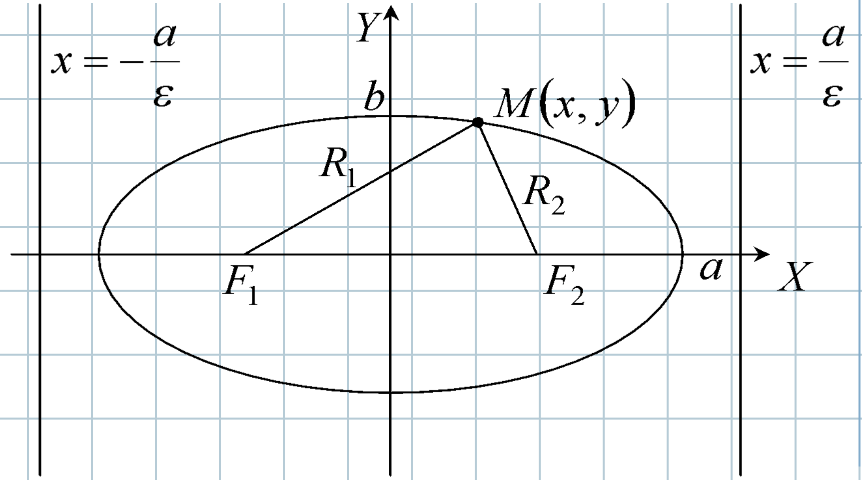


Характеристики эллипса

1. *a – большая полуось; b – малая полуось.*

2. Точки **(a,0), (–a,0), (0,b),(0,–b)** - *вершины.*

3. Точка $\mathbf{O(0,0)}$ - *центр.*



4. Точки $\mathbf{F_1(-c,0),\ F_2(c,0)}$

- *фокусы,* где $\boxed{\mathbf{c^2=a^2-b^2}}$

5. Числа $\mathbf{R_1,R_2}$ - *фокальные расстояния* точки M эллипса.

6. Число $\boldsymbol{\varepsilon}=\dfrac{\mathbf{c}}{\mathbf{a}}$ - *эксцентриситет* эллипса.

Чем больше значение $\boldsymbol{\varepsilon}$, тем больше вытянут эллипс.

$$\boxed{\mathbf{0\le\varepsilon<1}}$$

7. Прямые $\mathbf{x = \pm \frac{a}{\varepsilon}}$ - *директрисы* эллипса.

Замечание.

Если $\mathbf{a = b = R}$ уравнение $\mathbf{(I)} \Rightarrow$

$$\boxed{\mathbf{x^2 + y^2 = R^2}}$$

- уравнение *окружности* радиуса R с центром в начале координат $O(0,0)$.

Вычислим

$$(R_1 + R_2) = \left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right) \Longrightarrow$$

$$R_1 + R_2 = 2a$$

Вывод.

Эллипс является геометрическим местом точек $M(x, y)$, сумма расстояний от которых до двух заданных точек плоскости $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$ является постоянной величиной.

Замечание.

Последнее высказывание можно использовать как определение эллипса. Тогда, используя рисунок, можно получить каноническое уравнение эллипса.

2.2. Гипербола.

