ТЕОРЕМА О ДВИЖЕНИИ ЦЕНТРА МАСС

ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ. ДИНАМИКА

Цель лекции

Ознакомиться с теоремой о движении центра масс и примерами ее практического применения.

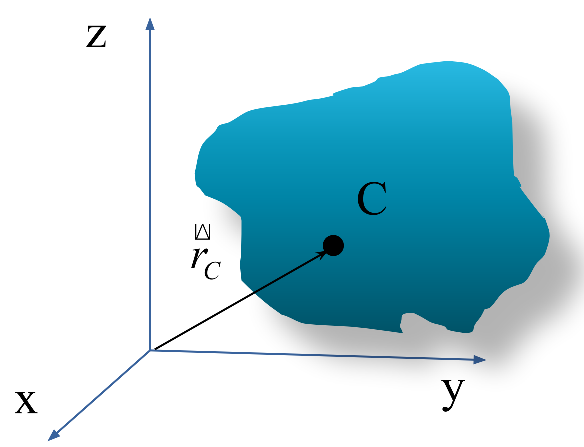
План лекции

- **Центр масс**
- **Теорема о движении центра масс**
- **Значение теоремы о движении центра масс**
- **Следствия из теоремы**
- **Закон сохранения движения центра масс**

ЦЕНТР МАСС

Центром масс механической системы **называется геометрическая точка С, координаты которой определяются формулами:**

$$x_C = \frac{1}{M}\sum m_k x_k \qquad y_C = \frac{1}{M}\sum m_k y_k \qquad z_C = \frac{1}{M}\sum m_k z_k$$



или

$$\boxed{\vec{r}_C = \frac{1}{M}\sum m_k \vec{r}_k}$$

M - масса системы

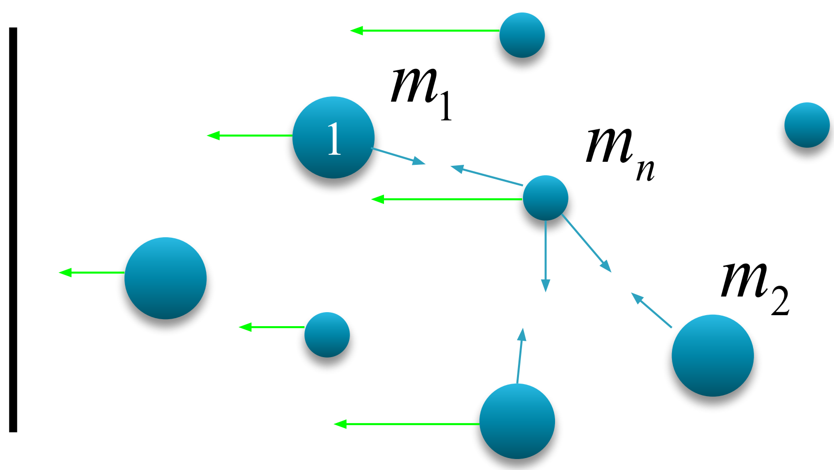
$$M = \sum m_k$$

ТЕОРЕМА О ДВИЖЕНИИ ЦЕНТРА МАСС

Произведение массы системы на ускорение ее центра масс равно геометрической сумме всех действующих на систему внешних сил

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

- Запишем дифф.уравнения движения системы, состоящей из **n** материальных точек



$$\left.\begin{aligned} m_1\vec{a}_1 &= \vec{F}_1^e + \vec{F}_1^i \\ m_2\vec{a}_2 &= \vec{F}_2^e + \vec{F}_2^i \\ &\cdots \\ m_n\vec{a}_n &= \vec{F}_n^e + \vec{F}_n^i \end{aligned}\right\}$$

- Сложим почленно их левые и правые части

$$\sum m_k\vec{a}_k = \sum \vec{F}_k^e + \sum \vec{F}_k^i$$

- Преобразуем левую часть равенства, используя формулу для радиус-вектора центра масс системы

$$\vec{r}_C = \frac{1}{M}\sum m_k\vec{r}_k \quad \Rightarrow \quad \sum m_k\vec{r}_k = M\vec{r}_C$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

