

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Основные понятия и определения.

Степанова Наталия Вадимовна,
к.ф.-м. н., доцент кафедры математики ВоГУ



ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

Первый уровень - простейшие элементарные функции:

Степенные : $x^r, r \in (-\infty ; \infty)$

$$x^2; x^3; \frac{1}{x^2} = x^{-2}; \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}; \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}; x^{-3}; x^{-\frac{3}{4}}; \sqrt[3]{x^5} = x^{\frac{5}{3}} \dots$$

Показательные: $a^x, a > 0, x \in (-\infty ; \infty)$

$$2^x; 3^x; e^x = \exp(x); \left(\frac{2}{3}\right)^x; 10^x; (0.5)^x; \dots$$

Логарифмические: $\log_a x (a > 0, a \neq 1, x > 0); \ln x$

Тригонометрические: $\sin x; \cos x; \operatorname{tg} x; \operatorname{ctg} x$

Обратные тригонометрические: $\arcsin x; \arccos x; \operatorname{arctg} x; \operatorname{arcctg} x$

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

Второй уровень – элементарные функции, которые получаются из простейших элементарных функций с помощью арифметических операций: сложения, вычитания, умножения, деления, подстановки функции в функцию (сложные функции).

Многочлены: $3x^2 - 2x + 4$; $x^3 + 27$; $x^4 - 25$; $x^3 + 2x^2 - 4x + 3$

Дробно-рациональные: $\frac{2x-3}{x^2+3x-1}$; $\frac{3x+1}{2-x}$; $\frac{1}{x^2-2x+4}$

Сложные функции: $\sin^2 x$; $\sqrt{\cos(3x^3 - 4)}$; e^{tgx} ; $\ln(x^2 + 4)$; $\sin(2x - 5)$;
 $\frac{2x}{arctgx}$; $\frac{\sqrt{\ln(3x^3 - 4)}}{3^{e^x + \sqrt{x}}}$; $\frac{e^{tgx}}{\cos^2 x}$; $\sqrt[3]{x^2} \ln(x^2 + 4)$; $\sin(\ln(2x - 5))$

1. ЗАДАЧА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ.

Определение (значения производной функции в точке).

Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на интервале $(a ; b)$.
Производной этой функции в точке $x_0 \in (a ; b)$ называется число $y'(x_0) = f'(x_0)$,
которое находится по формуле $y'(x_0) = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$
(если этот конечный предел существует).

Определение (производной функции от данной функции).

Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на интервале $(a ; b)$.
Производной функцией $y'(x) = f'(x)$ от данной функции $y = f(x)$
называется новая функция, которая для любого $x \in (a ; b)$ находится по
формуле $y'(x) = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$
(если этот конечный предел существует).

ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ.

Определение (дифференциал функции).

Дифференциалом функции $y = f(x)$ называется произведение производной этой функции на дифференциал независимой переменной x .

$$dy(x) = df(x) = f'(x) \cdot dx$$

$$d(\sin x) = (\sin x)' dx = \cos x dx$$

$$d(x^2) = 2x dx$$

$$d(\ln x) = (\ln x)' dx = \frac{1}{x} dx$$

$$d\left(\frac{x}{5} - 27\right) = \left(\frac{x}{5} - 27\right)' dx = \left(\frac{1}{5}x - 27\right)' dx = \frac{1}{5} dx$$

$$d(e^x) = (e^x)' dx = e^x dx$$

$$d(\arcsin x) = (\arcsin x)' dx = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ ОТ ПРОСТЕЙШИХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

$$1) (C)' = 0$$

$$2) (x^r)' = r x^{r-1}$$

$$2.1) (x)' = 1$$

$$2.2) (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$2.3) \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$3) (\sin x)' = \cos x$$

$$4) (\cos x)' = -\sin x$$

$$5) (tg x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$6) (ctg x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$7) (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$8) (\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$9) (\arctg x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$10) (\arcctg x)' = \frac{-1}{1+x^2}$$

$$11) (a^x)' = a^x \ln a$$

$$12) (e^x)' = e^x$$

$$13) (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$14) (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

$$1) \quad (C f(x))' = C f'(x)$$

$$2) \quad (f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$$

$$3) \quad (f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$4) \quad \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

5) Сложная функция (иначе функция от функции) $y(x) = f(g(x))$

$$y'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Конец повторения

2. ПЕРВООБРАЗНАЯ ФУНКЦИЯ. ЕЁ СВОЙСТВА.