Гиперболой называется кривая второго порядка с каноническим уравнением

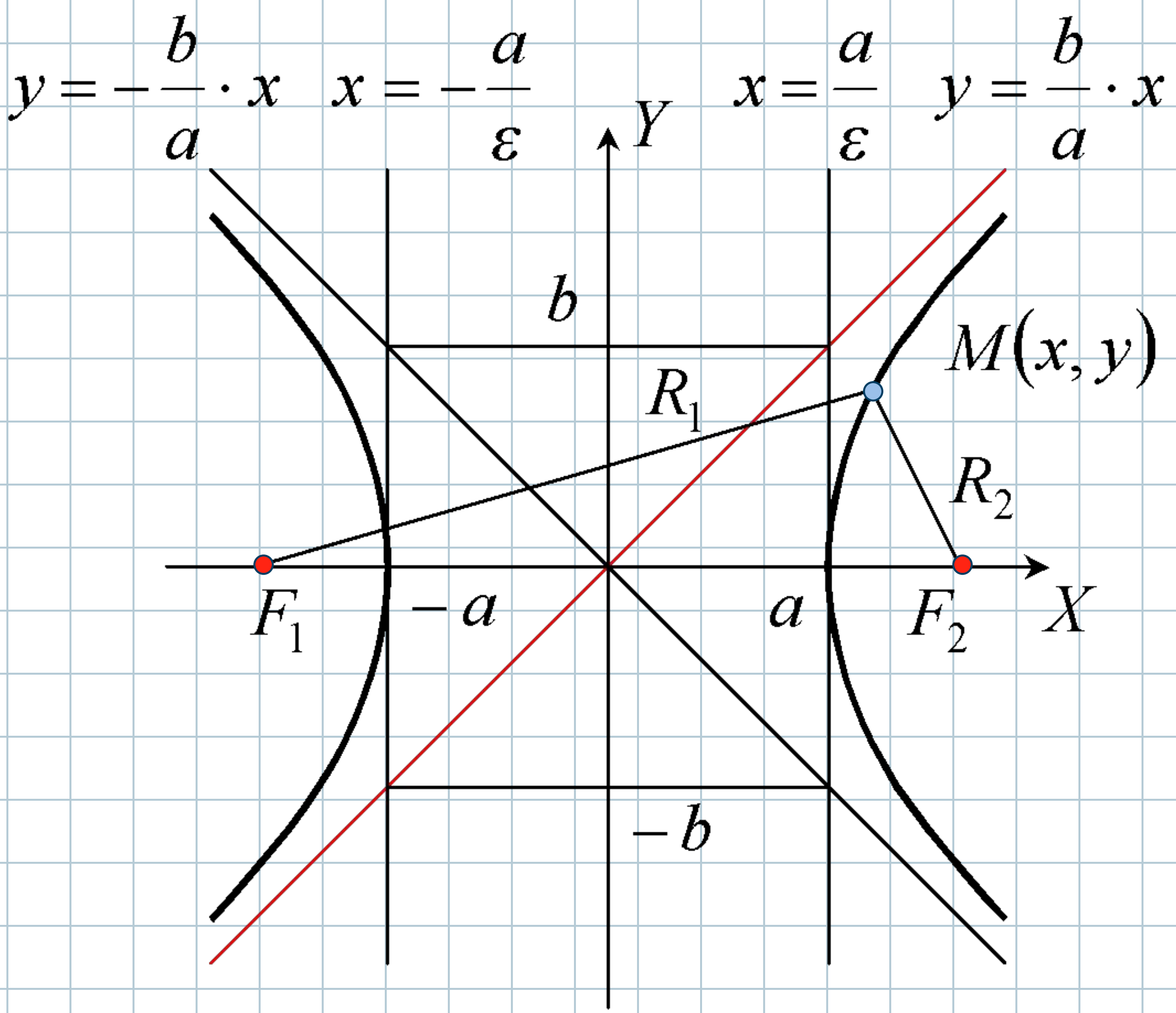
$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1}$$

$x=0, y=0$ - оси симметрии, $O(0,0)$ - центр симметрии.

Рассмотрим уравнение гиперболы в первой четверти.

$$\text{II.}\Rightarrow \qquad y=b\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}$$

$$y = b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}; \qquad \underline{x \to \infty} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} >> 1 \Rightarrow \underline{y \approx \frac{b}{a}x}$$