- Возьмем вторую производную по времени от обеих частей этого равенства

$$\sum m_k \frac{d^2\vec{r}_k}{dt^2} = M\frac{d^2\vec{r}_C}{dt^2} \quad \text{или} \quad \sum m_k\vec{a}_k = M\vec{a}_C$$

$\vec{a}_C$ - ускорение масс системы

- Учитывая, что сумма внутренних сил системы $\sum \vec{F}_k^i = 0$

Получим уравнение, выражающее теорему о движении масс системы

$$\boxed{M\vec{a}_C = \sum \vec{F}_k^e}$$

- Проектируя обе части равенства на координатные оси, получим дифференциальные уравнения движения центра масс в проекциях на оси декартовой системы координат

$$M\ddot{x}_C = \sum F_{kx}^e \qquad M\ddot{y}_C = \sum F_{ky}^e \qquad M\ddot{z}_C = \sum F_{kz}^e$$

- Теорема доказана

ЗНАЧЕНИЕ ТЕОРЕМЫ О ДВИЖЕНИИ ЦЕНТРА МАСС

Центр масс системы движется как материальная точка, масса которой равна массе всей системы и к которой приложены все внешние силы, действующие на систему

Система = материальная точка

поступательное движение тела

маленький размер тела

СЛЕДСТВИЯ ИЗ ТЕОРЕМЫ

Одними внутренними силами нельзя изменить характер движения центра масс системы

Пара сил, приложенная к твердому телу, не может изменить движение его центра масс (она может вызвать только вращение тела)

ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЦЕНТРА МАСС

1. Если сумма всех внешних сил, действующих на систему, равна нулю, то центр масс этой системы движется с постоянной по модулю и направлению скоростью, т.е. равномерно и прямолинейно

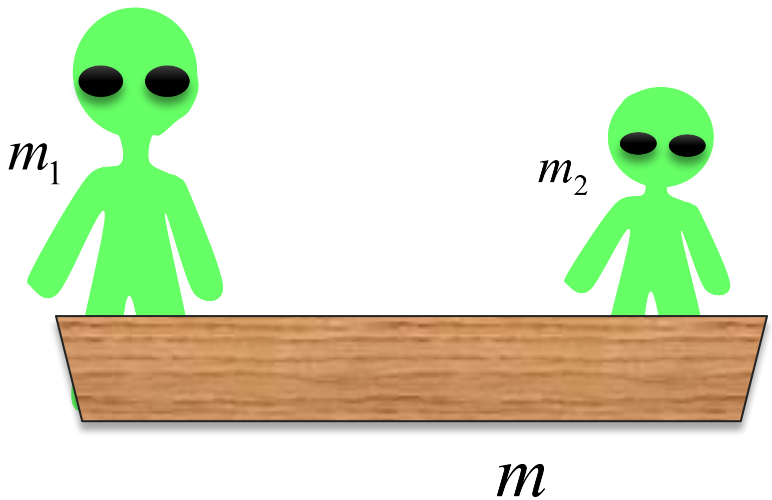
$$\sum \vec{F}_k^e = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{a}_C = 0} \quad \text{или} \quad \boxed{\vec{v}_C = const}$$

ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЦЕНТРА МАСС

2. Если сумма проекций всех действующих внешних сил на какую-нибудь ось равна нулю, то проекция скорости центра масс системы на эту ось есть величина постоянная

$$\sum F^{e}_{kx} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\ddot{x}_C = 0} \quad \text{или} \quad \boxed{\dot{x}_C = v_{Cx} = const}$$

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ



Пренебрегая сопротивлением воды, определить, куда и насколько переместится лодка, если люди поменяются местами.