Дана функция $y = f(x)$, определена и непрерывна на $(a; b)$. считаем её производной функцией некоторой другой функции $F(x)$, т.е. $f(x) = F'(x)$ для любого $x \in (a; b)$.

Определение.

Функция $F(x)$ называется первообразной функцией для функции $f(x)$, если $F'(x) = f(x)$ для любого $x \in (a; b)$.

Замечание. Правильность вычисления первообразной функции проверяется дифференцированием.

Пример 1. Доказать, что функции $F_1(x) = \frac{x^2}{2} + x$ и $F_2(x) = \frac{(x+1)^2}{2}$ обе являются первообразными для функции $f(x) = x + 1$

Решение.

$$F_1'(x) = \left(\frac{x^2}{2} + x \right)' = \frac{2x}{2} + 1 = x + 1$$
$$F_2'(x) = \left(\frac{(x+1)^2}{2} \right)' = \frac{2(x+1)}{2} = x + 1$$

Два свойства первообразных функций для одной и той же функции.

Свойство 1. Если какая-то конкретная функция $F(x)$ является первообразной для функции $y = f(x)$, то любая функция вида $F(x) + C$, где $C \in (-\infty ; +\infty)$ также является первообразной для функции $y = f(x)$.

Свойство 2. Пусть найдены две первообразных функции $F_1(x)$ и $F_2(x)$ для одной и той же функции $y = f(x)$. Какими бы разными по виду они ни были, их можно преобразовать так, что они будут отличаться только на конкретную константу C^* , т.е. $F_1(x) \equiv F_2(x) + C^*$.

3. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Чтобы найти все первообразные функции $F(x)$ для функции $y = f(x)$, нужно найти какую-нибудь одну первообразную $F(x)$ и прибавить к ней произвольную константу. Полученное бесконечное множество первообразных функций $F(x)+C$ и называется неопределенным интегралом от функции $y = f(x)$.

Символьное обозначение

$$\int f(x) dx$$

Запомните термины:

$f(x)$ -- подынтегральная функция,

$f(x)dx$ -- подынтегральное выражение,

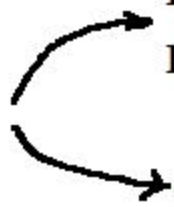
x -- переменная интегрирования.

Определение

$\int f(x) dx = F(x) + C$, где $F(x)$ -- какая-то одна первообразная для функции $y = f(x)$, а $C \in (-\infty ; +\infty)$

$$\int f(x) dx = \{ F(x) + C \}$$

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

$F(x) + C$ 
все бесконечное семейство первообразных
одна конкретная первообразная

Нахождение конкретной первообразной

Задача: найти первообразную функцию $F(x)$ для функции $f(x)$, удовлетворяющую условию $F(x_0)=y_0$. Равенство $F(x_0)=y_0$ называется начальными данными.

Интегральная кривая – это график первообразной функции $F(x)$.

Задача: найти первообразную функцию $F(x)$, интегральная кривая (график) которой проходит через точку $M_0(x_0 ; y_0)$.

Пример. Известно, что первообразная функция $F(x)$ для функции $f(x) = 2x$ удовлетворяет условию $F(1) = 1.5$. Найти значение этой первообразной в точке $x = -2$.

Решение. Имеем $\int 2x dx = x^2 + C$.

Знаем, что $F(1) = x^2 + C \Big|_{x=1} = (1)^2 + C = 1.5$, откуда $C = 0.5$.

Следовательно, формула искомой первообразной функции имеет вид $F(x) = x^2 + 0.5$. Теперь найдем значение этой первообразной при $x = -2$: $F(-2) = (-2)^2 + 0.5 = 4.5$.

Ответ: $F(-2) = 4.5$.