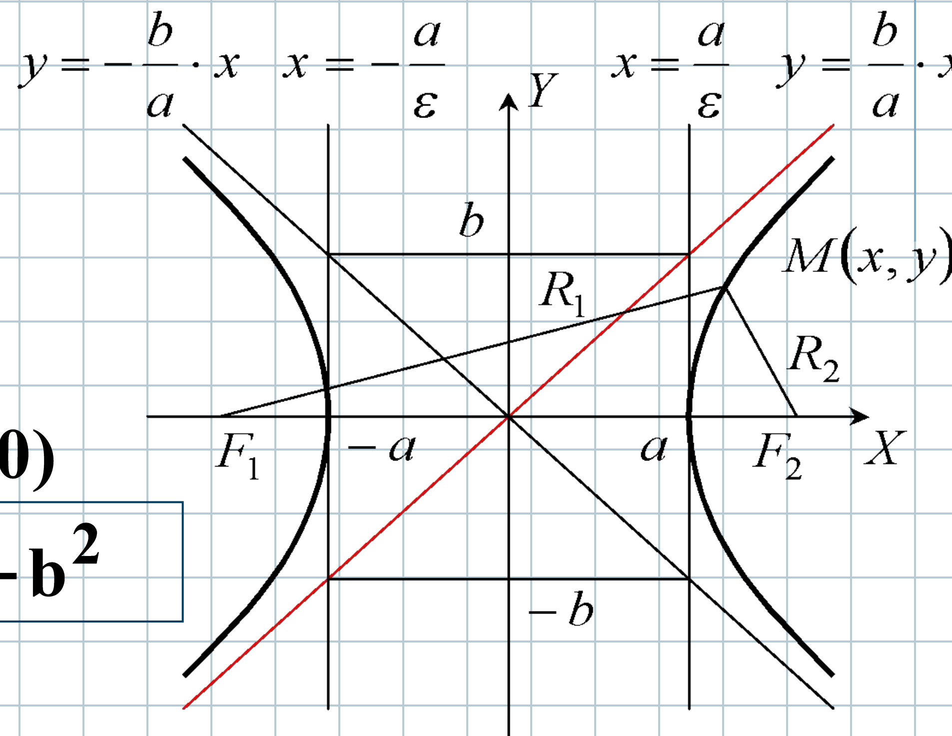


$$\boxed{y = \frac{b}{a}x}$$

Характеристики гиперболы

1. a – *действительная полуось*; b – *мнимая полуось.*

2. Точки $(a,0)$, $(-a,0)$
 - *вершины.*



3. Точка $O(0,0)$ - *центр.*

4. Точки $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$
 - *фокусы,* где $\boxed{c^2=a^2+b^2}$

5. Числа R_1, R_2 - *фокальные расстояния* точки M гиперболы.

6. Число $\varepsilon=\frac{c}{a}$ - *эксцентриситет* гиперболы.

$\boxed{\varepsilon>1}$

7. Прямые $\mathbf{x = \pm \frac{a}{\varepsilon}}$ - *директрисы* гиперболы.

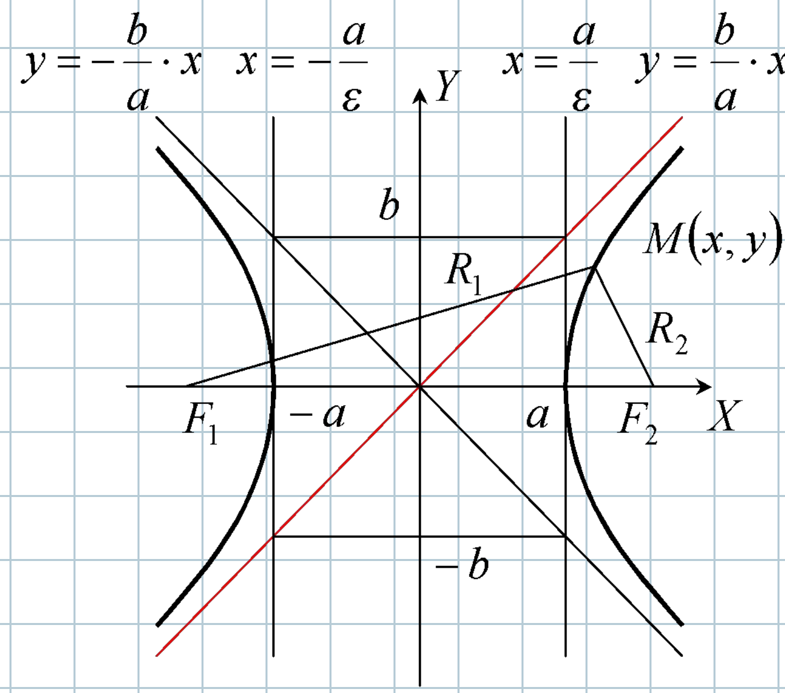
8. Прямоугольник со сторонами

$$x = \pm a, \ y = \pm b$$

- *основной прямоугольник.*

9. Прямые $\mathbf{y = \pm \frac{b}{a} x}$

– *асимптоты* гиперболы (диагонали основного прямоугольника).



Вычислим

$$(R_1 - R_2) = \left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)$$

$$\boxed{\mathbf{|R_1 - R_2| = 2a}}$$

Вывод.

Гипербола является геометрическим местом точек $M(x, y)$, модуль разности расстояний от которых до двух заданных точек плоскости $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$ является постоянной величиной.

Замечание.

Последнее высказывание можно использовать как определение гиперболы. Тогда, используя рисунок, можно получить её каноническое уравнение.

Алгоритм построения чертежа гиперболы.

1. Построение основного прямоугольника.

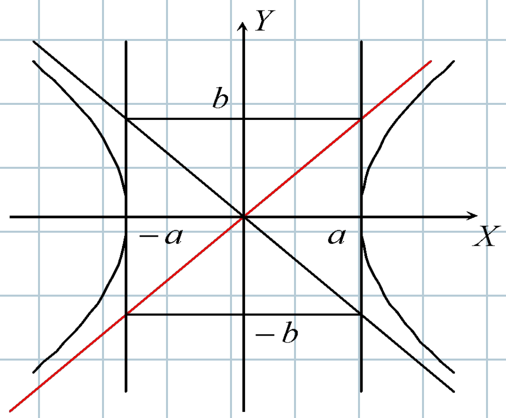
2. Построение асимптот – диагоналей.