m - масса лодки

m_1 - масса первого человека

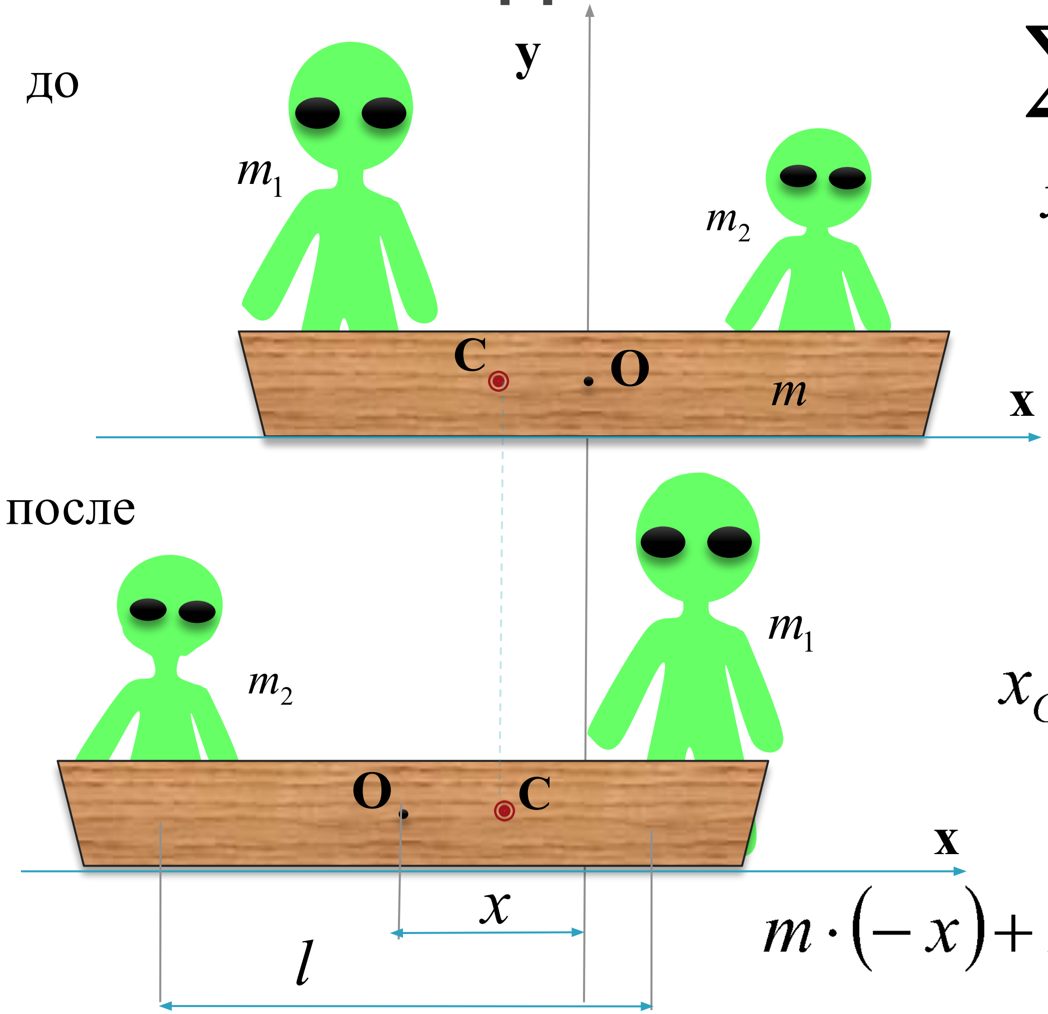
m_2 - масса второго человека

l - расстояние между ними

$\frac{l}{2}$ - расстояние от человека до центра лодки

$x - ?$

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ



$$\sum F^{e}_{kx} = 0 \Rightarrow v_{Cx} = 0 \Rightarrow$$

$$x_C = const \Rightarrow x_{C_1} = x_{C_2}$$

$$\boxed{x_C = \frac{1}{M}\sum m_k x_k}$$

$$x_{C_{до}} = \frac{m \cdot 0 + m_1 \cdot \left(-\frac{l}{2}\right) + m_2 \cdot \frac{l}{2}}{m + m_1 + m_2}$$

$$x_{C_{после}} = \frac{m \cdot (-x) + m_1 \cdot \left(-x + \frac{l}{2}\right) + m_2 \cdot \left(-x - \frac{l}{2}\right)}{m + m_1 + m_2}$$

$$\boxed{x = \frac{l(m_1 - m_2)}{m + m_1 + m_2}}$$