$$x^2 - 3$$

$$x^2 - 2$$

$$x^2 - 1$$

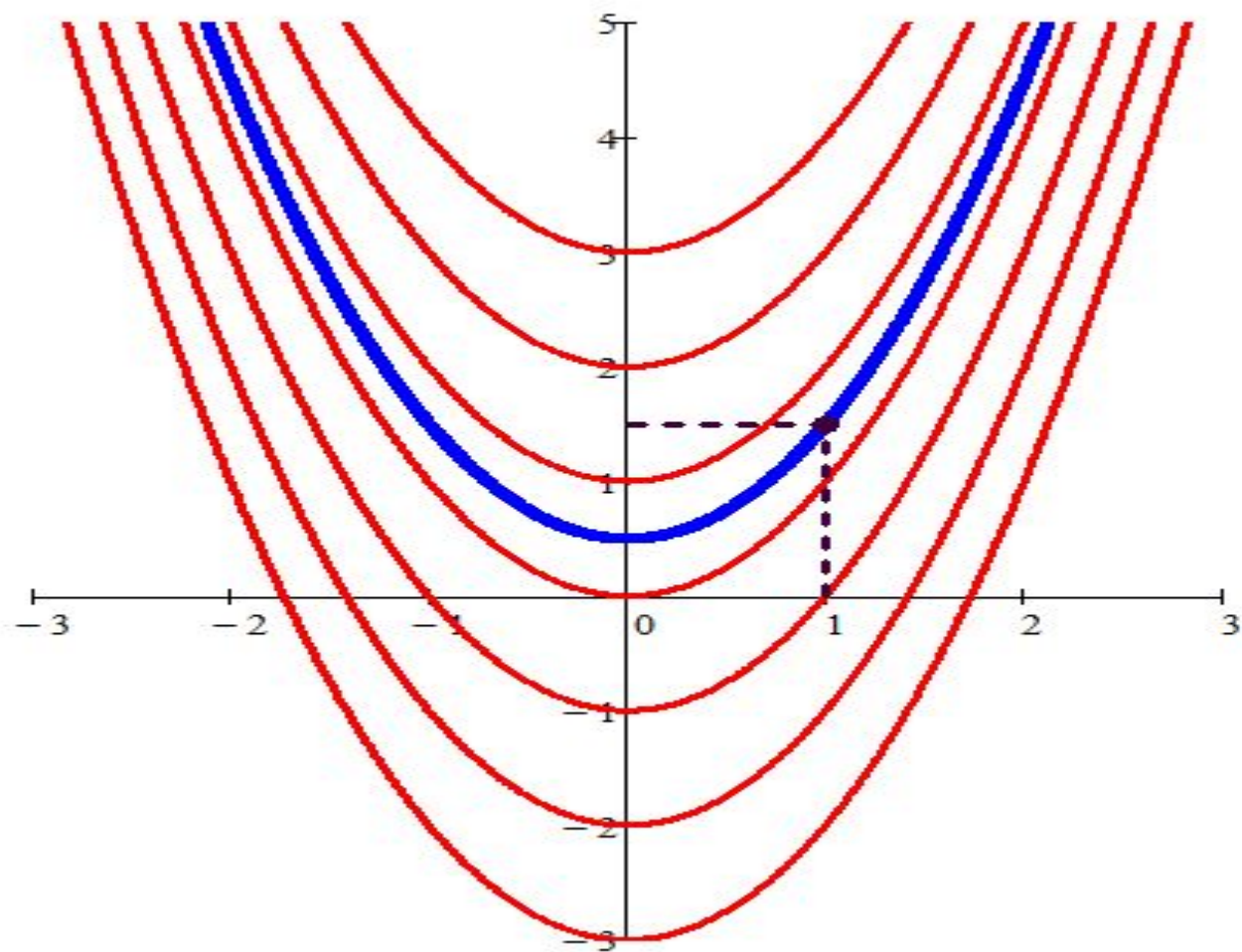
$$x^2$$

$$x^2 + 1$$

$$x^2 + 2$$

$$x^2 + 3$$

$$x^2 + 0.5$$



4. ТЕХНИКА ВЫЧИСЛЕНИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

1) $(C)' = 0$ «Какая функция имеет производную 0?» $\int 0 dx = C$

2) $(x^r)' = r x^{r-1}$

$$\int x^r dx = \int \frac{r+1}{r+1} x^r dx = \int \frac{1}{r+1} (r+1) x^r dx = \frac{1}{r+1} \int (r+1) x^r dx = \frac{1}{r+1} x^{r+1} + C$$

$$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C \quad (r \neq -1)$$

14) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ «Какая функция имеет производную $\frac{1}{x}$?» $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$?