3. Определение вершин гиперболы (выяснение вопроса о том, какую координатную ось гипербола пересекает).

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

4. Построение гиперболы.

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$



2.3. Парабола.

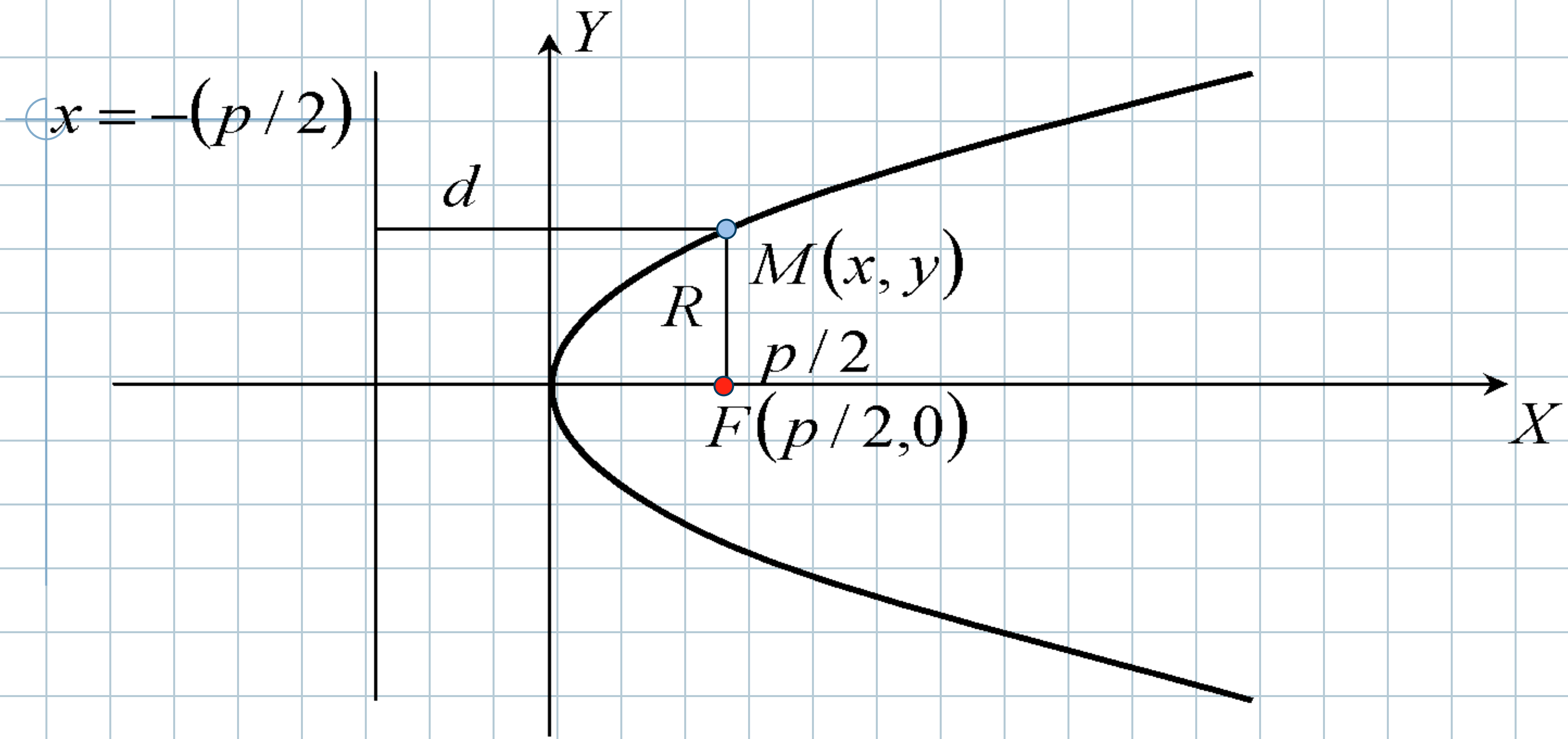
Параболой называется кривая второго порядка с каноническим уравнением

$$\boxed{y^2 = 2px}$$

Прямая $\mathbf{y = 0}$ - *ось симметрии* (единственная!).

Рассмотрим уравнение параболы в первой четверти.

III. $\Rightarrow$ $\quad \mathbf{y = \sqrt{2px}}$



Характеристики параболы.

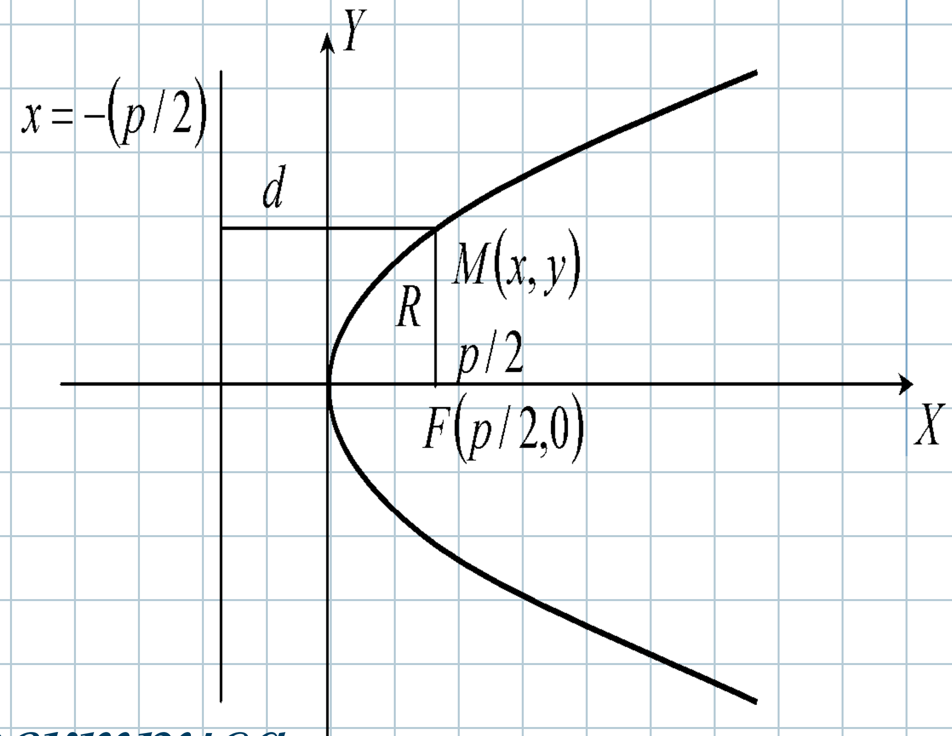
1. *Точка* **O(0,0)** - *вершина.*

2. **OX** - *Ось симметрии.*

3. Точка $\mathbf{F}\left(\frac{p}{2},0\right)$ - *фокус.*

4. Число $\mathbf{R}$

- *фокальный радиус* точки параболы.



5. Прямая $\mathbf{x=-\frac{p}{2}}$ - *директриса.*

Пусть $\mathbf{d}$ - расстояние от точки параболы до директрисы.

Вычислим $\mathbf{d}$ ⇒ $\boxed{\mathbf{d=R}}$

Вывод.

Парабола является геометрическим местом точек $M(x,y)$, равноудаленных от заданной точки $F\left(\frac{p}{2},0\right)$ плоскости и прямой $x=-p/2$.

Замечание.

Последнее высказывание можно использовать как определение параболы. Тогда, используя рисунок, можно получить её каноническое уравнение.

Канонические уравнения кривых второго порядка со смещенным центром (вершиной).

I*. $$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

II*. $$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

III*. $$(y-y_0)^2=2p(x-x_0)$$

Выполним замену

$$x' = x - x_0$$

$$y' = y - y_0$$

Тогда уравнения $\mathbf{I^*.} - \mathbf{III^*.} \Rightarrow \mathbf{I.} - \mathbf{III.}$

относительно переменных $x',\ y'.$

Геометрически: $OXY \Rightarrow O'X'Y'$

$$O(0,0) \Rightarrow O'(x_0, y_0)$$

- *параллельный перенос* в точку (x_0, y_0).

Пример.

$$\frac{(y-1)^2}{4}-\frac{(x+1)^2}{9}=1$$

Тип кривой – гипербола со смещенным в точку (-1,1) центром. b=2 - действительная полуось, a=3 - мнимая полуось.

3. **Приведение уравнений кривых второго порядка к каноническому виду.**

$$\boxed{Ax^2+2Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0}$$

Два признака неканоничности:

I. Наличие *смешанного* произведения xy.

II. Переменные присутствует в уравнении *и в первой, и во второй степени.*

Устранение признаков неканоничности:

I.
$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha$$
$$y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha$$

Геометрически: $OXY \Rightarrow O'X'Y'$

- *поворот* на угол α вокруг точки $O(0,0)$

II. $x'' = x' - x'_0$

$y'' = y' - y'_0$

Геометрически: $O'X'Y' \Rightarrow O''X''Y''$

$O(0,0) \Rightarrow O''(x'_0, y'_0)$

- *параллельный перенос* в точку (x'_0, y'_0).