$y = \frac{1}{x}$ ОДЗ: $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

$y = \ln x$ ОДЗ: $x \in (0; +\infty)$

$y = \ln|x|$ ОДЗ: $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

ТАБЛИЦА НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ ОТ ПРОСТЕЙШИХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

$$1) \int 0 dx = C$$

$$2) \int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C, \text{ если } r \neq -1$$

$$2.1) \int dx = x + C$$

$$2.2) \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$$

$$2.3) \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$$

$$3) \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$4) \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$5) \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$6) \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

$$7) \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$$

$$8) \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{cases}$$

$$9) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$10) \int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C \\ -\operatorname{arcctg} x + C \end{cases}$$

$$11) \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$

$$12) \int \frac{1}{a^2-x^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C$$

(высокий логарифм)

$$13) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2+k} \right| + C$$

(длинный логарифм)

$$14) \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$15) \int e^x dx = e^x + C$$

Два свойства неопределенного интеграла

1. Постоянный множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла.

$$\int C f(x) dx = C \int f(x) dx$$

2. Неопределенный интеграл от суммы или разности функций равен сумме или разности интегралов от этих функций.

$$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

К сожалению, нет единых правил интегрирования произведения и частного функций. Также нет единого правила интегрирования сложной функции. Интегрирование функций – это более сложная операция, чем дифференцирование.

Пример 2. Найти неопределенный интеграл $\int (2x + \sin x) dx$

Решение. $\int (2x + \sin x) dx = \int 2x dx + \int \sin x dx = x^2 + C_1 + (-\cos x) + C_2 =$

$$= x^2 - \cos x + C_1 + C_2 = x^2 - \cos x + C$$

$$C_1 + C_2 \leftrightarrow C$$

Сколько писать констант? Две или одну?

Одну!!!

Куда девается dx ?

Две трактовки символа $\int f(x) dx$

1. «Указатель переменной интегрирования»

Символы $\int$ и dx рассматриваются как открывающая и закрывающая скобки.

$$\int f(x) dx \quad \left(f(x) \right)$$

Символ dx не считается множителем!
Знака умножения нет!!!



The image shows the integral symbol $\int$ followed by $f(x) \cdot dx$. A large red 'X' is drawn over the entire expression, indicating that this representation is incorrect.

В данной трактовке символ dx определяет переменную интегрирования. Тип подынтегральной функции, а значит и нужный табличный интеграл, определяется тем, какие операции делаются в функции над переменной интегрирования.

Как только тип подынтегральной функции определен и выбран нужный табличный интеграл, символ dx свое дело сделал и тихо удалился.

Пример 3.

$$\int x^y dx = \left| \begin{array}{l} y = \text{const} \quad y \neq -1 \\ \int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C \end{array} \right| = \frac{x^{y+1}}{y+1} + C$$

$$\int x^y dy = \left| \begin{array}{l} x = \text{const} \quad x > 0; x \neq 1 \\ \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \end{array} \right| = \frac{x^y}{\ln x} + C$$

Пример 4.

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \sin x d(\sin x) = \left| \sin x = t \right| = \int t dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{(\sin x)^2}{2} + C$$

2. «ДИФФЕРЕНЦИАЛ НЕЗАВИСИМОЙ ПЕРЕМЕННОЙ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЕ ФУНКЦИИ»

Символ dx рассматривается как дифференциал переменной x и он является сомножителем (есть операция умножения).

$$\int f(x) dx = \int f(x) \bullet dx = \int h(g(x)) g'(x) \bullet dx = \int h(g(x)) dg(x) = H(g(x)) + C$$
$$f'(x) \cdot dx = df(x)$$

Пример 5.

$$\begin{aligned} \int \sin x \cos x dx &= \int \sin x (\sin x)' dx = \int \sin x d(\sin x) = \left| \sin x = t \right| = \\ &= \int t dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{(\sin x)^2}{2} + C \end{aligned}$$

Способ 2.

$$\begin{aligned} \int \sin x \cos x dx &= \int \cos x \sin x dx = \int \cos x (-\cos x)' dx = \\ &= -\int \cos x d(\cos x) = \left| \cos x = t \right| = -\int t dt = -\frac{t^2}{2} + C = -\frac{(\cos x)^2}{2} + C \end{aligned}$$

ТАБЛИЦА НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ ОТ ПРОСТЕЙШИХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

$$1) \int 0 \, dx = C$$

$$2) \int x^r \, dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C, \text{ если } r \neq -1$$

$$2.1) \int dx = x + C$$

$$2.2) \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$$

$$2.3) \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$$

$$3) \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C$$

$$4) \int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

$$5) \int \cos x \, dx = \sin x + C$$

$$6) \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

$$7) \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$$

$$8) \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{cases}$$

$$9) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$10) \int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C \\ -\operatorname{arcctg} x + C \end{cases}$$

$$11) \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$

$$12) \int \frac{1}{a^2-x^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C$$

(высокий логарифм)

$$13) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2+k} \right| + C$$

(длинный логарифм)

$$14) \int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$15) \int e^x \, dx = e^x + C$$